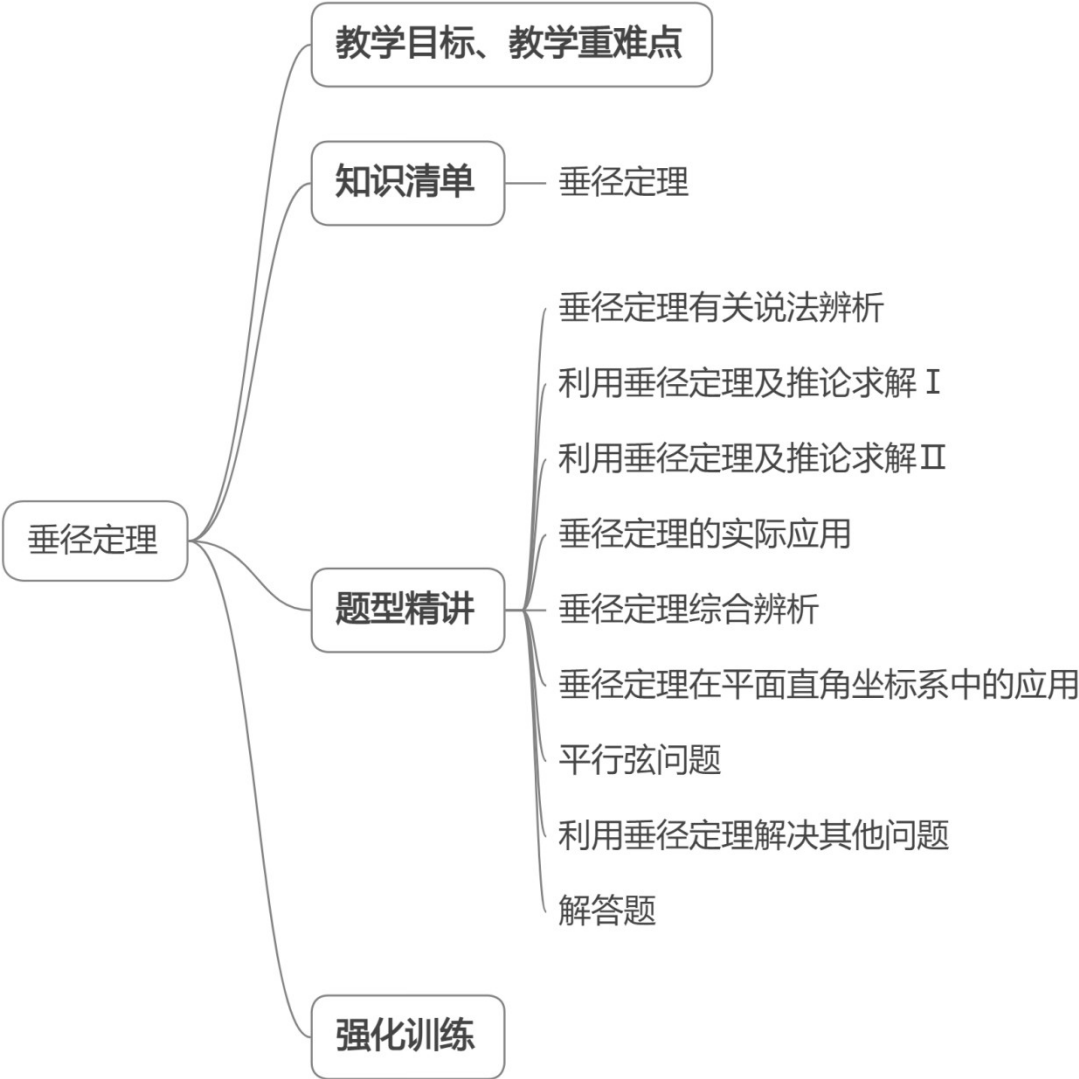


专题 27.3 垂径定理

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 了解垂径定理的内容及证明； 2. 掌握从垂径定理的推论及证明； 3. 学会有关垂径定理的作图；会解有关实际应用题。
教学重难点	1.重点 (1) 垂径定理的内容及证明；垂径定理的推论及证明；

- (2) 垂径定理，“知二求二”；
- (3) 利用垂径定理求解圆中的几何问题。
2. 难点
- (1) 垂径定理与锐角的三角比综合；
- (2) 垂径定理的综合应用。

知识清单

知识点 1 垂径定理

一、垂径定理

如图 27-17, CD 是 $\odot O$ 的直径, AB 是 $\odot O$ 的弦, $AB \perp CD$, 垂足是点 M , 那么线段 AM 与 BM 是否相等? $\widehat{AD}$ 与 $\widehat{BD}$ 是否相等? $\widehat{AC}$ 与 $\widehat{BC}$ 呢?

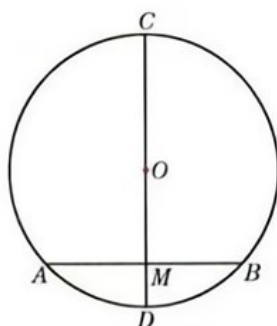


图 27-17

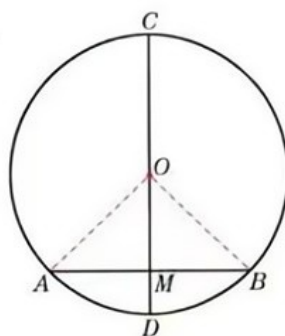


图 27-18

利用圆是轴对称图形的性质, 可知以 CD 为折痕将 $\odot O$ 翻折后 A 、 B 两点能重合, 上面问题的结论是肯定的. 现在我们用推理的方法来证明.

证明: 如图 27-18, 分别联结 OA 、 OB .

$$\because OA = OB, OM \perp AB,$$

$$\therefore AM = BM;$$

$$\angle AOD = \angle BOD, \text{ 得 } \widehat{AD} = \widehat{BD}.$$

又 $\because CD$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \widehat{CAD} = \widehat{CBD},$$

$$\text{即 } \widehat{AD} + \widehat{AC} = \widehat{BD} + \widehat{BC}.$$

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BC}.$$

我们得到了圆的一个性质定理:

垂径定理 如果圆的一条直径垂直于一条弦, 那么这条直径平分这条弦, 并且平分这条弦所对的弧。

要点: 垂径定理指出了圆的直径与弦及弦所对的弧之间的关联, 即由直径“垂直”于弦得到“平分”弦(弧).

二、垂径定理的推论 1

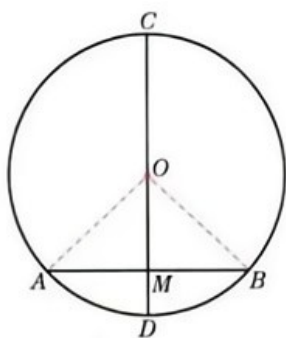


图 27-21

问题 1

如图 27-21, CD 是 $\odot O$ 的直径, AB 是弦(不是直径), CD 与 AB 交于点 M .

(1) 如果 $AM=BM$, 那么 CD 与 AB 垂直吗?

(2) 如果 $\widehat{AD}=\widehat{BD}$, 那么 CD 与 AB 垂直吗?

在图 27-21 中, 分别联结 OA 、 OB , 得 $\triangle AOB$ 是等腰三角形. 利用等腰三角形的“三线合一”性质, 可推出 CD 与 AB 垂直.

由此归纳得到以下结论:

如果圆的直径平分弦(这条弦不是直径), 那么这条直径垂直于这条弦, 并且平分这条弦所对的弧,

如果圆的直径平分弧, 那么这条直径就垂直平分这条弧所对的弦。

在圆中, 圆心到弦的两个端点的距离都等于圆的半径, 由线段垂直平分线定理的逆定理, 可知圆心一定在弦的垂直平分线上. 于是得到:

如果一条直线是弦的垂直平分线, 那么这条直线经过圆心, 并且平分这条弦所对的弧。

三、垂径定理的推论 2

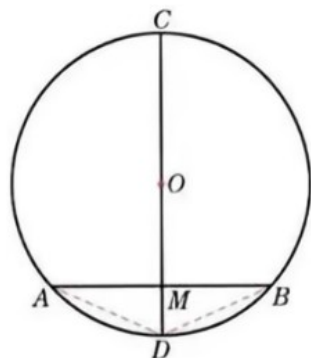


图 27-22

问题 2

如图 27-22, 在 $\odot O$ 中, 弦 CD 与弦 AB 交于点 M .

(1) 如果 $AM=BM$, $\widehat{AD}=\widehat{BD}$, 那么 CD 与 AB 垂直吗?

(2) 如果 $CD \perp AB$, 垂足为点 M , $\widehat{AD}=\widehat{BD}$, 那么 AM 与 BM 相等吗?

问题中的条件有“弧相等”, 可知它们“所对的弦相等”, 如图 27-22, 分别联结 AD 、 BD , 得 $AD=BD$, 则 $\triangle DAB$ 是等腰三角形, 再利用等腰三角形的“三线合一”性质, (1) 可由 $AM=BM$, 推出

$CD \perp AB$; (2) 可由 $CD \perp AB$, 推出 $AM=BM$. 这时还可以进一步看到, CD 垂直平分弦 AB , 因此 CD 一定经过圆心 O .

由此得到以下结论:

如果一条直线平分弦和弦所对的一条弧, 那么这条直线经过圆心, 并且垂直于这条弦。

如果一条直线垂直于弦, 并且平分弦所对的一条弧, 那么这条直线经过圆心, 并且平分这条弦。

总结上面的讨论, 可以概括为:

在圆中, 对于某条直线“经过圆心”、“垂直于弦”、“平分弦”、“平分弦所对的弧”这四组关系中, 如果有两组关系成立, 那么其余两组关系也成立,

四、垂径定理的有关作图

例 已知 $\widehat{AB}$, 用直尺和圆规平分这条弧.

作法 如图 27-24,

1.联结 AB .

2.作线段 AB 的垂直平分线 MN ,垂足为点 C , MN 交 $\widehat{AB}$ 于点 D .

$\widehat{AB}$ 被点 D 平分.

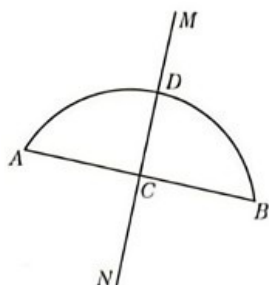


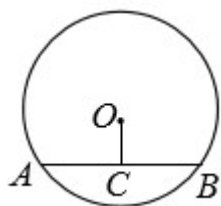
图 27-24

【即学即练】

1. 下列说法正确的是 ()

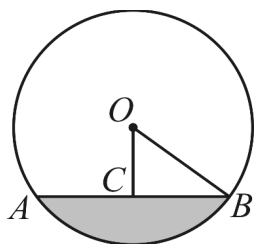
- A. 过弦的中点的直线平分弦所对的两条弧
- B. 弦的垂直平分线平分它所对的两条弧, 但不一定过圆心
- C. 过弦中点的直径平分弦所对的两条弧
- D. 平分弦所对的两条弧的直线平分弦

2. 如图, 在 $\odot O$ 中, $OC \perp AB$ 于点 C , 若 $\odot O$ 的半径为 10, $OC = 5$, 则弦 AB 的长为 ()



- A. $5\sqrt{3}$ B. $10\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{5}$ D. $10\sqrt{5}$

3. 如图, 一根排水管的横截面如图所示, 已知排水管的横截面圆的半径 $OB = 5$, 圆心 O 到水面的距离 OC 是 3, 则水面的宽 AB 是 ()

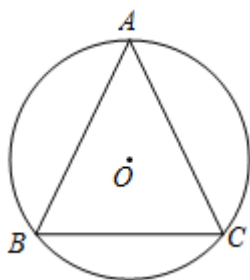


- A . 4 B . 6 C . 8 D . 10

4 . 已知 $\odot O$ 的直径 $AB=10$ ，弦 $CD \perp AB$ 于点 M ，若 $OM : OA=3 : 5$ ，则弦 AC 的长度 () .

- A . $2\sqrt{5}$ B . $4\sqrt{5}$ C . 3 D . $2\sqrt{5}$ 或 $4\sqrt{5}$

5 . 如图， $\odot O$ 的半径为10cm， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ，圆心 O 在 $\triangle ABC$ 内，如果 $AB=AC$ ， $BC=12$ cm，那么 $\triangle ABC$ 的面积为 _____ cm^2 .



6 . 已知弦 AB 与弦 CD 是 $\odot O$ 内两条互相垂直的弦，相交于圆内一点 P ，圆的半径为5，弦 AB 与弦 CD 长均为8，则 OP 的长是 ()

- A . $\frac{9}{2}$ B . $3\sqrt{3}$ C . $3\sqrt{2}$ D . 4

题型精讲

题型 01 垂径定理有关说法辨析

【典例 1】 . 下列命题中，假命题是 ()

- A . 垂直平分弦的直线经过圆心； B . 平分弦的直径垂直这条弦；
C . 平分弦和弦所对弧的直线经过圆心； D . 平分弦所对弧的直径垂直这条弦

【变式 1】 . 下列命题中正确的是 ()

- A . 垂直于弦的直线平分这条弦 B . 平分弦的直径垂直于这条弦
C . 平分弧的直线垂直于弧所对的弦 D . 平分弦所对的两条弧的直线平分这条弦

【变式 2】 . 下列命题中，假命题是 ()

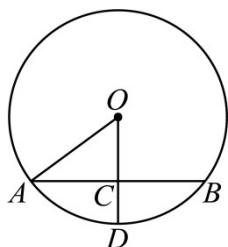
- A . 如果圆的一条直径垂直于一条弦，那么这条直径平分这条弦
B . 如果圆的一条直径平分一条弦，那么这条直径垂直这条弦

C. 如果一条直线垂直平分一条弦，那么这条直线一定经过圆心

D. 如果一条直线垂直于弦，并且平分弦所对的一条弧，那么这条直线平分这条弦

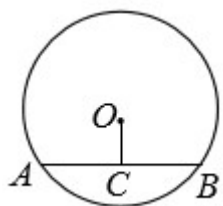
题型 02 利用垂径定理及推论求解

【典例 1】. 如图，在 $\odot O$ 中， $OD \perp AB$ ， $AB = 8$ ， $CD = 2$ ，则 OA 的长为 ()



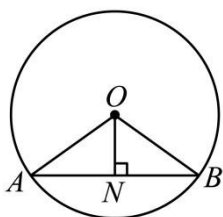
- A. 5 B. 3 C. 4 D. 6

【变式 1】. 如图，在 $\odot O$ 中， $OC \perp AB$ 于点 C ，若 $\odot O$ 的半径为 10， $OC = 5$ ，则弦 AB 的长为 ()



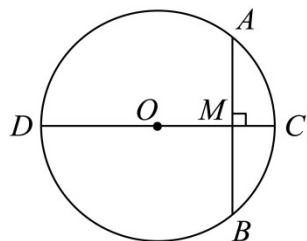
- A. $5\sqrt{3}$ B. $10\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{5}$ D. $10\sqrt{5}$

【变式 2】. 如图， $\odot O$ 的半径为 5， $ON \perp AB$ ，垂足为 N ， $ON = 3$ ，则弦 AB 的长度是 ()



- A. 4 B. $4\sqrt{3}$ C. 8 D. $8\sqrt{3}$

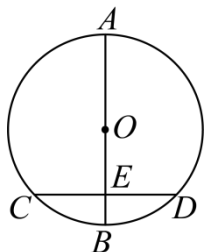
【变式 3】. 如图， CD 是 $\odot O$ 的直径， $AB \perp CD$ 于点 M 。若 $AB = 8$ ， $MC = 2$ ，则 OM 长是 ()



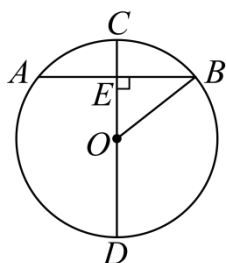
- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

题型 03 利用垂径定理及推论求解II

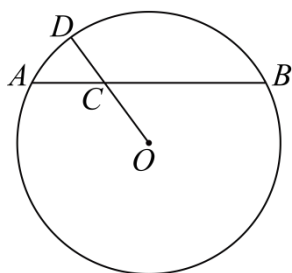
【典例 1】. 如图，在圆 O 中，直径 $AB = 10$ ，弦 CD 交 AB 于点 E ，且 $CE = DE$ ，若 $BE = 2$ ，则 $CD =$ __



【变式 1】. 如图， $\odot O$ 的直径 CD 垂直弦 AB 于点 E ，且 $CE = 2\text{cm}$ ， $DE = 8\text{cm}$ ，则弦 $AB =$ _____ cm .

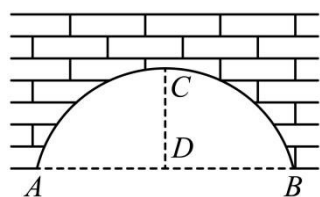


【变式 2】. 如图， AB 是 $\odot O$ 的弦， C 是 AB 的三等分点，连接 OC 并延长交 $\odot O$ 于点 D . 若 $OC = 3$ ， $CD = 2$ ，则圆心 O 到弦 AB 的距离是_____ .



题型 04 垂径定理的实际应用

【典例 1】. 如图，圆弧形桥拱的跨度 $AB = 16$ 米，拱高 $CD = 4$ 米，则拱桥的半径为 ()



A . 3 米

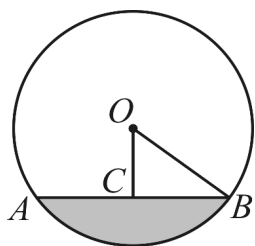
B . 10 米

C . 12 米

D . 20 米

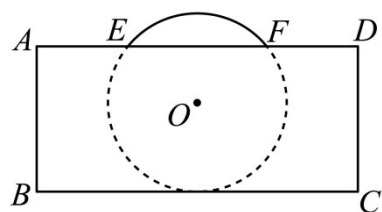
【变式 1】. 如图，一根排水管的横截面如图所示，已知排水管的横截面圆的半径 $OB = 5$ ，圆心 O 到水面

的距离 OC 是 3，则水面的宽 AB 是 ()



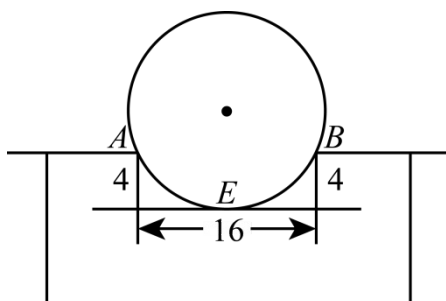
- A . 4 B . 6 C . 8 D . 10

【变式 2】 . 把球放在长方体纸盒内，球的一部分露出盒外，其截面如图，已知 $EF = CD = 8\text{cm}$ ，则球的半径长是 ()



- A . 4cm B . 5cm C . 6cm D . 8cm

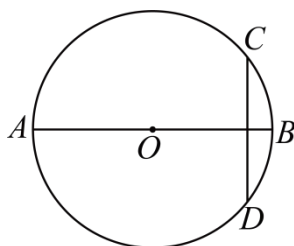
【变式 3】 . 如图的工件槽的两个底角均为 90° ，尺寸如图（单位 cm ），将形状规则的圆形铁片（如图所示）放入槽内，若同时有 A, B, E 三个接触点，则该圆形铁片的半径是 ()



- A . 10cm B . 12cm C . 18cm D . 20cm

题型 05 垂径定理综合辨析

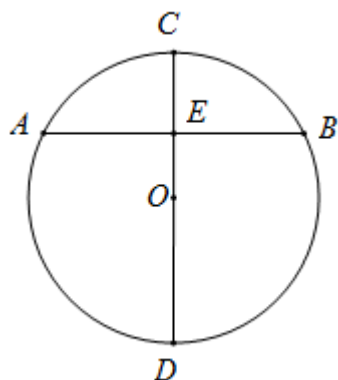
【典例 1】 . 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 B 是弧 CD 的中点。下列结论错误的是 ()



- A . 点 A 是弧 CAD 的中点 B . $AB \perp CD$

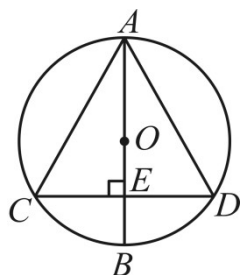
- C. AB 平分 CD D. CD 平分 AB

【变式 1】 . 如图，点 A, B, C, D 在圆上，弦 AB 和 CD 交于点 E ，则下列说法正确的是 ()



- A. 若 CD 平分 AB ，则 $CD \perp AB$ B. 若 $CD \perp AB$ ，则 CD 平分 AB
C. 若 CD 垂直平分 AB ，则圆心在 CD 上 D. 若圆心在 CD 上，则 CD 垂直平分 AB

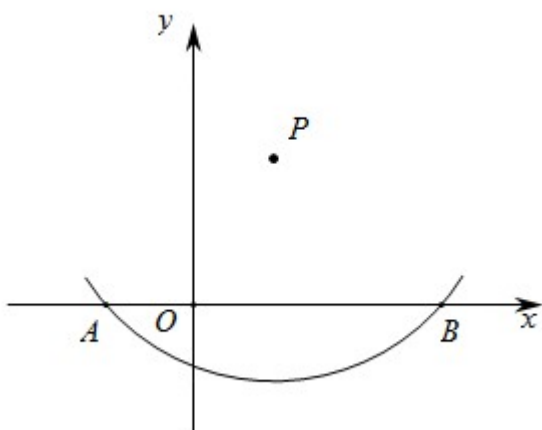
【变式 2】 . 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， CD 为弦， $CD \perp AB$ 于点 E ，连接 AC, AD ，则下列结论正确的是 ()



- A. $AC = BC$ B. $BC = BD$
C. $OE = BE$ D. $\angle CAD = \angle CDA$

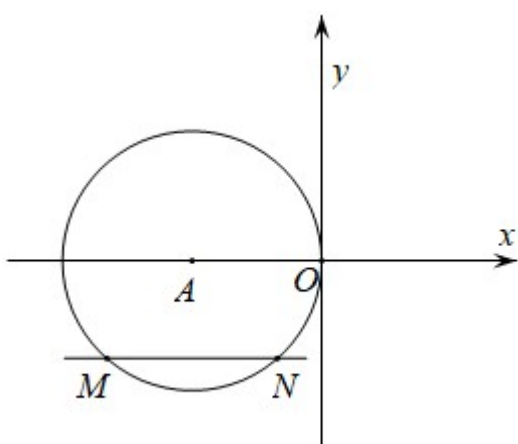
题型 06 垂径定理在平面直角坐标系的应用

【典例 1】 . 如图，在直角坐标系中，以点 P 为圆心的弧与 x 轴交于 A, B 两点，已知点 P 的坐标为 $(1, y)$ ，点 A 的坐标为 $(-1, 0)$ ，那么点 B 的坐标为_____.



【变式1】 . 在直角坐标系中，以点 P 为圆心的弧与 x 轴交于 A 、 B 两点，已知点 P 的坐标为 $(1, y)$ ，点 A 的坐标为 $(-1, 0)$ ，那么点 B 的坐标为_____ .

【变式2】 . 如图，在平面直角坐标系中， $\odot A$ 与 y 轴相切于原点 O ，平行于 x 轴的直线交 $\odot A$ 于 M 、 N 两点，若点 M 的坐标是 $(-8, -4)$ ，则点 N 的坐标为 ()



- A . $(-2, -4)$ B . $(-1, -4)$ C . $(-3, -4)$ D . $(-1.5, -4)$

题型 07 平行弦问题

【典例1】 . $\odot O$ 的半径是 10，弦 $AB \parallel CD$ ， $AB = 16$ ， $CD = 12$ ，则弦 AB 与 CD 的距离是 ()

- A . 2 B . 14 C . 2 或 14 D . 7 或 1

【变式1】 . 已知 $\odot O$ 的半径为 13cm，弦 $AB \parallel CD$ ， $AB = 24\text{cm}$ ， $CD = 10\text{cm}$ ，则 AB ， CD 之间的距离为 ()

- A . 17cm B . 7cm C . 12cm D . 17cm 或 7cm

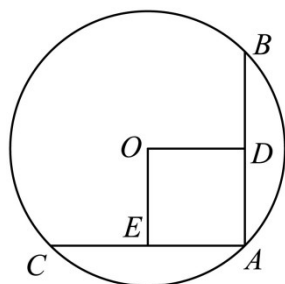
【变式2】 . 已知在 $\odot O$ 中两条平行弦 $AB \parallel CD$ ， $AB = 12$ ， $CD = 16$ ， $\odot O$ 的半径是 10，则 AB 与 CD 间

的距离是 ()

- A . 6 或 12 B . 2 或 14 C . 6 或 14 D . 2 或 12

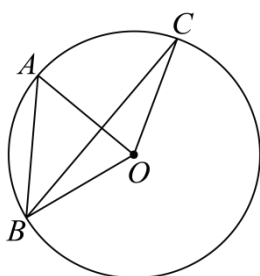
题型 08 利用垂径定理理解其他问题

【典例 1】 . 如图，在 $\odot O$ 中，弦 AB ， AC 互相垂直， D ， E 分别为 AB ， AC 的中点，则四边形 $OEAD$ 是 ()



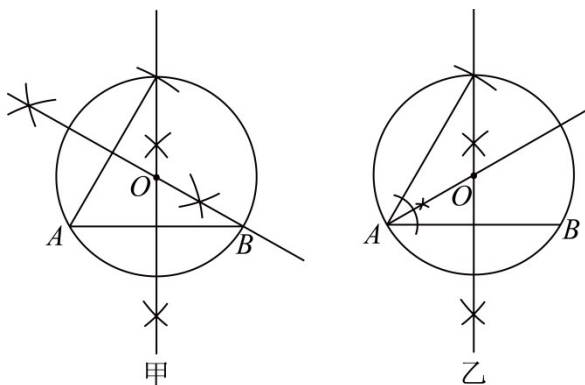
- A . 梯形 B . 矩形 C . 菱形 D . 正方形

【变式 1】 . 如图，点 A, B, C 在 $\odot O$ 上，点 A 是 $\widehat{BC}$ 中点，若 $\angle ABC = 35^\circ$ ，则 $\angle BCO$ 的度数为 ()



- A . 10° B . 15° C . 20° D . 25°

【变式 2】 . 已知线段 $AB = \sqrt{3}r$ ，如图，甲和乙两位同学用自己的方法确定了以 r 为半径， O 为圆心的圆。对于这两种作图方法，下列说法正确的是 ()



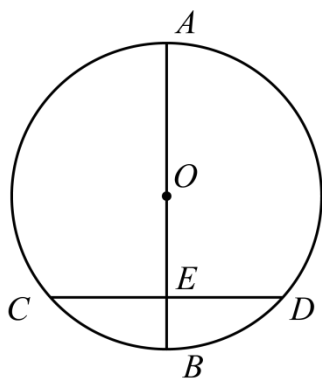
- A . 甲和乙的方法均正确
B . 甲和乙的方法均不正确

C. 甲的方法正确，乙的方法不正确

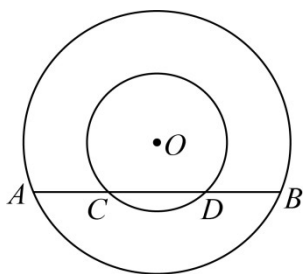
D. 甲的方法不正确，乙的方法正确

题型 09 解答题

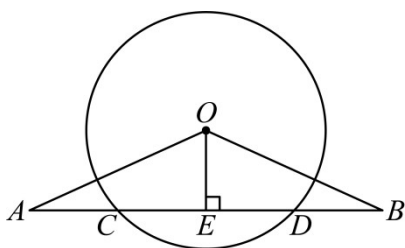
【典例 1】 . 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于点 E ，若 $OE = 3$ ， $CD = 8$. 求 $\odot O$ 的半径 .



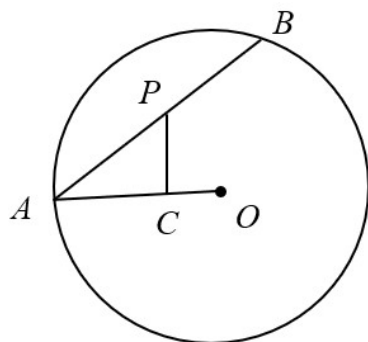
【变式 1】 . 如图，两个圆都以点 O 为圆心，大圆的弦 AB 交小圆于 C, D 两点 . 求证： $AD = BC$.



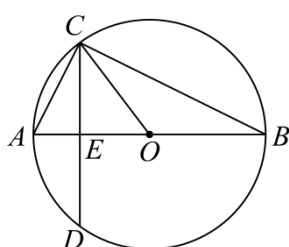
【变式 2】 . 如图，在 $\triangle OAB$ 中， $AO = BO$ ，以 O 为圆心作圆与边 AB 相交于点 C, D ， $OE \perp AB$ 于点 E . 求证： $AC = BD$.



【变式 3】 . 如图， P 是 $\odot O$ 的弦 AB 的中点， $PC \perp OA$ ，垂足为 C ，求证： $PA \cdot PB = AC \cdot AO$.



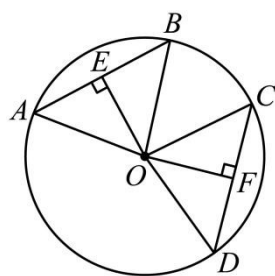
【变式4】 . 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， CD 是弦，且 $AB \perp CD$ 于点 E ，连接 AC 、 OC 、 BC ，若 $AE = 2$ ， $BE = 8$ ，



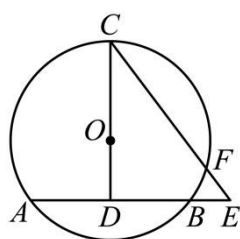
(1) 求圆的半径 OA ；

(2) 求弦 CD 的长。

【变式5】 . 已知：如图，在 $\odot O$ 中， A 、 B 、 C 、 D 是圆上四点，且 $AB = CD$ ， $OE \perp AB$ 于点 E ， $OF \perp CD$ 于点 F 。求证： $OE = OF$ 。



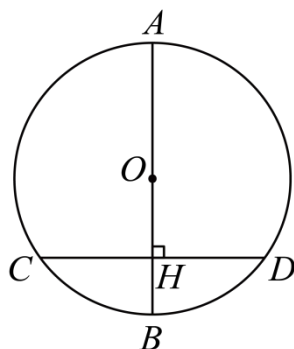
【变式6】 . 已知：如图， $\odot O$ 的半径为 5，弦 AB 的长等于 8， $OD \perp AB$ ，垂足为点 D ， DO 的延长线与 $\odot O$ 相交于点 C ，点 E 在弦 AB 的延长线上， CE 与 $\odot O$ 相交于点 F ， $\cos C = \frac{3}{5}$ 。



(1) 求 CD 的长；

(2)求 EF 的长 .

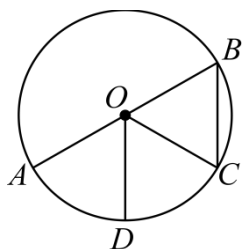
【变式 7】 . 如图 , 在 $\odot O$ 中 , 直径 AB 垂直于弦 CD 于点 H .



(1)联结 AC 、 AD , 求证 : $AC = AD$;

(2)若四边形 $OCBD$ 是菱形 , 求 $\frac{AB}{CD}$ 的值 .

【变式 8】 . 如图 , AB 是 $\odot O$ 的直径 , 点 C, D 在 $\odot O$ 上 , OD 平分 $\angle AOC$.



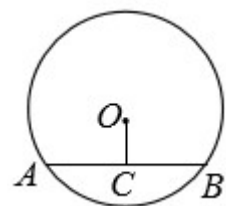
(1)求证 : $OD \parallel BC$;

(2)延长 DO 交 $\odot O$ 于点 E , 连接 CE 交 OB 于点 F , 若 $\frac{OF}{BF} = \frac{5}{6}$, 求 $\angle EOB$ 的正切值 .

强化训练

一、单选题

1 . 如图 , 在 $\odot O$ 中 , $OC \perp AB$ 于点 C , 若 $\odot O$ 的半径为 10 , $OC = 5$, 则弦 AB 的长为 ()



A . $5\sqrt{3}$

B . $10\sqrt{3}$

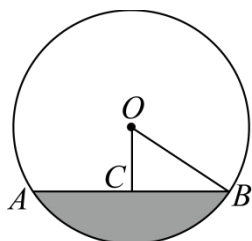
C . $5\sqrt{5}$

D . $10\sqrt{5}$

2 . 下列命题中假命题是 ()

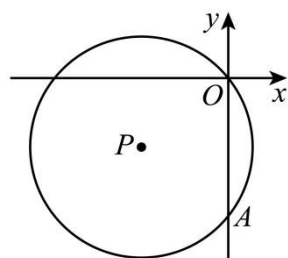
- A . 平分弦的半径垂直于弦 B . 垂直平分弦的直线必经过圆心
C . 垂直于弦的直径平分这条弦所对的弧 D . 平分弧的直径垂直平分这条弧所对的弦

3 . 一条排水管的截面如图所示，已知排水管的半径 $OB = 10$ ，水面宽 $AB = 16$ ，则截面圆心 O 到水面的距离 OC 是 ()



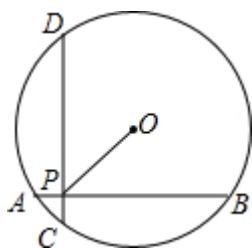
- A . 4 B . 5 C . $6\sqrt{3}$ D . 6

4 . 如图， $\odot P$ 经过点 $O(0,0)$ ，交 y 轴于点 A ，若 $P(-10,-8)$ ，弦 OA 长为 ()



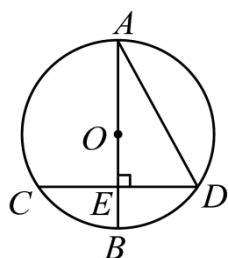
- A . 8 B . 10 C . 16 D . 20

5 . 如图，在半径为 5 的圆 O 中， AB ， CD 是互相垂直的两条弦，垂足为 P ，且 $AB=CD=8$ ，则 OP 的长为 ()



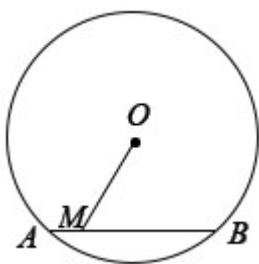
- A . 3 B . 4 C . $3\sqrt{2}$ D . $4\sqrt{2}$

6 . 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于点 E ，连接 AD 。若 $OE = 3$ ， $CD = 8$ ，则 AE 的长为 ()



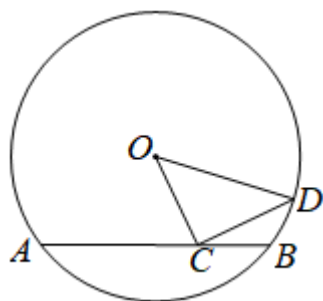
- A . 5 B . 6 C . 7 D . 8

7. 如图， $\odot O$ 的半径为 5，弦 $AB=8$ ，点 M 是弦 AB 上的动点，则 ()



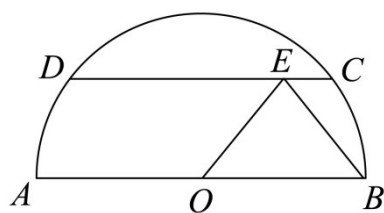
- A . $4 \leq OM \leq 5$ B . $3 \leq OM < 5$ C . $3 < OM \leq 5$ D . $3 \leq OM \leq 5$

8. 如图， AB 为 $\odot O$ 的弦，点 C 在 AB 上， $AC=4$ ， $BC=2$ ， $CD \perp OC$ 交 $\odot O$ 于点 D ，则 CD 的长为 ()



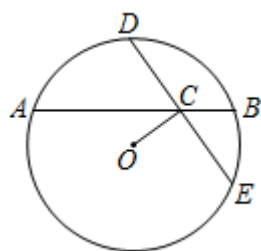
- A . $\sqrt{2}$ B . 3 C . $2\sqrt{2}$ D . $3\sqrt{2}$

9. 如图， AB 是半圆 O 的直径， $AB=20$ ，弦 $DC \parallel AB$ ， E 是 DC 上的点，连结 OE ， EB 。若 $OE=EB$ ， $EC:ED=3:13$ ，则 OE 的长为 ()



- A . $\sqrt{69}$ B . 8 C . $\sqrt{61}$ D . $5\sqrt{2}$

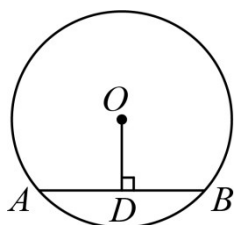
10. 如图， AB 是 $\odot O$ 的弦 (非直径)，点 C 是弦 AB 上的动点 (不与点 A ， B 重合)，过点 C 作垂直于 OC 的弦 DE 。若设 $\odot O$ 的半径为 r ，弦 AB 的长为 a ， $\frac{AC}{BC}=m$ ，则弦 DE 的长 ()



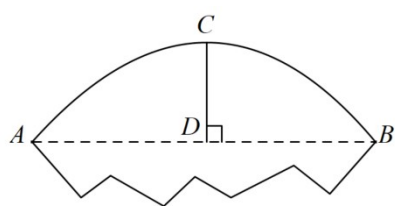
- A. 与 r , a , m 的值均有关 B. 只与 r , a 的值有关
C. 只与 r , m 的值有关 D. 只与 a , m 的值有关

二、填空题

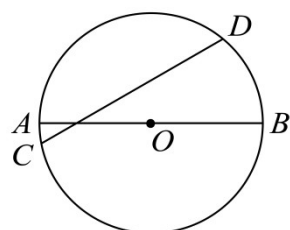
11. 如图, 在 $\odot O$ 中, $OD \perp AB$ 于点 D , AD 的长为 3cm , 则弦 AB 的长为_____.



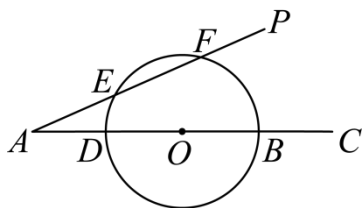
12. 在半径为 2cm 的圆中, 120° 的圆心角所对的弦长为_____ cm .
13. $\odot O$ 中, 点 C 在直径 AB 上, $AC = 3BC$, 过点 C 作弦 $EF \perp AB$, 那么 $\angle EOF =$ _____度.
14. 小明很喜欢钻研问题, 一次数学老师拿来一个残缺的圆形瓦片 (如图所示) 让小明求瓦片所在圆的半径. 小明连接瓦片弧线两端 AB , 量得弧 AB 的中心 C 到 AB 的距离 $CD = 4\text{cm}$, $AB = 16\text{cm}$, 很快求得圆形瓦片所在圆的半径为_____ cm .



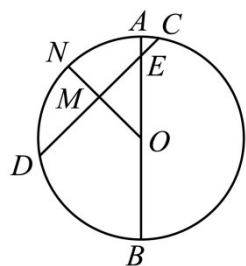
15. 在 $\odot O$ 中, 弦 AB 的长为 8 , 它所对应的弦心距为 4 , 那么半径 $OA =$ _____.
16. 如图, 圆内一条弦 CD 与直径 AB 相交成 30° 角, 且分直径成 1cm 和 5cm 两部分, 则这条弦的弦心距是_____.



17. 如图， $\angle PAC = 30^\circ$ ，在射线 AC 上顺次截取 $AD = 3\text{cm}$ ， $DB = 10\text{cm}$ ，以 DB 为直径作 $\odot O$ 交射线 AP 于 E 、 F 两点，则线段 EF 的长是_____cm.

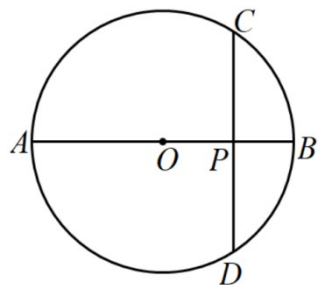


18. 如图在圆 O 中， AB 是直径，弦 CD 与 AB 交于点 E ，如果 $AE = 1$ ， $EB = 9$ ， $\angle AEC = 45^\circ$ ，点 M 是 CD 的中点，连接 OM ，并延长 OM 与圆 O 交于点 N ，那么 $MN =$ _____.

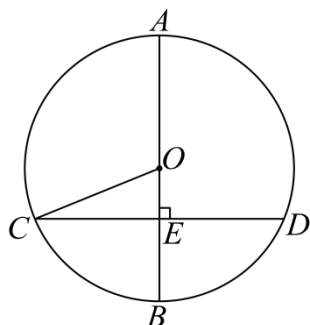


三、解答题

19. 如图，在 $\odot O$ 中， AB 是直径， CD 是弦， $CD \perp AB$ ，垂足为 P ，若 $AP = 8$ ， $BP = 2$ ，求 CD 的长.



20. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于 E ，已知 $CD = 24$ ， $EB = 8$ ，求 $\odot O$ 的直径



21. 如图， AB 是 $\odot O$ 中的一条弦. 在 AB 上求作一点 C ，使得 OC 的长等于圆心 O 到 AB 的距离 (要求：尺规作图，不写作法，保留作图痕迹)

19 / 20

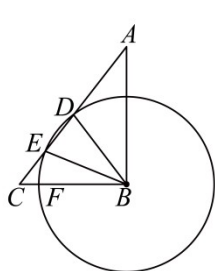


图1

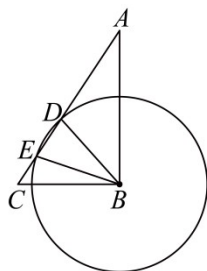


图2

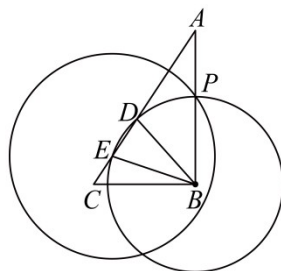


图3

- (1)如图 1，如果 $\odot B$ 与边 BC 交于点 F ， $FE = DE$ ，求 $\angle DBE$ 的度数；
- (2)如图 2，当 $AE = 5EC$ 时，求 $\angle C$ 的正切值；
- (3)如图 3，以点 E 为圆心， BC 为半径的 $\odot E$ 与 $\odot B$ 相交，其中一个交点 P 在边 AB 上．如果 $BD = 1$ ，求 AE 的长．