

专题 01 数学思想方法在一次方程组中的应用

思想方法概述：一次方程组的解法看似简单，核心思想是消元，主要方法是代入法和加减法。事实上，学生在实际解题过程中，常常思路不清、过程繁琐，正确率不高。根本原因上是对数学思想方法的理解不深，过程僵化。

题型归纳

题型一：整体代入法在一次方程组中的应用

题型二：整体加减法在一次方程组中的应用

题型三：整体换元法在一次方程组中的应用

题型四：整体思想在含参数的方程组中的应用

题型专练

题型 01 整体代入在一次方程组中的应用

【典例 1】解方程组
$$\begin{cases} 3x+5y=21 & \text{①} \\ 4x+15y=53 & \text{②} \end{cases}$$

解法一：由①得： $5y=21-3x$

化简，得： $y=\frac{21-3x}{5}$ ③

把③代入②得： $4x+15 \times \frac{21-3x}{5}=53$

化简整理，得： $63-5x=53$

解之，得： $x=2$

把 $x=-2$ 代入③式，得 $y=3$

所以，方程组的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

【点睛】 这是严格按代入消元法的一般程序解答的，过程繁琐、容易出错；

解法二： 由①得： $5y=21-3x$ ③

把③代入②，得： $4x+3(21-3x)=53$

解之，得： $x=2$

把 $x=-2$ 代入③式，得 $y=3$

所以，方程组的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

【点睛】 这里把 $3y$ 看成一个整体，实施整体消元，避免了含有分数的计算，过程简洁，清晰明了。

【典例 2】 如果 $2x+3y+z=130$ ， $3x+5y+z=180$ ，求 $\frac{x+2y}{x+y+z}$ 的值.

解：将 $(x+2y)$ 和 $(x+y+z)$ 看成一个整体，将已知条件变为

$$\begin{cases} (x+2y) + (x+y+z) = 130 \\ 2(x+2y) + (x+y+z) = 180 \end{cases}$$

解之得： $\begin{cases} x+2y=50 \\ x+y+z=80 \end{cases}$

所以， $\frac{x+2y}{x+y+z} = \frac{5}{8}$.

【点睛】 这里把 $(x+2y)$ 和 $(x+y+z)$ 看成一个整体，实施整体代入计算，无需求出 x

和 y 的具体值.

【变式 1】 阅读理解：

善于思考的小聪在解方程组 $\begin{cases} 2x-3y=3 \text{ ①} \\ 2x-5y=5 \text{ ②} \end{cases}$ 时，发现①和②之间存在一定的关系，他的解法如下：

解：把②变形为 $2x-3y-2y=5$. ③

把①代入③，得 $3-2y=5$,

解得 $y=-1$.

把 $y=-1$ 代入①，得 $x=0$.

∴ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$

小聪的这种解法叫“整体换元法”. 请用“整体换元法”解下列方程组：

$$(1) \begin{cases} 2x+5y=3 \\ 3x+5y=2 \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} 3x-2y=5 \\ 9x-4y=19 \end{cases}.$$

【变式2】 阅读下列材料，善于思考的小红在解方程组 $\begin{cases} 2x+5y=3 \text{ ①} \\ 4x+11y=5 \text{ ②} \end{cases}$ 时，采用了一种“整体代换”的解法：

解：将方程②变形 $4x+10y+y=5$, 即 $2(2x+5y)+y=5$ ③, 把①代入③得 $2 \times 3 + y = 5$.

解得 $y=-1$, 把 $y=-1$ 代入①得 $x=4$, 所以原方程组的解为 $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$

请你运用以上方法解决下列问题：

模仿小红的方法解方程组 $\begin{cases} x+3y=2 \text{ ①} \\ 2x+7y=6 \text{ ②} \end{cases}$

【变式3】 定义：关于 x, y 的二元一次方程 $ax + by = c$ (其中 a, b, c 互不相等) 中的常数项 c 与未知数 x 系数

a 互换，得到的方程叫“变更方程”，例如： $ax + by = c$ “变更方程”为 $cx + by = a$.

(1) 方程 $3x + 2y = 4$ 的“变更方程”为——；

(2) 方程 $2x + 3y = 4$ 与它的“变更方程”组成的方程组的解为——；

(3) 已知关于 x, y 的二元一次方程 $ax + by = c$ 的系数满足 $a + b + c = 0$ ，且 $ax + by = c$ 与它的“变更方程”组成的

方程组的解恰好是关于 x, y 的二元一次方程 $mx + ny = p$ 的一个解，求代数式 $2(m - n) - (m - p) + 3n + 2026$

的值 .

题型 02 整体加减在一次方程组中的应用

【典例1】 解方程组
$$\begin{cases} 4x + 5y = 2 & \text{①} \\ 6x + 7y = 8 & \text{②} \end{cases}$$

解法一：① $\times$ 3得： $12x + 15y = 6$ ④

② $\times$ 2得： $12x + 14y = 16$ ⑤

④ $-$ ⑤得： $(12x + 15y) - (12x + 14y) = 6 - 16$

整理，得： $y = -10$

把 $y = -10$ 代入①式，得 $4x - 50 = 2$

解之，得： $x = 13$

所以，方程组的解为 $\begin{cases} x=13 \\ y=-10 \end{cases}$

【点睛】 这是学生用加减消元的一般解法，过程繁琐、容易出错；

解法二：(②-①)×2得：4x+4y=12 ③

①-③得：y=-10

把 y=-10,代入①式，得 4x-50=2

解之，得：x=13

所以，方程组的解为 $\begin{cases} x=13 \\ y=-10 \end{cases}$

【点睛】 解方程组的核心是消元，消元无需因循守旧，整体思考、整体实施加减消元，过程简洁，清晰明

了；

【典例2】 解方程组 $\begin{cases} 5x+7y=16 & \text{①} \\ 7x+5y=8 & \text{②} \end{cases}$

解法一：①×7得：35x+49y=112 ④

②×5得：35x+25y=40 ⑤

④-⑤得：24y=72

解之，得：y=3

把 y=3,代入①式，x=-1

所以，方程组的解为 $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

【点睛】 这是学生用加减消元的一般解法，系数较大、容易出错；

解法二：(①+②)×2得： $x+y=2$ ③

(②-①)÷2得： $x-y=-4$ ④

③+④得 $2x=-2$ ，即 $x=-1$

把 $x=-1$ 代入③式，得 $y=3$

所以，方程组的解为 $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

【点睛】 观察方程特征，整体思考、整体实施加减消元，过程简洁，清晰明了；

【典例3】 解方程组：
$$\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 2x+y+z=13 \\ x+2y+z=-2 \end{cases}$$

【分析】 本题考查了解三元一次方程组．通过将三个方程相加，得到 $x+y+z$ 的值，然后分别用各个方程

减去该式，逐一求解未知数．

【详解】 解：
$$\begin{cases} x+y+2z=5 \text{ ①} \\ 2x+y+z=13 \text{ ②} \\ x+2y+z=-2 \text{ ③} \end{cases}$$

①+②+③ 得， $4x+4y+4z=16$ 即 $x+y+z=4$ ④

①-④得 $(x+y+2z)-(x+y+z)=5-4$

即 $z=1$

②-④得 $(2x+y+z)-(x+y+z)=13-4$

即 $x=9$

③ - ④得 $(x + 2y + z) - (x + y + z) = -2 - 4$

解得： $y = -6$

$$\begin{aligned} x &= 9 \\ \begin{cases} y &= -6 \end{cases} \\ \therefore z &= 1 \end{aligned}$$

【变式1】解方程组：
$$\begin{cases} 11x + 17y = 39 \textcircled{1} \\ 17x + 11y = 45 \textcircled{2} \end{cases}$$

【变式2】解下列方程组：
$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$$

【变式3】已知 $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 满足
$$\begin{cases} a + b = 21 \\ b + c = 24 \\ a + c = 27 \end{cases}$$
 求这个三角形的三边 a, b, c 的长。

【变式4】阅读下列解方程组的方法，然后回答问题。

解方程组：
$$\begin{cases} 19x + 17y = 18 \textcircled{1} \\ 16x + 14y = 15 \textcircled{2} \end{cases}$$

解：① - ②，得 $3x + 3y = 3$ ，即 $x + y = 1$ 。③

③ $\times 14$ ，得 $14x + 14y = 14$ 。④

② - ④，得 $2x = 1$ ，解得 $x = \frac{1}{2}$ 。把 $x = \frac{1}{2}$ 代入③，解得 $y = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore$ 原方程组的解是
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(1) 请你仿照上面的解法，解方程组：
$$\begin{cases} 2025x + 2023y = 2024 \\ 2026x + 2024y = 2025 \end{cases}$$

(2) 解关于 x, y 的二元一次方程组：
$$\begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = a \\ (b+1)x + (b-1)y = b \end{cases} \quad (a \neq b)$$

题型 03 整体换元在一次方程组中的应用

【典例 1】 解方程组
$$\begin{cases} 2(x+y) - 3(x-y) = 3 & \text{①} \\ 4(x+y) + 3x = 15 + 3y & \text{②} \end{cases}$$

解：设 $x+y=m$ ， $x-y=n$

原方程组可化为
$$\begin{cases} 2m - 3n = 3 \\ 4m + 3n = 15 \end{cases}$$

解之，得：
$$\begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases}$$
，即
$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

解之，得：
$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

【点睛】 观察方程特征，整体换元之后、方程组变得简洁易于计算；

【典例 2】 解方程组
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = \frac{5}{6} & \text{①} \\ 4(x+y) - 5(x-y) = 2 & \text{②} \end{cases}$$

【分析】 这题可以先把方程组化简后，组成新的方程组，再用适当的方法进行求解。这是学生通常用的方法。

如果把 $(x+y)$ 换成 m ， $(x-y)$ 换成 n ，重新组成新的方程组来求解的方法就是换元法，换元法的实质就是

整体代换。

解：设 $x+y=m$ ， $x-y=n$

原方程组可化为
$$\begin{cases} 3m-2n=5 \\ 4m-5n=2 \end{cases}$$

解之，得：
$$\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$$
，即
$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \end{cases}$$

解之，得：
$$\begin{cases} x=2.5 \\ y=0.5 \end{cases}$$

【变式1】 若方程组
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$
 的解为
$$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$
，则方程组
$$\begin{cases} a_1(2x+3)+b_1(y-4)=c_1 \\ a_2(2x+3)+b_2(y-4)=c_2 \end{cases}$$
 的解为 ()

- A.
$$\begin{cases} x=-1 \\ y=6 \end{cases}$$
 B.
$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$
 C.
$$\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$
 D.
$$\begin{cases} x=-2 \\ y=6 \end{cases}$$

【变式2】 若关于 x 、 y 的方程组
$$\begin{cases} ax+by=c \\ ex+fy=d \end{cases}$$
 的解为
$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$
，则方程组
$$\begin{cases} a(x-1)+3by=2c \\ e(x-1)+3fy=2d \end{cases}$$
 的解是 ()

- A.
$$\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$$
 B.
$$\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}$$
 C.
$$\begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{4}{3} \end{cases}$$
 D.
$$\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$$

【变式3】 若方程组
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$
 的解为
$$\begin{cases} x=3 \\ y=8 \end{cases}$$
，则方程组
$$\begin{cases} a_1x+4b_1y=c_1 \\ a_2x+4b_2y=c_2 \end{cases}$$
 的解为_____。

【变式4】 阅读与思考：为了提高全班学生的运算能力和解题技巧，李老师设计了如下的题目。

解方程组：
$$\begin{cases} \frac{4x+3y}{3} + \frac{6x-y}{8} = 8 \\ \frac{4x+3y}{6} + \frac{6x-y}{2} = 11 \end{cases}$$

观察发现：如果用代入消元法或加减消元法求解，运算量都比较大，且容易出错。如果把方程组中的

$(4x+3y)$ 看成一个整体，把 $(6x-y)$ 看成一个整体，通过换元，可以更简便地解决问题。

设 $\begin{cases} 4x+3y=m \\ 6x-y=n \end{cases}$ ，则原方程组可化为 $\begin{cases} \frac{m}{3} + \frac{n}{8} = 8 \\ \frac{m}{6} + \frac{n}{2} = 11 \end{cases}$ ，

解关于 m, n 的方程组，得 $\begin{cases} m=18 \\ n=16 \end{cases}$ ，

所以 $\begin{cases} 4x+3y=18 \\ 6x-y=16 \end{cases}$

解方程组，得 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 。

(1) 材料中运用的数学思想是_____；

A. 数形结合思想 B. 整体思想 C. 分类讨论思想 D. 类比思想

(2) 运用上述方法，解方程组 $\begin{cases} (3a-1)+2(b-2)=4 \\ 4(3a-1)-(b-2)=7 \end{cases}$ ；

(3) 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ ，直接写出关于 m, n 的方程组 $\begin{cases} a_1(m+2)-3b_1n=c_1 \\ a_2(m+2)-3b_2n=c_2 \end{cases}$

的解。

(4) 对于有理数 x, y ，定义新运算： $x*y=ax+by+c$ ，其中 a, b, c 是常数，等式右边是通常的加法和乘法运

算。已知 $3*5=15$ $4*7=28$ ，求 $1*1$ 的值。

题型 04 整体思想在含参数的一次方程组中的应用

【典例 1】阅读与思考

“整体思想”是数学解题中的一种重要的思想方法．数学课上，李老师给出了一个问题：已知实数 x, y 满足

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}, \text{求 } x - 4y \text{ 和 } 7x + 5y \text{ 的值.}$$

小明：利用消元法解方程组，得出 x, y 的值后，再分别代入 $x - 4y$ 和 $7x + 5y$ 求值．

小逸：发现两个方程中相同未知数的系数之间的关系，可通过适当变形，整体求得代数式的值， $3x - y = 5$

$$\textcircled{1}, 2x + 3y = 7 \textcircled{2}, \text{由 } \textcircled{1} - \textcircled{2}, \text{可得 } x - 4y = -2, \text{由 } \textcircled{1} + \textcircled{2} \times 2, \text{可得 } 7x + 5y = 19.$$

李老师对两位同学的方法进行点评，指出小逸同学的思路体现了数学中“整体思想”的运用请你参考小逸同

学的做法，解决下面的问题．

$$(1) \text{已知二元一次方程组 } \begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases}, \text{则 } x - y = \underline{\hspace{2cm}}, 5x + 4y = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \text{已知关于 } x, y \text{ 的二元一次方程组 } \begin{cases} 3x + y = 2k + 1 \textcircled{1} \\ x + 3y = k - 1 \textcircled{2} \end{cases}, \text{若方程组的解满足 } x - y = -1, \text{求 } k \text{ 的值.}$$

【典例 2】数学活动：探究不定方程

$$\text{小川, 小渝两位同学在学习方程过程中发现, 三元一次方程组 } \begin{cases} 3x + 2y + z = 9 \textcircled{1} \\ 2x + 3y + 4z = 11 \textcircled{2} \end{cases}, \text{虽然解不出 } x, y, z \text{ 具}$$

体数值，但可以解出， $x + y + z$ 的值．

$$(1) \text{小川的方法：} \textcircled{2} \times 3 - \textcircled{1} \times 2 \text{ 整理可得：} y = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \times 2 \text{ 整理可得：} x = \underline{\hspace{2cm}}; \therefore x + y + z = 4$$

$$\text{小渝的方法：} \textcircled{1} + \textcircled{2} : \underline{\hspace{2cm}}; \therefore x + y + z = 4.$$

(2) 已知 $\begin{cases} 3x + y + 2z = 9 \textcircled{1} \\ x - 3y - z = 3 \textcircled{2} \end{cases}$ ，试求解 $x + y + z$ 的值。

【变式 1】如果方程组 $\begin{cases} 2x + y = k \\ x + 2y = 2k - 3 \end{cases}$ 的解 x 与 y 的和等于 6，则 k 的值为_____。

【变式 2】若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x + y = 2m - 1 \\ x + 2y = m - 4 \end{cases}$ 的解满足 $x - y = 6$ ，则 $m =$ _____。

【变式 3】若关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x + 2y = k - 4 \\ 2x + y = 2k + 1 \end{cases}$ 的解互为相反数，则 k 的值为_____。

【变式 4】【阅读理解】已知方程组 $\begin{cases} 3x - y = 5 \textcircled{1} \\ 2x + 3y = 7 \textcircled{2} \end{cases}$ ，求 $x - 4y$ 的值。本题常规解题思路是，解方程组得

x, y 的值，再代入 $x - 4y$ 得到答案，常规思路运算量比较大。其实，仔细观察方程组中两个方程未知数的

系数之间的关系，本题还可以通过适当变形整体求得代数式的值，如由 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 可得 $x - 4y = -2$ 。这样的解

题思想就是通常所说的“整体思想”。

【模仿应用】已知方程组 $\begin{cases} 3x - y = 5 \textcircled{1} \\ 2x + 3y = 7 \textcircled{2} \end{cases}$ ，请用整体思想求 $7x + 5y$ 的值；

【迁移应用】已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 3x - y = 5 - 3a \\ 2x + 3y = 7 + a \end{cases}$ ，且 $7x + 5y > 21$ ，求 a 的取值范围。

【解决问题】某班级组织活动购买小奖品，买 20 支铅笔， 3 块橡皮和 2 本日记本共需 32 元，买 39 支铅笔，

5 块橡皮和 3 本日记本共需 58 元，求购买 5 支铅笔， 5 块橡皮和 5 本日记本共需多少元？

【备注】若思考后不能运用整体思想，常规思路解决问题也可以。