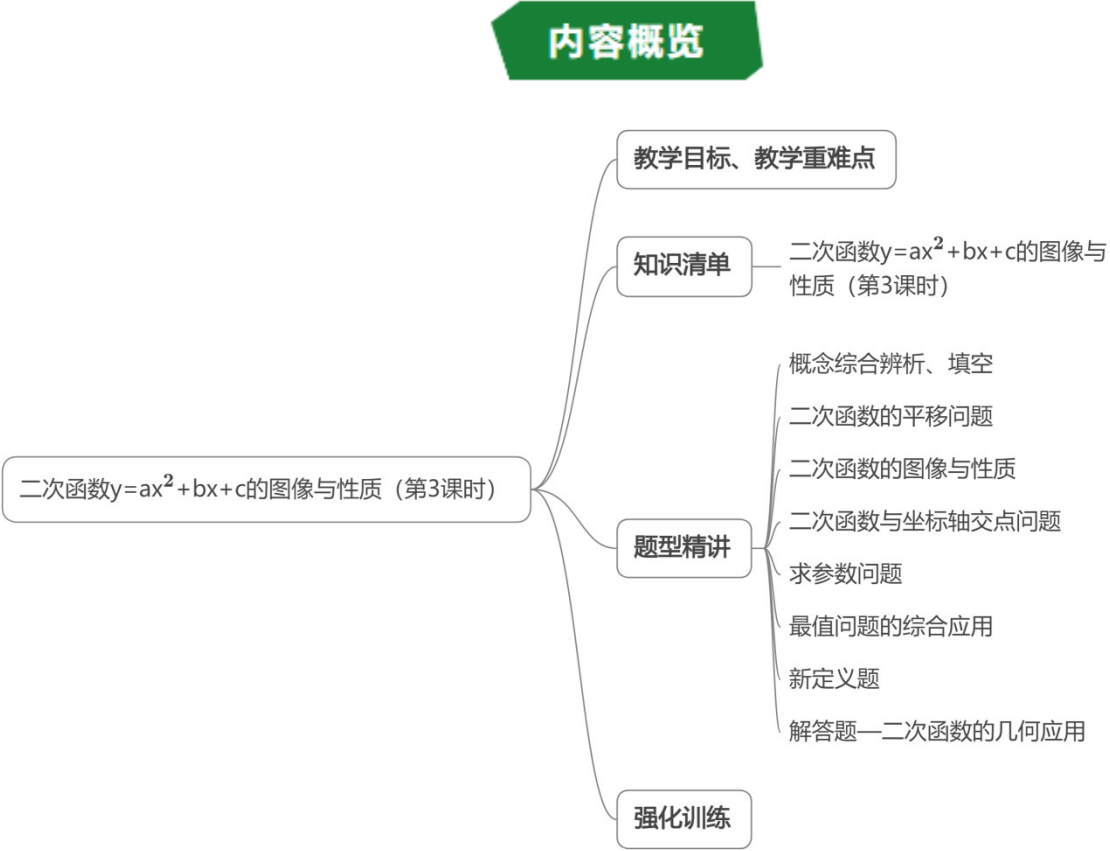


专题 26.6 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与性质（第 3 课时）



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 掌握常考考点； 2. 熟悉二次函数有关的一些专业术语。
教学重难点	1.重点 (1) 教材基本要求及应用； (2) 中考常考考点、题型； (3) 二次函数的图像与性质。 2.难点 (1) 新定义题；含参数的二次函数问题； (2) 二次函数的几何应用；分类讨论思想。

知识清单

知识点 1 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与性质（第 3 课时）

1. 掌握上海常考考点或题型；
2. 学会上海描述二次函数的一些专业术语（如沿着 x 轴的正方向看，如果某抛物线在 y 轴左侧的部分是上升的或下降的）；
3. 第 24 题通常考查二次函数与几何图形的综合应用，涉及抛物线的对称性、顶点坐标、开口方向及与坐标轴的交点等知识点；要求学生能结合平面直角坐标系，通过代数运算解决与三角形、四边形相关的面积、距离或角度问题；同时需掌握在不同条件下对参数 a 、 b 、 c 的分析与推导，理解其几何意义，并能准确进行数形结合与分类讨论。

【即学即练】

1. 抛物线 $y = -x^2 + 3$ 在 y 轴右侧部分呈现_____的趋势（填“上升”或者“下降”）。
2. 若抛物线 $y = mx^2 - 4mx + 1$ 在直线 $x = 2$ 右侧部分是下降的，则 m 的取值范围是_____。
3. 沿着 x 轴正方向看，抛物线 $y = 2x^2 + bx$ 在直线 $x = 1$ 左右两部分的图像增减性完全相反，则 b 的值为_____。
4. 在平面直角坐标系中，若抛物线 $y_1 = -x^2 - nx + 2m$ 与 $y = (x - m + 2)(x + n)$ 关于直线 $y = m$ 对称，则符合条件的 m 和 n 的值可以为（ ）

A. $m = \frac{10}{7}, n = \frac{34}{7}$

B. $m = 1, n = \frac{5}{2}$

C. $m = 10, n = 9$

D. $m = 2, n = 2$
5. 二次项系数之和为 1，且顶点关于 x 轴对称的两个二次函数称作互为“关联函数”，那么函数 $y = -x^2 - 2x + 1$ 的“关联函数”的解析式是_____。

题型精讲

题型 01 概念综合辨析、填空

【典例 1】下列函数中属于二次函数的是（ ）

- A. $y = 3x - 1$

B. $y = ax^2 + bx + c$
- C. $y = 2x^2 - 1$

D. $y = x^2 + \frac{1}{x}$

【变式 1】抛物线 $y = -2x^2 - 8x + 3$ 的顶点在（ ）

- A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【变式2】. 抛物线 $y = ax^2 + c$ 的对称轴为 _____ .

【变式3】. 写出一个经过坐标原点，且在对称轴左侧部分是下降的抛物线的表达式，这个抛物线的表达式可以是_____ .

【变式4】. 二次函数 $y = x^2 + 3x - 2^0$ 的截距是_____ .

题型 02 二次函数的平移问题

【典例1】. 如果二次函数 $y = x^2$ ，如果将它的图像向左平移1个单位，再向下平移2个单位，那么所得的新抛物线的表达式是_____ .

【变式1】. 将二次函数 $y = -2x^2$ 的图象向右平移3个单位，再向上平移4个单位，那么所得的解析式为 () .

A . $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 - 4$

B . $y = -2(x-3)^2 + 4$

C . $y = -2(x+3)^2 - 4$ D . $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 4$

【变式2】. 将抛物线 $y = 2(x+2)^2 - 1$ 向右平移1个单位，再向下平移2个单位后得到的抛物线的解析式为 ()

A . $y = 2(x-1)^2 - 2$ B . $y = 2(x+1)^2 + 3$ C . $y = 2(x+1)^2 - 3$ D . $y = 2(x+2)^2 + 1$

题型 03 二次函数的图像与性质

【典例1】. 如果抛物线 $y = x^2 + x + m - 2$ 经过原点，那么 m 的值等于____ .

【变式1】. 抛物线 $y = ax^2 - bx - c$ (其中 $a < 0, b > 0, c > 0$) 一定不经过的象限是 ()

A . 第一象限

B . 第二象限

C . 第三象限

D . 第四象限

【变式2】. 抛物线 $y = -x^2 + 3$ 在 y 轴右侧部分呈现_____的趋势(填“上升”或者“下降”).

【变式3】. 如果 $(-2, y_1), (3, y_2)$ 是抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ 上两点，那么 y_1 _____ y_2 . (填“>”或“<”)

【变式4】. 已知抛物线 $y = -(x+1)^2$ 上的两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 如果 $x_1 < x_2 < -1$, 那么下列结论成立的是 ()

A . $y_1 < y_2 < 0$

B . $0 < y_1 < y_2$

C . $0 < y_2 < y_1$

D . $y_2 < y_1 < 0$

【变式 5】 . 已知函数 $y = -x^2 + 2x + c$ (c 为常数) 的图象上有两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. 若 $x_1 < 1 < x_2$ 且 $x_1 + x_2 > 2$, 则 y_1 与 y_2 的大小关系是 ()

- A . $y_1 > y_2$ B . $y_1 < y_2$ C . $y_1 = y_2$ D . y_1 与 y_2 的大小关系不确定

题型 04 二次函数与坐标轴的交点问题

【典例 1】 . 抛物线 $y = -2(x-3)^2 + 4$ 与 y 轴的交点坐标为

【变式 1】 . 直线 $y = x + 2$ 与抛物线 $y = x^2 + 2x$ 的交点坐标是_____ , _____ .

【变式 2】 . 抛物线 $y = (k-1)x^2 - 2x + 1$ 与 x 轴有两个不同的交点, 则实数 k 的取值范围是_____ .

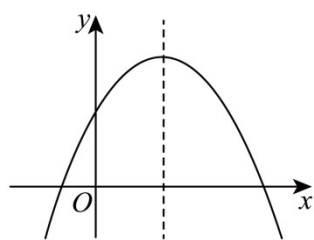
【变式 3】 . 已知一抛物线的形状与 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}$ 的形状相同, 对称轴为 $x = -2$, 且与 x 轴的两交点之间的距离为 2 , 则此抛物线的解析式是 _____ .

题型 05 求参数问题

【典例 1】 . 如果抛物线 $y = (a-3)x^2 - 2$ 有最低点, 那么 a 的取值范围是_____ .

【变式 1】 . 已知二次函数 $y = -x^2 + kx + 12$ 的图象与 x 轴交点都位于 $(6, 0)$ 左侧, 则 k 的取值范围是 _____ .

【变式 2】 . 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如图所示, 直线 l 是图像的对称轴. 那么 a 、 b 、 c 的符号为 ()



A . $a > 0, b > 0, c > 0$

B . $a > 0, b > 0, c > 0$

C . $a < 0, b > 0, c > 0$

D . $a < 0, b < 0, c > 0$

【变式 3】 . 如果二次函数 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$) 的图像向左平移 1 个单位长度后关于 y 轴对称, 那么 $b =$ _____ . (用含 a 的代数式表示)

题型 06 最值问题的综合应用

【典例 1】. 已知关于 x 的二次函数 $y = ax^2 - 4ax + 3a^2 - 6$ ，当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小，且当 $-1 \leq x \leq 3$ 时， y 有最大值 16，则 a 的值为_____.

【变式 1】. 已知二次函数 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$ ， $a \leq x \leq a+2$ 时函数 y 的最大值是 1，则 $a =$ _____.

题型 07 新定义题

【典例 1】. 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的顶点的轨迹是一个规则的图形，那么称这个轨迹为该抛物线的“顶线”. 那么抛物线 $y = ax^2 + 4x - 6 (a \neq 0)$ 的“顶线”是_____.

【变式 1】. 如果两个二次函数 $y_1 = a_1(x + h_1)^2 + k_1$ 与 $y_2 = a_2(x + h_2)^2 + k_2$ 的图象的形状相同，开口方向相反，并且顶点关于原点对称，那么我们称这两个二次函数互为梦函数，则二次函数 $y = 2(x+2)^2 + 1$ 的梦函数解析式为_____.

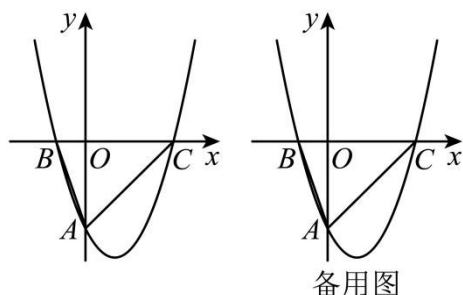
【变式 2】. 已知 $P(x_1, y_1)$ 是抛物线 $y = a(x-m)^2 + h (a \neq 0)$ 上的一点，且满足 $x_1 - m = y_1 - h \neq 0$ ，如果使用 $2|x_1 - m|$ 的值定义抛物线的“开口大小”，那么抛物线 $y = x^2 + 4x + 3$ 的“开口大小”为_____.

【变式 3】. 定义：若一个抛物线和 x 轴有两个交点，那么这两交点与抛物线顶点组成的三角形为“ x 轴三角形”；若开口向下的抛物线和 x 轴交于 M 、 N ，且 MN 的长度为 m ，当抛物线的“ x 轴三角形”是等腰直角三角形时，抛物线的二次项系数是_____.

【变式 4】. 定义：在平面直角坐标系中；如果一个点的横坐标与纵坐标的和为 k ，则称该点为“ k 级和值点”. 在 $0 \leq x \leq 3$ 的范围内，若二次函数 $y = -x^2 + 3x$ 的图像上存在两个“ k 级和值点”，则 k 的取值范围为_____.

题型 08 解答题—二次函数的几何应用

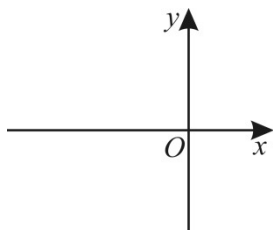
【典例 1】. 如图在直角坐标平面内，抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 与 y 轴交于点 A ，与 x 轴分别交于点 $B(-1, 0)$ 、点 $C(3, 0)$ ，点 D 是抛物线的顶点.



(1)求：抛物线的表达式及顶点 D 的坐标；

(2)点 P 在直线 DC 上，连接 OP ，若以 O 、 P 、 C 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，求点 P 的坐标．

【变式1】．在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = mx^2 + 6mx + n$ ($m < 0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B ，顶点为 D ．

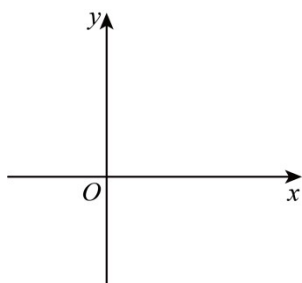


(1)求此抛物线的对称轴及点 B 的坐标；

(2)点 P 是该抛物线上的一点，设对称轴与 x 轴交于点 E ，如果 BP 恰好平分线段 DE ，求点 P 的坐标 (用含 m 的式子表示)；

(3)在 (2) 的条件下，连接 PD 、 AP ，当 $\angle DPB = \angle PAB$ 时，求 m 的值．

【变式2】．在平面直角坐标系 xOy 中，将抛物线 $y = \frac{1}{4}(x-3)^2$ 向下平移使之经过点 $A(8, 0)$ ，平移后的抛物线交 y 轴于点 B ．

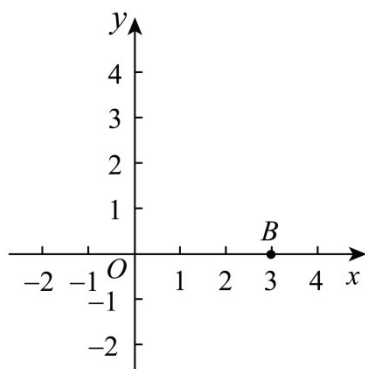


(1)求 $\angle OBA$ 的正切值；

(2)点 C 在平移后的抛物线上且位于第二象限，其纵坐标为 6，联结 CA 、 CB ，求 $\triangle ABC$ 的面积；

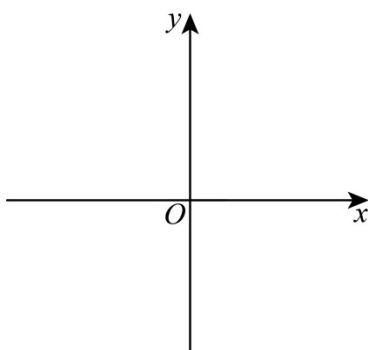
(3)点 D 在平移后抛物线的对称轴上且位于第一象限，联结 DA 、 DB ，当 $\angle BDA = \angle OBA$ 时，求点 D 的坐标．

【变式3】．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线①是由抛物线 $y = x^2$ 经过平移所得，且抛物线①过点 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ ，它与 x 轴的另一个交点为 A ．



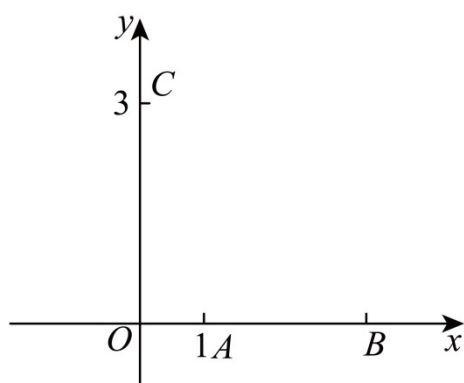
- (1) 求抛物线①的表达式；
- (2) 设抛物线①的顶点为 D ，求 $\triangle DBC$ 的面积；
- (3) 如果点 F 在 y 轴上，且 $\angle CDF = 45^\circ$ ，求点 F 的坐标。

【变式4】 . 我们定义：如果一条抛物线的顶点 P 绕着它的对称轴上的另一个点 Q 逆时针旋转 90° ，顶点 P 的对应点 P' 也在这条抛物线上，那么称线段 PQ 的长为该抛物线的开口半径，点 Q 为该抛物线的开口中心。



- (1) 已知一条抛物线的开口向上，开口半径为 1，开口中心为 $(-1, 0)$ ，求这条抛物线的表达式；
- (2) 已知抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + c$ 顶点为点 A ，与 y 轴交于点 B ，开口中心点 C 。
 - ① 求它的开口半径；
 - ② 求 $\angle ACB$ 的余弦值。

【变式5】 . 如图，在直角坐标平面 xOy 中，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于点 A 、 B 两点，与 y 轴相交于点 C ，其中点 $A(1, 0)$ 、 $C(0, 3)$ ，该抛物线的顶点为点 D 。



(1)求抛物线的关系式，并写出抛物线的顶点 D ；

(2)设该抛物线的对称轴与 x 轴的交点为点 E ，点 $F(m, m)$ 是第三象限内一点，且满足 $FO^2 = OA \cdot OE$ ，求 $\angle OFA$ 的余切值；

(3)在 (2) 的条件下，设点 $P(n, t) (t > 0)$ 是该抛物线上一点，且 $\triangle ABP$ 的面积是 $\triangle OEF$ 面积的 3 倍，求点 P 的坐标。

强化训练

一、单选题

1. 下列函数中，是二次函数的是 ()

A. $y = 1 - \sqrt{2}x$

B. $y = 2(x - 1) + 4$

C. $y = \frac{1}{2}(x - 1)(x + 4)$

D. $y = (x - 2)^2 - x^2$

2. 下列函数中， y 的值随 x 值的增大而减小的是 ()

A. $y = 2x^2 + 1$

B. $y = -2x^2 + 1$

C. $y = x + 1$

D. $y = -x + 1$

3. 抛物线 $y = -(x + 1)^2 - 2$ 可以由抛物线 $y = -x^2$ 平移得到，则下列平移过程正确的是 ()

A. 先向左平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位 B. 先向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位

C. 先向右平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位 D. 先向右平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位

4. 关于二次函数 $y = -2(x - 1)^2$ 的图像，下列说法正确的是 ()

A. 开口向上

B. 经过原点

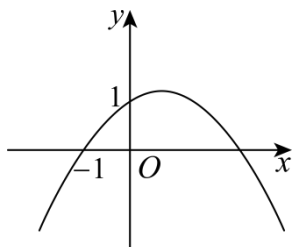
C. 对称轴右侧的部分是下降的

D. 顶点坐标是 $(-1, 0)$

5. 已知二次函数 $y = -(x-4)^2$ ，如果函数值 y 随自变量 x 的增大而减小，那么 x 的取值范围是 ()

- A. $x > 4$ B. $x \leq 4$ C. $x < -4$ D. $x \leq -4$

6. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像的顶点在第一象限，且过点 $(0,1)$ 和 $(-1,0)$ ，下列结论：① $c = 1$ ；② $ab < 0$ ；③ $a - b + c = 0$ ；④当 $x > -1$ 时， $y > 0$ 。其中正确结论的个数是 ()



- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

二、填空题

7. 将抛物线 $y = 3 + x - 2x^2$ 向下平移 2 个单位，那么平移后抛物线的表达式是_____。

8. 如果抛物线 $y = x^2 + c$ 经过两点 $A(2,1)$ 和 $B(1,b)$ ，那么 b 的值是_____。

9. 二次函数 $y = -x^2 - 2x + m$ 图像的最高点的横坐标是_____。

10. 已知抛物线 $y = (a-2)x^2 - x$ 开口向上，那么 a 的取值范围是_____。

11. 已知抛物线 $y = (1-a)x^2 + a - 1$ 的最高点为 $(0,3)$ ，则 $a =$ _____。

12. 写出一个经过坐标原点，且在对称轴左侧部分是下降的抛物线的表达式，这个抛物线的表达式可以是_____。

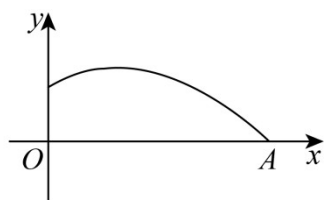
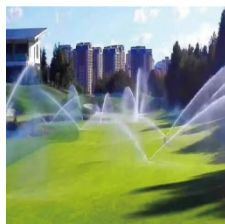
13. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向上，且经过点 $(3,4)$ 和 $(-2,4)$ ，如果点 $(1, y_1)$ 与 $(2, y_2)$ 在此抛物线上，那么 y_1 _____ y_2 。（填“>”“<”或“=”）

14. 已知二次函数 $y = a(x-3)^2 - 1$ 的图像在直线 $x = 3$ 的左侧部分是下降的，那么 a 的取值范围是_____。

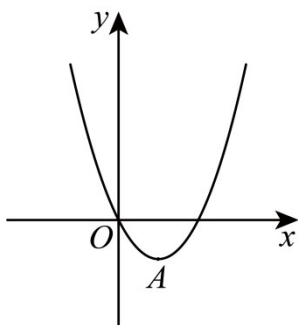
15. 如果点 $A(a,2)$ 和点 $B(3,2)$ 都在抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 5$ 的图像上，那么 $a =$ _____。

16. 如图，综合实践小组的同学们研究了某草坪喷灌系统的设计，发现喷灌架喷射出的水流可以近似的看成抛物线 $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ （其中 y 为垂直高度， x 为水平距离，单位：m），则该喷灌架喷出的水流可

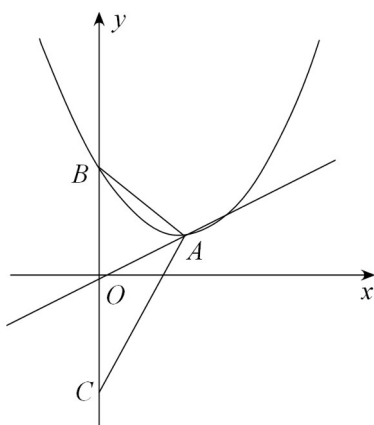
到达的最远距离 OA 为_____m。



17. 定义：在平面直角坐标系中，如果两条抛物线关于直线 $x = m$ 对称，那么我们把一条抛物线称为另一条抛物线关于直线 $x = m$ 的镜像抛物线．如图，已知抛物线 $y = x^2 - 2x$ ，顶点为 A ，该抛物线关于直线 $x = m$ 的镜像抛物线的顶点为 B ，如果 $\tan \angle OBA = \frac{1}{3}$ ，（ $\angle OBA$ 是锐角）则 m 的值是_____．



18. 已知点 A 是直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上一动点，以点 A 为顶点的抛物线 $y = (x - m)^2 + h$ 交 y 轴于点 B ，作点 B 关于 x 轴的对称点 C ，连接 AB 、 AC ．若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，则点 A 的坐标为_____．



三、解答题

19. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(3, 0)$ ， $B(0, -3)$ ．

(1) 求抛物线表达式并写出顶点坐标；

(2) 联结 AB ，与该抛物线的对称轴交于点 P ，求点 P 的坐标．

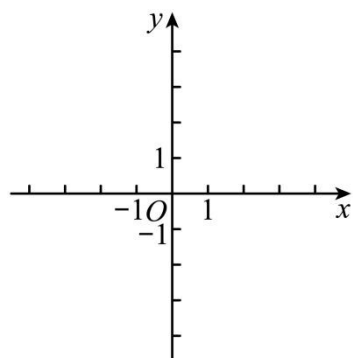
20. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的变量 x 与变量 y 的部分对应值如下表：

x	...	-3	-2	-1	0	1	5	...
y	...	7	0	-5	-8	-9	7	...

(1)求此二次函数的解析式；

(2)写出抛物线顶点坐标和对称轴．

21．已知平面直角坐标系 xOy ，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$ 和 $B(0, -3)$ 两点．



(1)求抛物线的表达式；

(2)如果将这个抛物线向右平移 k ($k > 0$) 个单位，得到新抛物线经过点 B ，求 k 的值．

22．已知抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 的顶点为 P ，与 y 轴相交与点 Q ．

(1)求点 P 、 Q 的坐标；

(2)将该二次函数图像向上平移，使平移后所得图像经过坐标原点，与 x 轴的另一个交点为 M ，求 $\sin \angle OMQ$ 的值．

23．如图 1 所示的是古代一种远程攻击的武器——发石车．将发石车置于山坡底部 O 处，以点 O 为原点，水平方向为 x 轴，建立如图 2 所示的平面直角坐标系，将某发射出去的石块看作一个点，其飞行路线可以近似看作抛物线 $y = a(x - 20)^2 + k$ 的一部分．山坡 OA 上有一堵防御墙，其竖直截面为 $ABCD$ ，墙宽 $BC = 2$ m, BC 与 x 轴平行，点 B 与点 O 的水平距离为 25 m，垂直距离为 5 m．已知发射石块在空中飞行的最大高度为 10 m．



图1

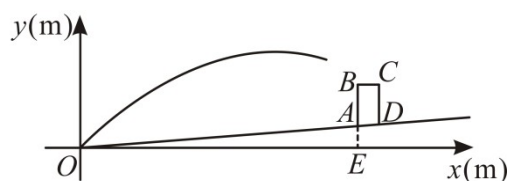


图2

(1)求该抛物线的解析式；

(2)试通过计算说明该石块能否飞越防御墙．

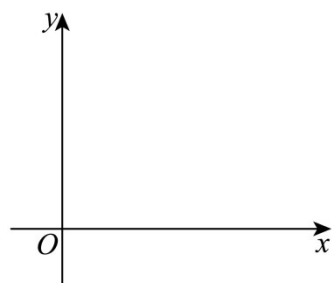
24．已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 6$ 过 $A(-2, 0), B(6, 0)$ 交 y 轴于点 C ．

(1)求抛物线解析式及其顶点坐标；

(2)已知点 D 为第一象限内的抛物线上一点，点 E, F 分别在线段 BC, OC 上，若四边形 $CDEF$ 既是中心对称图形，又是轴对称图形，求其周长与面积之比；

(3)点 C 与点 P 关于 x 轴对称，连接 PD 交线段 BC 于 Q ，若 $S_{\triangle APQ} = \frac{5}{3} S_{\triangle BPQ}$ ，求点 D 坐标．

25．在平面直角坐标系 xOy 中（如图），顶点为 $A(6, 6)$ 的抛物线 C_1 经过原点，直线 $y = 6$ 交 y 轴于点 B ．



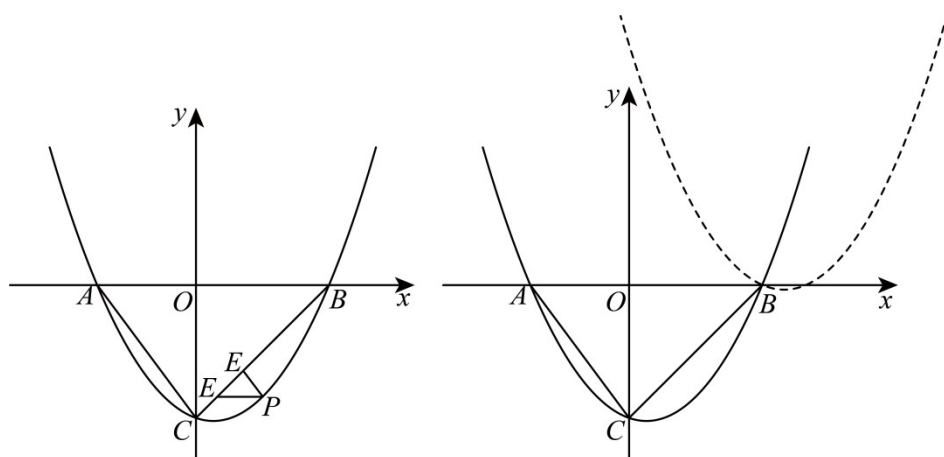
(1)求抛物线 C_1 的表达式；

(2)将抛物线 C_1 先向右平移 $m(m > 0)$ 个单位，再向下平移 $n(n > 0)$ 个单位，使得新抛物线 C_2 的顶点 D 恰好落在抛物线 C_1 上．抛物线 C_2 的对称轴交直线 AB 于点 E ．连接 BD ．

①连接 AD ，当线段 BD 的中垂线经过点 A 时，求 $\sin \angle DAE$ 的值；

②线段 BD 交抛物线 C_1 的对称轴于点 F ，当 $\triangle ADF$ 与 $\triangle ADB$ 相似时，求代数式 $m^3 - 36m$ 的值．

26．如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx - 4(a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ ， $B(4, 0)$ ，与 y 轴交于点 C ．



(1)求该抛物线的函数表达式；

(2)点 P 为线段 BC 下方抛物线上的一动点，过点 P 作 $PE \parallel x$ 轴交直线 BC 于点 E ， F 为 BC 上一点，且 $\angle FPE = \angle CAB$ ，当 EF 最大时，求：点 P 的坐标；

(3)在 (2) 的条件下，将抛物线 $y = ax^2 + bx - 4 (a \neq 0)$ 沿射线 CB 方向平移，得到新抛物线 y' ，新抛物线和原抛物线交于点 B ，与 y 轴交于点 Q ，点 M 是新抛物线对称轴上的一点，若 $\triangle PQM$ 是以 MQ 为腰的等腰三角形，请直接写出所有符合条件的点 M 的坐标。