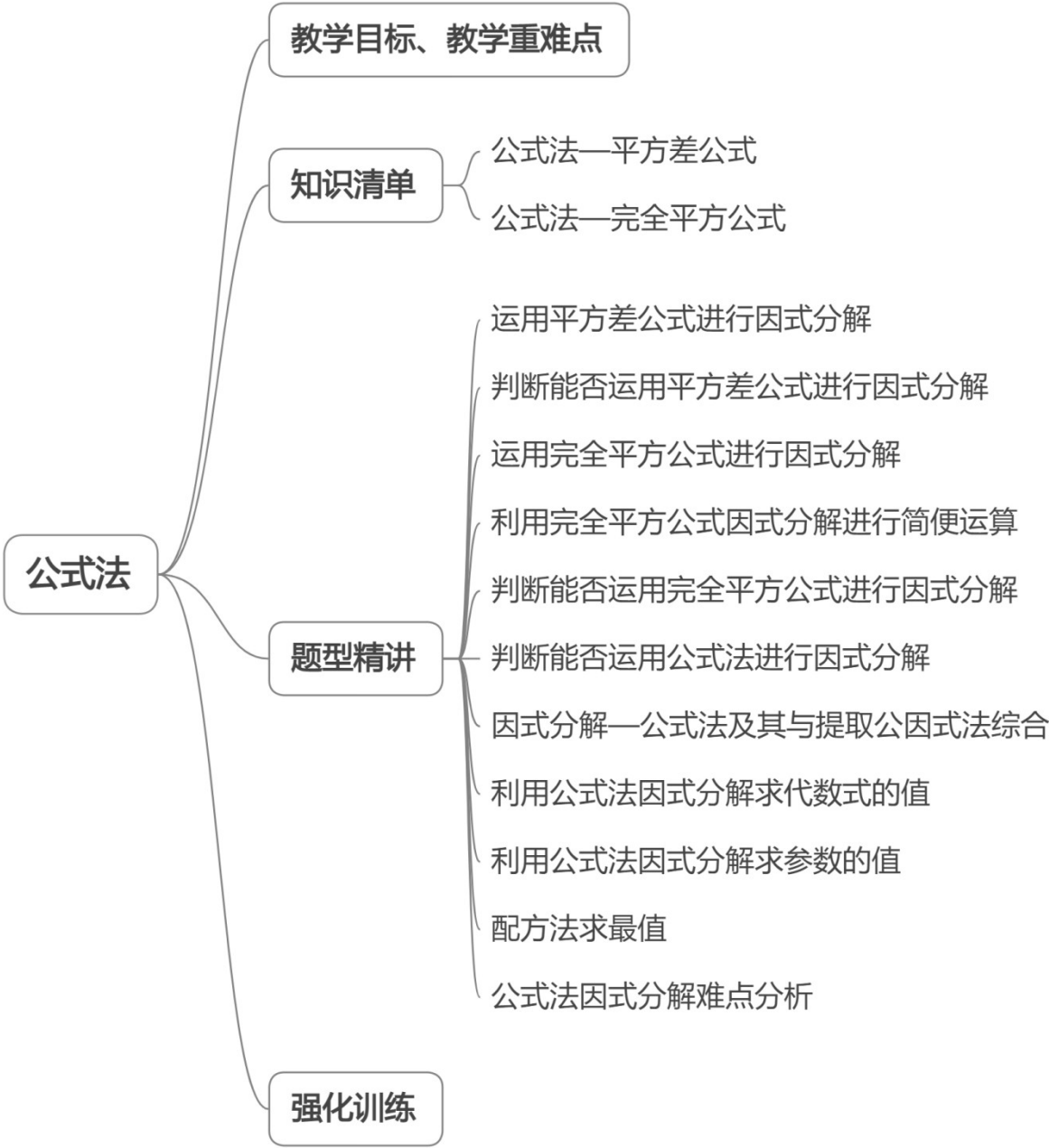


专题 12.2 公式法

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 能用公式法把整式进行因式分解； 2. 会综合用提公因式法和公式法把整式分解因式； 3. 掌握公式法因式分解的应用。
教学重难点	1.重点

	(1) 利用平方差公式、完全平方公式进行分解因式； (2) 学会用公式法因式分解进行简便运算； (3) 利用公式法因式分解求参数的值或代数式的值。 2. 难点 (1) 提取公因式法与公式法因式分解综合； (2) 公式法因式分解的综合应用。
--	---

知识清单

知识点 1 公式法—平方差公式

1. 观察

$a^2 - b^2$ 有什么特征？

由平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, 可得

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

这就将 $a^2 - b^2$ 分解成两个整式的积.

平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 从左到右的变形是整式的乘法, 从右到左的变形是因式分解.

如果一个整式符合平方差公式的特征, 那么就可以用平方差公式把它因式分解.

要点:

(1) 当整式的各项含有公因式时, 通常先提取公因式, 然后再考虑是否能进一步因式分解.

(2) 因式分解要分解到每个因式都不能再分解为止.

【即学即练】

1. 分解因式:

(1) $-9a^2 + b^2$;

(2) $3x^2y - 27y$;

(3) $(3m-1)^2 - (2m-3)^2$.

2. 分解因式:

$$(1) 9x^2 - (x - 2y)^2 .$$

$$(2) -16 + 81x^4$$

3. 下列能用平方差公式因式分解的是 ()

A. $x^2 + 1$

B. $x^2 - 2x + 1$

C. $x^2 + x$

D. $x^2 - 1$

4. 若 $x + y = 2$, 则代数式 $x^2 - y^2 + 4y$ 的值等于_____ .

5. 分解因式 :

$$(1) 4x^2 - 25y^2 ;$$

$$(2) (a + 2)^2 - 1 ;$$

$$(3) -\frac{1}{81} + x^4 ;$$

$$(4) 16(a - b)^2 - 25(a + b)^2 ;$$

$$(5) x^5 - 16x .$$

知识点 2 公式法—完全平方公式

1. 观察

$a^2 + 2ab + b^2$ 、 $a^2 - 2ab + b^2$ 有什么特征?

由完全平方公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 可得 $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

这就将 $a^2 + 2ab + b^2$ 与 $a^2 - 2ab + b^2$ 分别分解成两个相同的整式的积.

完全平方公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 从左到右的变形是整式的乘法, 从右到左的变形是因式分解. 如果一个整式符合完全平方公式的特征, 那么就可以用完全平方公式把它因式分解.

2. 举例分析 :

因式分解 : $9x^2 - 12x + 4$

$$9x^2 - 12x + 4 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 2^2 = (3x - 2)^2 .$$

$$\begin{array}{ccccccc} \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ a^2 & -2 & a & b+b^2 & = & (a & -b)^2 \end{array}$$

要点 :

(1) 完全平方公式的特点：左边是二次三项式，是这两数的平方和加（或减）这两数之积的 2 倍。右边是两数的和（或差）的平方。

(2) 完全平方公式有两个，二者不能互相代替，注意二者的使用条件。

3. 公式法：根据因式分解和整式乘法的关系，可以用平方差公式和完全平方公式将具有特殊形式的整式因式分解。像这样，根据常用的乘法公式将整式因式分解的方法叫作公式法。

4. 因式分解步骤

- (1) 如果整式的各项有公因式，先提取公因式；
- (2) 如果各项没有公因式那就尝试用公式法；
- (3) 如用上述方法也不能分解，那么就选择分组或其它方法来分解。

5. 因式分解注意事项

- (1) 因式分解的对象是整式；
- (2) 最终把整式化成乘积形式；
- (3) 结果要彻底，即分解到不能再分解为止。

【即学即练】

1. 下列各式能够用完全平方公式因式分解的是 ()

- A. $4x^2 + 1$
- B. $4x^2 + 4x + 1$
- C. $4x^2 + 4x - 1$
- D. $4x^2 - 4x - 1$

2. 将下列各式因式分解：

(1) $x^2 + 8x + 16$ ；

(2) $(x+y)^2 - 8(x+y) + 16$ ；

(3) $y^2 - y + \frac{1}{4}$ ；

(4) $-6a + 9a^2 + 1$ 。

3. $1 - 6(a-1) + 9(a-1)^2$

4. 因式分解： $4(x+y)^2 - 20(x+y) + 25$

5. 若 $a+b=-1$ ，则 $a^2 + 2ab + b^2 =$ _____。

6. 若 $a+b=3$ ，则 $2a^2 + 4ab + 2b^2 - 6$ 的值为 ()

- A. 12
- B. 6
- C. 3
- D. 0

题型精讲

题型 01 运用平方差公式进行因式分解

【典例 1】. 因式分解： $x^2 - 4y^2 =$ _____.

【变式 1】. 将下列整式分解因式：

(1) $a^2 - \frac{1}{25}b^2$

(2) $9a^2 - 4b^2$

(3) $-1 + 36b^2$

【变式 2】. 分解因式： $(x - 2y)^2 - 4x^2$.

【变式 3】. 因式分解：

(1) $4a^2 - 16$;

(2) $(x^2 + 4)^2 - 16x^2$.

题型 02 判断能否运用平方差公式进行因式分解

【典例 1】. 下列整式中，能运用平方差公式分解因式的是 ()

A. $a^2 + b^2$

B. $2a - b^2$

C. $4a^2 - b^2$

D. $-a^2 - b^2$

【变式 1】. 下列各式能用平方差公式进行因式分解的是 ()

A. $x^2 + 4y^2$

B. $x^2 + 4xy + 4y^2$

C. $x^2 - 4y$

D. $x^2 - 4y^2$

【变式 2】. 判断下列不能运用平方差公式因式分解的是 ()

A. $m^2 + 4$

B. $x^2 - y^2$

C. $x^2y^2 - 1$

D. $(m - a)^2 - (m + a)^2$

题型 03 运用完全平方公式进行因式分解

【典例 1】. 分解因式： $a^2 + 2a + 1 =$ _____.

【变式 1】. 因式分解： $x^2y^2 - 2xy + 1 =$ __

【变式 2】. 把下列各式因式分解：

$$(1) a^2 + 8a + 16 ;$$

$$(2) -4mn - 4m^2 - n^2 ;$$

$$(3) (a+2b)^2 + 6(a+2b) + 9 ;$$

$$(4) (x-1)(x-3) + 1 .$$

【变式3】 . 分解因式：

$$(1) 4a^2 - 20ab + 25b^2 ;$$

$$(2) 9(a-b)^2 + 42(a-b) + 49 .$$

题型 04 利用完全平方公式因式分解进行简便运算

【典例1】 . 用简便方法计算：

$$(1) 204^2 + 204 \times 192 + 96^2 ;$$

$$(2) 40 \times 3.5^2 + 80 \times 3.5 \times 1.5 + 40 \times 1.5^2 .$$

【变式1】 . 用简便方法计算：

$$(1) 2\,023^2 - 4\,044 \times 2\,023 + 2\,022^2 ;$$

$$(2) 20 \times 11.5^2 - 40 \times 11.5 \times 9.5 + 20 \times 9.5^2 .$$

题型 05 判断能否运用完全平方公式进行因式分解

【典例1】 . 下列各式中，能用完全平方公式进行因式分解的是 ()

A . $x^2 - 1$

B . $x^2 + 2x - 1$

C . $x^2 + x + 1$

D . $4x^2 + 4x + 1$

【变式1】 . 下列各式：① $a^2 + 2a + 4$ ；② $a^2 + 2a - 1$ ；③ $a^2 + 2a + 1$ ；④ $-a^2 + 2a + 1$ ；⑤ $-a^2 - 2a - 1$ ；⑥

$a^2 - 2a - 1$. 其中能用完全平方公式进行因式分解的有 ()

A . 2个

B . 3个

C . 4个

D . 5个

题型 06 判断能否运用公式法进行因式分解

【典例1】 . 下列整式中，不能用公式法进行因式分解的是 ()

A . $a^2 + a - \frac{1}{4}$

B . $-a^2 - b^2 + 2ab$

C . $-a^2 + 25b^2$

D . $4 - 9b^2$

【变式 1】 . 下列整式不能用公式法因式分解的是 ()

- A . $a^2 - 8a + 16$ B . $a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{16}$ C . $-a^2 - 9$ D . $a^2 - 4$

【变式 2】 . 运用公式法将下列各式因式分解，错误的是 ()

A . $4m^2 - \frac{9}{25}n^2 = \left(2m + \frac{3}{5}n\right)\left(2m - \frac{3}{5}n\right)$ B . $-n^2 + (5m - 2n)^2 = (5m - n)(5m - 3n)$

C . $9x^2 - 3xy + \frac{1}{4}y^2 = \left(3x - \frac{1}{2}y\right)^2$ D . $4m^2 + 50mn + 25n^2 = (2m + 5n)^2$

题型 07 因式分解—公式法及其与提取公因式法综合

【典例 1】 . 因式分解：

(1) $n^2(m - 2) + 4(2 - m)$

(2) $2x^2 - 8$

(3) $4a^2 - 12ab + 9b^2$

(4) $m^2 - 14m + 49$

【变式 1】 . 因式分解

(1) $a^2b - 2ab^2 + ab$;

(2) $2ax^2 - 4axy + 2ay^2$;

(3) $a^2(x - y) + 16(y - x)$;

(4) $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$.

【变式 2】 . 因式分解：

(1) $-2x^2 + 2x - \frac{1}{2}$;

(2) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2$.

(3) $(3x + 2y)^2 - (2x + 3y)^2$;

(4) $a^2(a - b)^2 - b^2(b - a)^2$.

【变式3】 . 因式分解：

$$(1) x^4 - 81y^4 ;$$

$$(2) a^2 - 2a(b+c) + (b+c)^2 ;$$

$$(3) x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4 ;$$

$$(4) 9(x+2y)^2 - 4(x-y)^2 ;$$

$$(5) (a^2 + 4)^2 - 16a^2 ;$$

$$(6) p^2 - 2pq + q^2 - k^2 ;$$

$$(7) 4x^2 - y^2 - 1 + 2y .$$

题型 08 利用公式法因式分解求代数式的值

【典例1】 . 若 $a-b=2$, 则 a^2-b^2-4b 的值是_____ .

【变式1】 . 若 $x-y-9=0$, 则代数式 x^2-y^2-18y 的值为_____ .

【变式2】 . 若 $y-x=-1$, $xy=4$, 则代数式 $-\frac{1}{2}x^3y+x^2y^2-\frac{1}{2}xy^3$ 的值是_____ .

【变式3】 . 先因式分解, 然后计算求值:

$$(1) x^4 + 4x^3y + 4x^2y^2, \text{ 其中 } x=1, y=\frac{1}{2} .$$

$$(2) \frac{1}{2}x^3y - x^2y^2 + \frac{1}{2}xy^3, \text{ 其中 } x-y=-2, xy=8 .$$

题型 09 利用公式法因式分解求参数的值

【典例1】 . 如果 $100x^2+kxy+49y^2$ 能分解为 $(10x-7y)^2$, 那么 $k=$ _____ .

【变式1】 . 若整式 $4x^2-nxy+y^2$ 能用完全平方公式因式分解, 则 n 的值是_____ .

【变式2】 . 若将 $(2x)^n - 625$ 分解成 $(4x^2+25)(2x+5)(2x-5)$, 则 n 的值是 _____ .

题型 10 配方法求最值

【典例1】 . 【阅读材料】

把代数式通过配凑等手段, 得到局部完全平方式 (两数和的平方公式或两数差的平方公式) , 再进行有关

运算和解题，这种解题方法叫做配方法．配方法在因式分解、最值问题中都有着广泛的应用．

例如：

①用配方法因式分解： $a^2 + 6a + 8$

$$\text{原式} = a^2 + 6a + 9 - 1 = (a + 3)^2 - 1 = (a + 3 + 1)(a + 3 - 1) = (a + 4)(a + 2)$$

②求 $2x^2 + 12x + 22$ 的最小值．

$$\text{解：} 2x^2 + 12x + 22 = 2(x^2 + 6x + 11)$$

先求出 $x^2 + 6x + 11$ 的最小值

$$x^2 + 6x + 11 = x^2 + 6x + 9 + 2 = (x + 3)^2 + 2;$$

由于 $(x + 3)^2$ 是非负数，所以 $(x + 3)^2 \geq 0$ ，可得到 $(x + 3)^2 + 2 \geq 2$ ，即 $x^2 + 6x + 11$ 的最小值为2．

进而 $2x^2 + 12x + 22$ 的最小值为4．

【知识应用】

请根据上述材料解决下列问题：

(1)在横线上添上一个常数项使之成为完全平方式： $a^2 + 8a + \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2)用配方法因式分解： $a^2 + 10a + 16$ ；

(3)求 $3x^2 - 12x + 15$ 的最小值．

【变式1】．我们把整式 $a^2 + 2ab + b^2$ 和 $a^2 - 2ab + b^2$ 叫作完全平方式．如果一个整式不是完全平方式，我们常做如下变形：先添加一个适当的项，使式子中出现完全平方式，再减去这个项，使整个式子的值不变，这种方法叫作配方法．配方法是一种重要的解决问题的数学方法，不仅可以将一个看似不能分解的整式分解因式，还能解决一些与非负数有关的问题或求代数式的最大值、最小值等．

$$\text{例如：分解因式 } x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x + 1)^2 - 4 = (x + 1 + 2)(x + 1 - 2) = (x + 3)(x - 1).$$

例如：求整式 $2x^2 + 4x - 6$ 的最小值，由 $2x^2 + 4x - 6 = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 6 = 2(x + 1)^2 - 8$ 可知，当 $x = -1$ 时，整式 $2x^2 + 4x - 6$ 有最小值，最小值是-8．

根据阅读材料用配方法解决下列问题：

(1)分解因式： $m^2 - 4m - 5 = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

(2)当 a, b 为何值时，整式 $a^2 + b^2 - 4a + 6b + 18$ 有最小值？并求出这个最小值．

(3) 当 a, b 为何值时，整式 $a^2 - 2ab + 2b^2 - 4b + 27$ 有最小值？并求出这个最小值。

题型 11 公式法因式分解难点分析

【典例 1】. 已知 a, b, c 满足 $a^2 + 2b = 7, b^2 - 2c = -1, c^2 - 6a = -17$ ，则 $a + b - c$ 的值为 ()

- A. 1 B. -5 C. -6 D. -7

【变式 1】. 已知正数 a, b 满足 $a^3b + ab^3 - 2a^2b + 2ab^2 = 7ab - 8$ ，则 $a^2 - b^2 = ()$

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 不能确定

【变式 2】. 已知三个实数 a, b, c 满足 $a + b + c \neq 0, a^2 + b^2 = c^2, a^2 = b^2 + c^2$ 则下列结论一定成立的是 () .

- A. $a + b = 0$ B. $a + c = 0$ C. $b + c = 0$ D. $b^2 - 4ac < 0$

强化训练

一、单选题

1. 下列各式中能用平方差公式进行因式分解的是 ()

- A. $x^2 + x + 1$ B. $x^2 + 2x - 1$ C. $x^2 - 1$ D. $x^2 - 2x + 1$

2. 下列各式中能用完全平方公式分解因式的是 ()

- A. $-\frac{1}{4}m^2 - 3mn - 9n^2$ B. $x^6 - 8x^3 - 16$

- C. $2xy - x^2 + y^2$ D. C. $x^2 - x + 1$

3. 下列因式分解不正确的是 ()

- A. $3a^2b - 6ab + 3b = 3b(a - 1)^2$
 B. $-4b^2 + 36a^2 = 4(3a + b)(3a - b)$
 C. $x^2(a - b) - 4(b - a) = (a - b)(x + 2)(x - 2)$
 D. $(a^2 + 1)^2 - 4a^2 = (a + 1)^2(a - 1)^2$

4. 因式分解 $4x^2 + 4x + 1 = ()$

- A. $4x(x + 1) + 1$ B. $(4x + 1)^2$ C. $(2x + 1)^2$ D. $(2x - 1)^2$

5. 已知 $9x^2 - mxy + 16y^2$ 能运用完全平方公式分解因式，则 m 的值为 ()

- A. 12 B. ± 12 C. 24 D. ± 24

6. 已知 $x - 2y - 4 = 0$, 则 $2x^2 - 8xy + 8y^2$ 的值为 ()

- A . 8 B . 16 C . 50 D . 32

7. 李明喜欢密码编译, 在他的密码手册中, 有这样一条信息: $x - y$, $a - b$, $x^2 - y^2$, 4 , $x + y$, $a + b$ 分别对应下列六个字: 国, 爱, 美, 我, 中, 丽, 现将 $4a(x^2 - y^2) - 4b(x^2 - y^2)$ 因式分解, 结果呈现的密码信息可能是 ()

- A . 美丽中国 B . 我爱中国 C . 我爱美 D . 我爱美丽

8. 已知 $a = m + 2024$, $b = m + 2025$, $c = m + 2026$, 则代数式 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$ 的值为 ()

- A . 5 B . 6 C . 3 D . 8

二、填空题

9. 因式分解: $3m^2 - 75 = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 利用平方差公式计算: $2005^2 - 2003^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 分解因式: $ab^2 - 2ab + a = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 因式分解: $x^2 - x + \frac{1}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$

13. 因式分解: $3x^4 - 48 = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知正方形的面积是 $(y^2 + 8y + 16)m^2$, 则正方形的边长为 $\underline{\hspace{2cm}}$ m . ($y > -4$)

15. 若 $a^2 - b^2 = \frac{1}{16}$, $a + b = -\frac{1}{4}$, 则 $a - b$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知 $A = x^2 + 6y + 1$, $B = -y^2 + 2x - 9$, 且 $x \neq 1$, $y \neq -3$, 则 A , B 的大小关系为 A $\underline{\hspace{2cm}}$ B . (填“>”“=”或“<”)

三、解答题

17. 因式分解:

(1) $x^4 - 81y^4$;

(2) $a^2 - 2a(b + c) + (b + c)^2$;

(3) $x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4$;

(4) $9(x + 2y)^2 - 4(x - y)^2$;

$$(5)(a^2 + 4)^2 - 16a^2 ;$$

$$(6)p^2 - 2pq + q^2 - k^2 ;$$

$$(7)4x^2 - y^2 - 1 + 2y .$$

18. 计算下列各式的值，其中 $x - y = 1$, $xy = 2$

$$(1)x^3y - 2x^2y^2 + xy^3$$

$$(2)x^2 + y^2$$

19. 阅读下面材料，并仿照其解题方法解决问题 .

因式分解： $(x + y)^2 + 2(x + y) + 1$.

解：将“ $x + y$ ”看成整体，令 $x + y = A$.

$$\text{原式} = A^2 + 2A + 1 = (A + 1)^2 .$$

再将“ A ”还原，原式 $= (x + y + 1)^2$.

上述解题过程用到的是“整体思想”，整体思想是数学解题中常用的一种思想方法 .

$$(1)\text{因式分解：} a^2 - 4ab + 4b^2 - 9 ;$$

(2)说明：若 n 为正整数，则式子 $(n^2 - n)(n^2 - n + 2) + 1$ 的值一定是某个整数的平方 .

20. 阅读下面材料，在代数式中，我们把一个二次整式化为一个完全平方式与一个常数的和的方法叫做配方法 . 配方法是一种重要的解决问题的数学方法，它不仅可以将一个看似不能分解的整式因式分解，还能求代数式最大值，最小值等问题 .

例如：求代数式： $x^2 - 12x + 2020$ 的最小值 .

$$\text{解：原式} = x^2 - 12x + 6^2 - 6^2 + 2020$$

$$= (x - 6)^2 + 1984$$

$$\because (x - 6)^2 \geq 0 ,$$

$\therefore$ 当 $x = 6$ 时， $(x - 6)^2$ 的值最小，最小值为 0，

$$\therefore (x - 6)^2 + 1984 \geq 1984 ,$$

$\therefore$ 当 $(x - 6)^2 = 0$ 时， $(x - 6)^2 + 1984$ 的值最小，最小值为 1984，

$\therefore$ 代数式： $x^2 - 12x + 2020$ 的最小值是 1984 .

例如：分解因式： $x^2 - 120x + 3456$

解：原式 $= x^2 - 2 \times 60x + 60^2 - 60^2 + 3456$

$$= (x - 60)^2 - 144$$

$$= (x - 60)^2 - 12^2$$

$$= (x - 60 + 12)(x - 60 - 12)$$

$$= (x - 48)(x - 72)$$

(1) 分解因式 $x^2 - 46x + 520$ ；

(2) 若 $y = -x^2 + 2x + 1313$ ，求 y 的最大值；

21. 数学活动课上，老师准备了若干个如图 1 的三种纸片， A 种纸片是边长为 a 的正方形， B 种纸片是边长为 b 的正方形， C 种纸片是长为 b 、宽为 a 的长方形。用 A 种纸片一张， B 种纸片一张， C 种纸片两张可拼成如图 2 的大正方形。

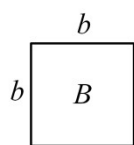
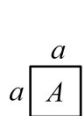


图1

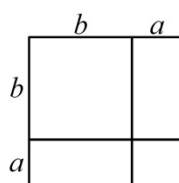
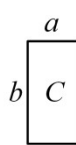


图2

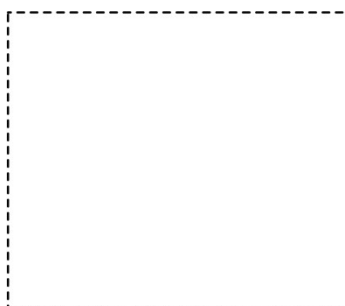


图3

(1) 图 2 大正方形的面积既可以表示为_，又可以表示为_，所以可得等式_____。

(2) 请利用 A 型， B 型， C 型若干张拼出一个面积为 $2a^2 + 3ab + b^2$ 的长方形，并在图 3 的方框中画出示意图。

研究拼图发现可将 $2a^2 + 3ab + b^2$ 因式分解为_____。