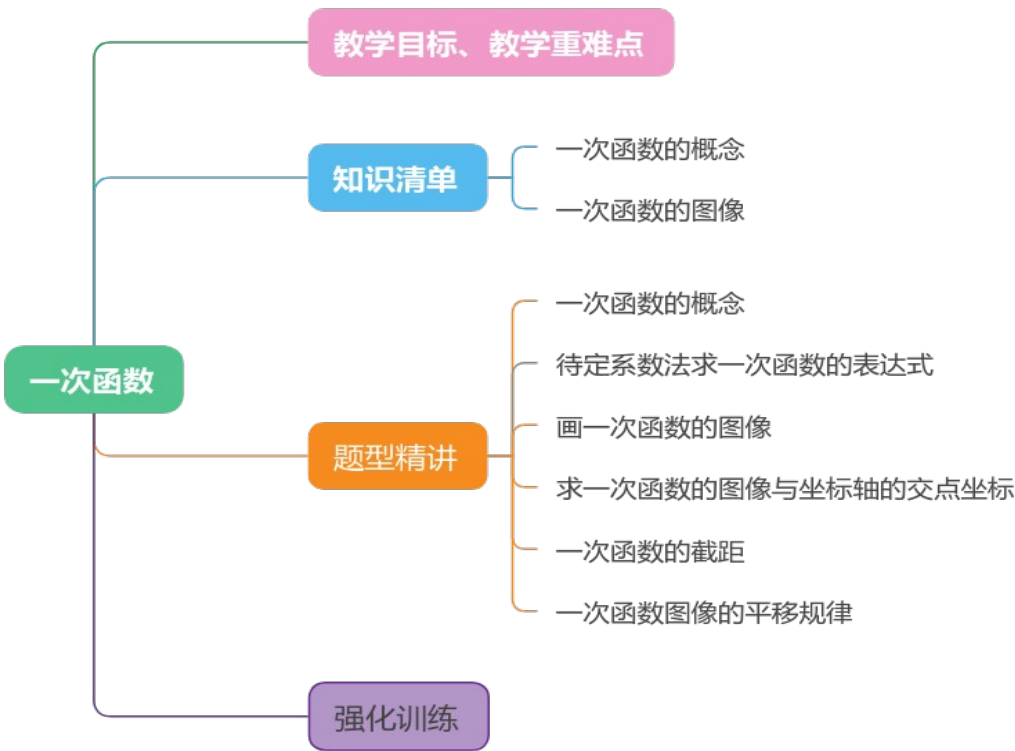


专题 25.3 一次函数(概念和图像)

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 理解一次函数的概念：形如 $y=kx+b$ (k 、 b 为常数， $k \neq 0$)，能准确识别一次函数并能理解它与正比例函数的区别与联系； 2. 会用“两点法”画一次函数图像，知道其是过 $(0,b)$ 和 $(-\frac{b}{k},0)$ 的一条直线，掌握直线平移的规律，会进行简单的平移；
教学重难点	1.重点 理解一次函数的概念，准确、规范地画一次函数的图像； 2.难点 一次函数图像的平移、轴对称等变换后表达式的确定.

知识清单

知识点 01 一次函数的概念

1. 一次函数

①**形式上**：一般地，形如_____ ($k \neq 0$) 的函数，叫作**一次函数**。

②**本质上**：左边是变量 y ，右边是形如 $kx+b$ 的关于 x 的_____。

2. 一次函数与正比例函数的关系

对于一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$)，当_____时，表达式 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 就成为 $y=kx$ ($k \neq 0$)，这时 y 是 x 的正比例函数。所以，正比例函数是一次函数的**特例**。

【即学即练】

例 1 根据下列变量 x 、 y 之间的关系式，判断 y 是不是 x 的一次函数？如果是一次函数，指出其中 k 、 b 分别是多少？

$$(1)y=2x; (2)y=3(1-x) \quad (3) y=\frac{4}{2x-1} \quad (4)y=-2x^{2m-3}+m$$

解：(1) 因为 $2x$ 是一次式，所以 $y=2x$ 是一次函数，其中 $k=$ _____, $b=$ _____；

(2) 因为 $3(1-x)$ 是一次式，所以 $y=3(1-x)$ 是一次函数，其中 $k=$ _____, $b=$ _____；

(3) 因为 $\frac{4}{2x-1}$ 不是一次式，所以 $y=\frac{4}{2x-1}$ 不是一次函数；

(4) 当 $2m-3=1$ ，即 $m=$ _____时， $y=-2x^{2m-3}+m$ 可化简为_____，所以 y 是关于 x 的一次函数，其中 $k=$ _____, $b=$ _____；

当 $2m-3 \neq 1$ ，即 $m \neq 2$ 时， $-2x^{2m-3}+m$ 不是一次式，所以 y 不是关于 x 的一次函数。

【点睛】辨析一次函数 $y=3(1-x)$ 各项系数时不能只看形式，要看本质。

2. 一次函数表达式的确定——待定系数法

(1) 一般步骤：

第一步**“设”**：设函数的表达式为 $y=kx+b$ (其中 k 、 b 是待定系数，且 $k \neq 0$)；

第二步**“列”**：将已知的 x 、 y 的对应值代入所设表达式中，列出关于 k 、 b 的方程组；

第三步**“解”**：解方程组，求出 k 与 b 的值；

第四步**“答”**：将所求 k 、 b 的值代回所设的表达式中，写出函数的表达式。

(2) 常见类型

① 已知两对 x, y 的值

策略：直接代入表达式列出关于 k, b 的二元一次方程组；

②已知函数图像经过两个已知点，如 $P(m_1, n_1)$ 和 $Q(m_2, n_2)$

策略：把 $x=m_1, y=$ 和 $x=m_2, y=$ 代入表达式列出关于 k, b 的二元一次方程组；

③根据数量关系列式

如“油箱剩油模型”：汽车油箱有油 40 升，每小时耗油 8 升，求剩油量 y (升)与行驶时间 t (h)之间的函数关系
 $y=$ ($0 \leq t \leq 5$)

④根据表格数据规律列式

(举例见例 3)

【即学即练】

例 2 已知 y 是 x 的一次函数，当 $x=2$ 时， $y=-1$ ；当 $x=3$ 时， $y=2$ 。

请问，若 $x=3, y$ 等于多少？

解：设所求一次函数的表达式为 ($k \neq 0$).

因为当 $x=2$ 时， $y=-1$ ，当 $x=5$ 时， $y=8$ ，所以

可得方程组

解二元一次方程组，得

所以，这个一次函数的表达式为

当 $x=3$ 时， $y=$

所以当 $x=3$ 时， $y=$

例 3 一次试验中，小明把一根弹簧的上端固定，在其下端悬挂砝码，下面是测得的弹簧长度 y (cm)与所挂砝码的质量 x (g)的一组对应值：

$x(g)$	0	1	2	3	4	5	...
$y(cm)$	18	20	22	24	26	28	...

请写出 y 与 x 之间的关系式。

解析：从表格看出弹簧原长 厘米，砝码每增加 1 克，弹簧长度伸长 厘米，所以 $y=$

知识点 02 一次函数的图像

1. 一次函数的图像

一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$)的图像是一条 ，记作 **直线** ；直线 $y=kx+b$ 经过点 (,)，

0) 和点 $(0, \underline{\hspace{2cm}})$.

2.画一次函数图像的步骤

①列表

②描点

③连线

3.直线 $y=kx+b$ 经过 $P(m,n)$ 与点 $P(m,n)$ 在直线 $y=kx+b$ 上的含义

直线 $y=kx+b$ 经过点 $P(m,n) \Leftrightarrow x=\underline{\hspace{2cm}}, y=\underline{\hspace{2cm}}$ 满足表达式 $y=\underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow$ 把 $x=\underline{\hspace{2cm}}, y=\underline{\hspace{2cm}}$ 代入表达式 $y=kx+b$, 能使表达式左右两边的值相等.

4.直线 $y=kx+b$ 与坐标轴交点坐标

求与 x 轴交点的坐标 $\Rightarrow$ 把 $y=\underline{\hspace{2cm}}$ 代入表达式 $y=kx+b$ 求出 $x=\underline{\hspace{2cm}}$, 则点 $(\underline{\hspace{2cm}}, 0)$ 就是直线 $y=kx+b$ 与 x 轴的交点坐标;

求与 y 轴交点的坐标 $\Rightarrow$ 把 $x=\underline{\hspace{2cm}}$ 代入表达式 $y=kx+b$ 求出 $y=\underline{\hspace{2cm}}$, 则点 $(0, \underline{\hspace{2cm}})$ 就是直线 $y=kx+b$ 与 y 轴的交点坐标;

5.一次函数的截距

一条直线与 y 轴的交点的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 称为这条直线在 **y 轴上的截距**, 简称直线的 $\underline{\hspace{2cm}}$. 直线 $y=kx+b(k \neq 0)$ 与 y 轴的交点坐标是 $(0, \underline{\hspace{2cm}})$, 直线 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的截距是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

易错点辨析: 一次函数的“截距”是个**坐标**, 不是个**距离**.

6.平移直线

(1) 平移规律

一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的图像可以看成是由正比例函数 $y=kx(k \neq 0)$ 的图像平移得到的. 平移前后的两条直线互相平行;

直线 $y=k_1x+b_1$ 与直线 $y=k_2x+b_2$ **平行** $\Leftrightarrow k_1=k_2, b_1 \neq b_2$

(2) 平移类型

①上下平移 (**k 不变, b 上加下减**)

②左右平移 (**k 不变, m 左加右减**) $y=kx+b \Rightarrow y=k(x+m)+b$

(3) 关于求直线平移、旋转、轴对称的表达式的方法

①先求点变换后的坐标;

②再用待定系数法确定直线变换后的表达式.

【即学即练】

例 4 在平面直角坐标系中画出函数 $y=\frac{2}{3}x-2$ 的图像.

(1) 将函数 $y=\frac{2}{3}x-2$ 的图像向上平移 2 个单位、4 个单位，在同一直角坐标系中分别画出平移后的图像，并写出平移后的图像表达式；

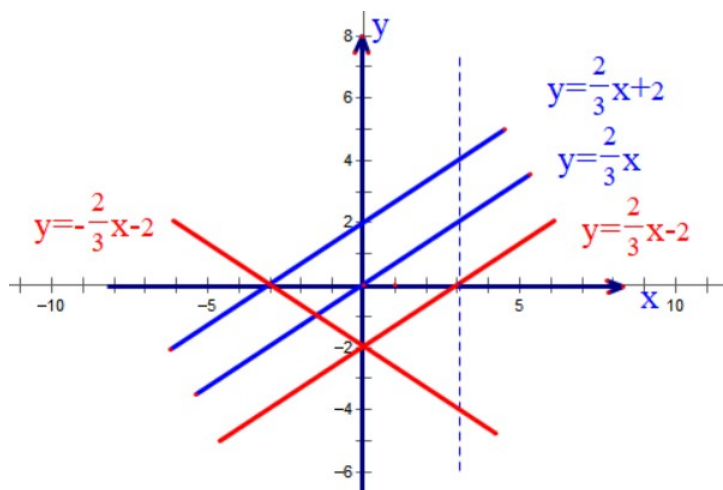
(2) 画出函数 $y=\frac{2}{3}x-2$ 的图像关于 y 轴轴对称的图形，并求出它的解析式。

【分析】本题考察了直线的平移、轴对称.欲求直线变换后的表达式，先求点的变换后的坐标，再用待定系数法求表达式.

【详解】解：列表

x		0
$y=\frac{2}{3}x-2$	0	

描点、连线函数 $y=\frac{2}{3}x-2$ 的图像如下图所示.



(1)将直线 $y=\frac{2}{3}x-2$ 向上平移 2 个单位、4 个单位后图像如下图所示；

因为直线 $y=\frac{2}{3}x-2$ 经过点 (_____, 0) 和 (0, _____) 所以将直线 $y=\frac{2}{3}x-2$ 向上平移 2 个单位、4 个单位后，它们一定分别经过点 (_____, _____)、(0, 0) 和 (_____, _____)、(0, 2) .

设向上平移 2 个单位后的直线为 $y=k_1x+b_1$,向上平移 4 个单位后的直线为 $y=k_2x+b_2$,

由题意得到 $\begin{cases} 3k_1+b_1=2 \\ b_1=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 3k_2+b_2=4 \\ b_2=2 \end{cases}$

分别解之得 $\begin{cases} k_1=\frac{2}{3} \\ b_1=0 \end{cases}$, $\begin{cases} k_2=\frac{2}{3} \\ b_2=2 \end{cases}$

∴直线 $y=\frac{2}{3}x-2$ 向上平移 2 个单位后表达式为 $y=_____$;

直线 $y = \frac{2}{3}x - 2$ 向上平移 4 个单位后表达式为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 函数 $y = \frac{2}{3}x - 2$ 的图像关于 y 轴轴对称的图形如图所示;

直线 $y = \frac{2}{3}x - 2$ 与 x 轴交于点 $(\underline{\hspace{2cm}}, 0)$ 与 y 轴交于点 $(0, \underline{\hspace{2cm}})$

因为他们关于 y 轴的对称点分别为 $(\underline{\hspace{2cm}}, \underline{\hspace{2cm}})$ 和 $(\underline{\hspace{2cm}}, \underline{\hspace{2cm}})$,

设直线 $y = \frac{2}{3}x - 2$ 关于 y 轴轴对称的直线表达式是 $y = kx + b$

由题意, 得

解之得, $k = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$

$\therefore$ 直线 $y = \frac{2}{3}x - 2$ 关于 y 轴轴对称的直线表达式是 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【点睛】 本题若掌握平移的规律, 解题将更加便捷, 一次函数图像的上下平移规律是“ k 不变, b 上加下减,”

所以直线 $y = \frac{2}{3}x - 2$ 向上平移 2 个单位后表达式为 $y = \frac{2}{3}x - 2 + 2$, 即 $y = \frac{2}{3}x$.

题型精讲

题型 01 一次函数的概念

【典例 1】 1. 下列函数中, 是一次函数但不是正比例函数的是 ()

- A. $y = -\frac{x-1}{2}$ B. $y = \frac{x^2-1}{2}$ C. $y = -\frac{x}{2}$ D. $y = -\frac{2}{x}$

【变式 1】 下列说法错误的是 ()

- A. $y = -24x$ 是正比例函数, 也是一次函数
 B. $y = 5\pi$ 是一次函数, 也是正比例函数
 C. 商品单价一定, 总金额与商品数量成正比
 D. 如果 $y = (m^2 - 4)x + 9$ 是一次函数, 那么 $m \neq \pm 2$

【变式 2】 已知函数 $y = (m-1)x + m$.

(1) 当 m 时, y 是 x 的一次函数.

(2) 当 m 时, y 是 x 的正比例函数.

【变式3】关于 x 的函数 $y = (2 - m)x^{m^2-3} + 5$ 是一次函数，则 m 的值为_____.

【变式4】已知 y 与 $x-3$ 成正比例，当 $x=4$ 时， $y=3$.

(1)求出 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) y 与 x 之间是什么函数关系？并在平面直角坐标系中画出该函数的图像；

(3)当 $x=2.5$ 时， y 的值为_.

题型 02 求一次函数的表达式

【典例1】已知 y 是 x 的一次函数，且当 $x=4$ 时， $y=9$ ；当 $x=6$ 时， $y=-1$.

(1) 求这个一次函数的表达式；

(2) 当 $x=1$ 时，求 y 的值.

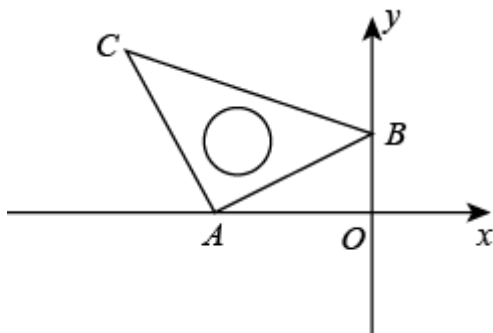
【变式1】一次函数的图象经过点 $(1, 2)$ 和点 $(-2, 5)$.

(1) 求出该一次函数的解析式；

(2) 当 $x=10$ 时， y 的值是多少？

(3) 当 $y=12$ 时， x 的值是多少？

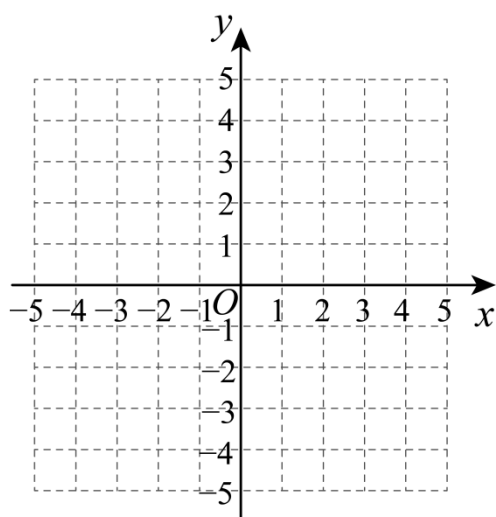
【变式2】如图，把含 45° 角的直角三角板放置在平面直角坐标系中，其中 $A(-2, 0)$ ， $B(0, 1)$ ，求直线 BC 的表达式.



【变式3】已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 y 轴的交点是 $(0, 3)$ ，且过点 $(2, -1)$.

(1) 求该一次函数的解析式；

(2) 画出该一次函数的图象，并根据图象回答：当 x 取何值时，一次函数 $y=kx+b$ 的函数值大于3？



【变式 4】 一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过 $A(3, 2)$, $B(1, 6)$ 两点.

(1) 求 k , b 的值;

(2) 判断点 $P(-1, 10)$ 是否在该函数的图象上.

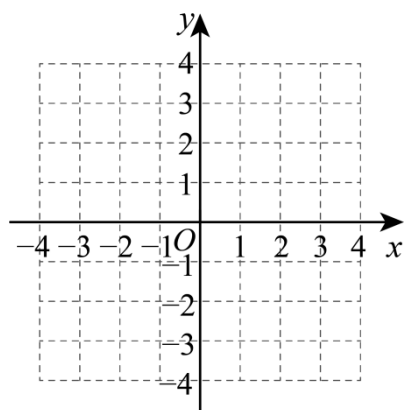
题型 03 一次函数的图像

【典例 1】 画出函数 $y=2x-3$ 的图像, 并根据图像回答下列问题:

(1) 函数图像与 x 轴、 y 轴的交点坐标分别是什么?

(2) 当 x 取何值时, $y > 0$?

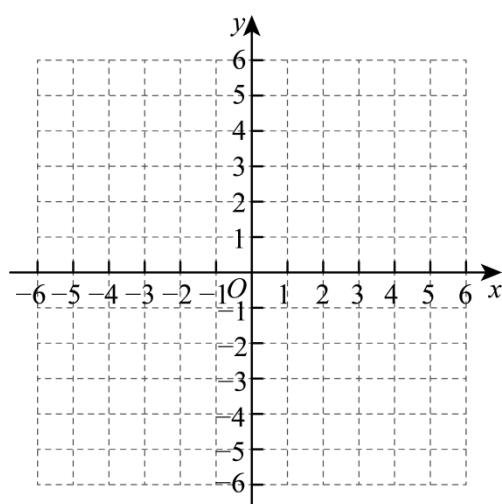
【变式 1】 在同一平面直角坐标系中画出下列一次函数的图象, 并分别指出图象经过哪些象限.



- (1) $y = 0.5x$;
 (2) $y = 0.5x - 2$;
 (3) $y = 0.5x + 2$;

【变式2】 已知一次函数 $y = -3x + 3$ 的图象与 x 轴相交于点 A ，与 y 轴相交于点 B

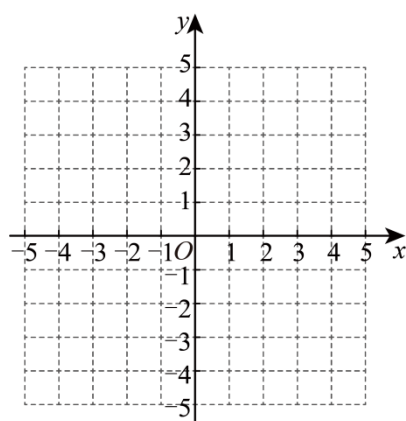
- (1) 直接写出 A ， B 两点的坐标；
 (2) 在平面直角坐标系中画出函数 $y = -3x + 3$ 的图象.



【变式3】 已知一次函数 $y = -2x - 6$.

- (1) 画出该函数的图象.
 (2) 已知该一次函数的图象与 x 轴、 y 轴的交点为 A ， B ，求 V_{AOB} 的面积.

【变式4】 在如图所示的坐标系下，



(1)画出函数 $y = -x + 4$ 与 $y = x - 2$ 的图象；

(2)求方程组 $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

题型 04 求一次函数图像与坐标轴交点坐标

【典例 1】一次函数 $y = x - 1$ 与 y 轴的交点坐标是 ()

- A. (1,0) B. (0,1) C. (0,-1) D. (-1,0)

【变式 1】一次函数 $y = 3x - 1$ 的图象与 x 轴的交点坐标是 ()

- A. (0,-1) B. (-1,0) C. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

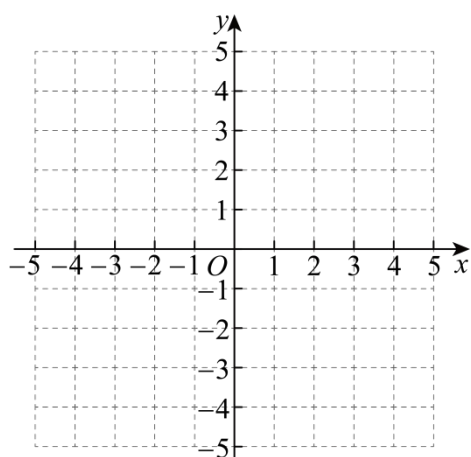
【变式 2】直线 $y = -x + 3$ 与坐标轴交于两点，则直线与 x 轴所夹的锐角的度数为 ()

- A. 30° B. 45° C. 50° D. 60°

【变式 3】在平面直角坐标系中，已知一次函数 $y = -2x + 4$ ，完成下列问题：

(1)画出一一次函数 $y = -2x + 4$ 的图象；

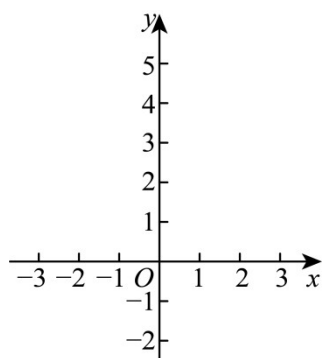
x	...			...
y	...			...



(2) 当 $y > 0$ 时, x 的范围是_____;

(3) 将直线 $y = -2x + 4$ 沿 y 轴向下平移 3 个单位长度, 平移后的函数表达式为_____.

【变式 4】 已知一次函数 $y = 2x + 4$.



(1) 在如图所示的平面直角坐标系中, 画出函数的图象.

(2) ①求图象与 x 轴的交点 A 的坐标, 与 y 轴的交点 B 的坐标.

②求 $\triangle AOB$ 的面积.

(3) 写出图象上到 x 轴的距离等于 2 的点的坐标: _____.

题型 05 一次函数的截距

【典例 1】 一次函数 $y = 2x + 3$ 的截距为_____.

【变式 1】 函数 $y = 3(x - 2) + 5$ 的图象在 y 轴上的截距为_____.

【变式 2】 已知一次函数 $y = 3x + b - 2$ 的截距是 2, 那么 $b =$ _____.

【变式 3】 平行于直线 $y = 3x - 1$ 且在 y 轴上的截距为 2 的直线表达式为_____.

【变式 4】 已知一次函数的图象在 y 轴上的截距是 5, 且过点 $(-1, 0)$, 则该函数的解析式是_____.

题型 05 一次函数图像的平移的规律

【典例 1】 如果通过平移直线 $y = 2x$ 得到 $y = 2x - 3$ ，那么直线 $y = 2x$ 须 ()

- A. 向上平移 3 个单位长度 B. 向下平移 3 个单位长度
C. 向上平移 $\frac{3}{2}$ 个单位长度 D. 向下平移 $\frac{3}{2}$ 个单位长度

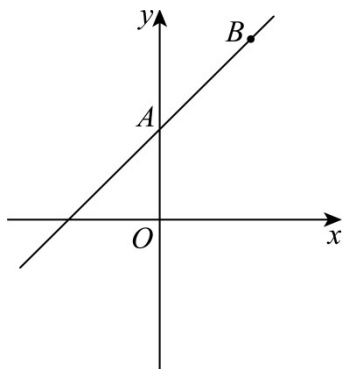
【变式 1】 若将直线 $y = kx + b$ 向上平移 4 个单位长度后得到新的直线 $y = -2x + 1$ ，则 b 的值为 ()

- A. -3 B. -1 C. 3 D. 5

【变式 2】 将直线 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 向下平移 3 个单位长度得到直线 l ，则直线 l 的解析式为_____.

【变式 3】 将正比例函数 $y = -2x$ 的图象向左平移两个单位长度，平移后的图象相应的函数表达式为__.

【变式 4】 如图直线 $y = x + 3$ 与 y 轴交于点 A ，点 B 为该直线上一点，且点 B 的纵坐标是 6.



(1) 求点 A 和点 B 的坐标；

(2) 把直线 $y = x + 3$ 向下平移 7 个单位长度，若平移后的直线与 x 轴交于点 C ，连接 AC ， BC ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

强化训练

一、单选题

1. 下列函数中，是一次函数但不是正比例函数的是 ()

A. $y = \sqrt{2}x$ B. $y = -\frac{2}{x}$ C. $y = -\frac{x-1}{2}$ D. $y = \frac{x^2-1}{x}$

2. 在平面直角坐标系中，若将直线 $y = -2x + m$ 向右平移 3 个单位长度后，恰好经过原点，则 m 的值为 ()

A. -3 B. 3 C. 6 D. -6

二、填空题

3. 若 $y = (m-2)x^{|m-4|} + m - 4$ 为一次函数，则 $m =$ _____.

4. 若 $y = (2k-3)x + b - 4$ 是关于 x 的一次函数，则 k, b 应满足的条件是_____.

5. 将直线 $y = 2x - 5$ 向上平移 3 个单位长度，所得直线的解析式为_____.

6. 将一次函数 $y = (m-2)x + 4 - n$ 的图象向下平移 3 个单位，若平移后的函数图象与一次函数 $y = 2x + 3$ 的图象重合，则 $mn =$ _____.

7. 直线 $y = -2x + 1$ 在 y 轴上的截距是_____.

8. 直线 $y = 2x + 1$ 向下平移_____个单位后，所得的直线在 y 轴上的截距是 -3.

9. 关于 x 的一次函数 $y = (3a-9)x + a - 2$ 的图像在 y 轴上的截距为正实数，则 a 的范围是_____.

三、解答题

10. 在同一直角坐标系内画出下列函数的图象：

(1) $y = 4x - 1$;

(2) $y = 4x + 1$;

(3) $y = -4x - 1$.

x	0	1
$y = 4x - 1$	-1	3
$y = 4x + 1$	1	5
$y = -4x - 1$	-1	-5

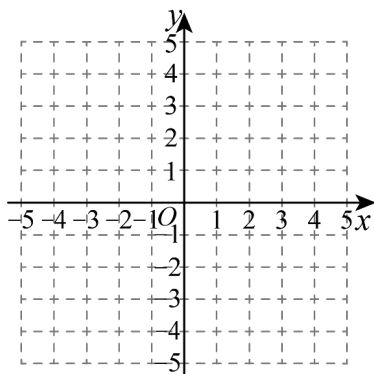
11. 在同一直角坐标系中画出函数 $y = -x, y = -x + 3$ 和 $y = -x - 3$ 的图象.

列表：

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$y = -x$	...						...

$y = -x + 3$	...						...
$y = -x - 3$	...						...

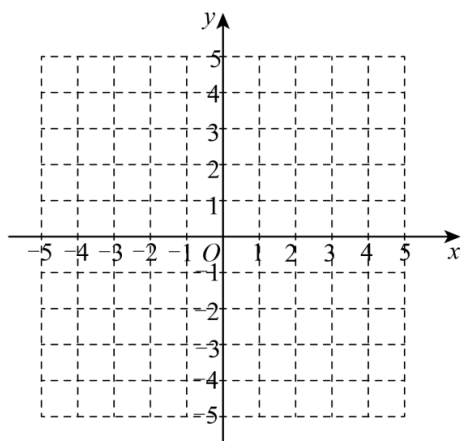
描点、连线：



7. 已知函数 $y = (2m+1)x + m - 3$.

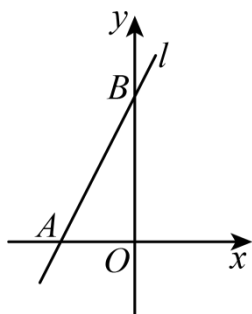
- (1) 若函数图象经过原点，求 m 的值；
- (2) 若函数的图象平行于直线 $y = 3x - 3$ ，求 m 的值；
- (3) 若当 $x = 2$ 时， $y = 4$ ，求该函数图象与 x 轴的交点坐标.

8. 已知一次函数 $y = 2x - 4$.



- (1) 画出函数图象，观察图象，当 $0 \leq x \leq 4$ 时， y 的取值范围是_____；
- (2) 平移上述函数的图象后经过点 $(-2, 1)$ ，求平移后的函数表达式；

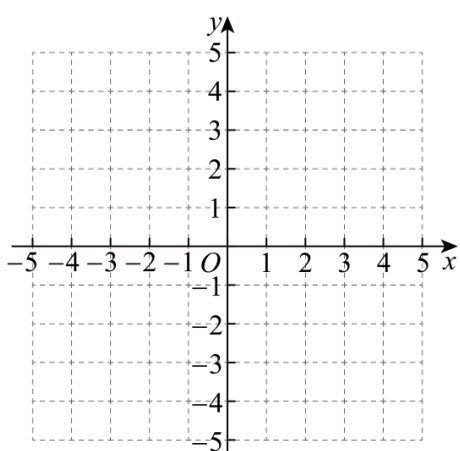
9. 如图，已知直线 $l: y = 2x + b (b > 0)$ 分别交 x 轴、 y 轴于点 A 、 B .



(1) 用含 b 的代数式表示点 A 的坐标为_____；

(2) 如果 $\triangle AOB$ 的面积等于 4，求 b 的值.

10. 在平面直角坐标系中，已知一次函数 $y = -2x + 4$ ，完成下列问题：



(1) 画一次函数 $y = -2x + 4$ 的图像；

(2) 此函数图像与坐标轴围成的三角形的面积是_____；

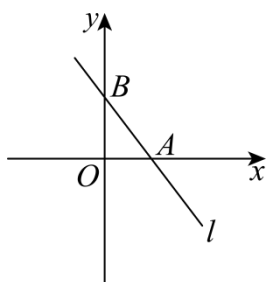
(3) 将直线 $y = -2x + 4$ 沿 y 轴向下平移 3 个单位长度，平移后的直线与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B . 在 y 轴有一点 P ，使 $\triangle ABP$ 的面积等于 2，则点 P 的坐标是_____.

11. 直线 $y = 2x + 6$ 交 x 轴于点 A ，交 y 轴于点 B ，点 C 与点 A 关于 y 轴对称，点 D 与点 B 关于 x 轴对称.

(1) 求直线 CD 的表达式；

(2) 若点 $(m, -m + 3)$ 在直线 CD 上，求 m 的值.

12. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l: y = -\frac{4}{3}x + 4$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B .



- (1)求点 A , B 的坐标；
- (2)求 AB 的长及点 O 到直线 l 的距离；
- (3)将直线 l 向下平移 20 个单位长度得到直线 l_1 ，直接写出 l 与 l_1 之间的距离.