

专题 03 期末必刷解答题

考点归纳

考点 01 计算题

考点 02 化简求值题

考点 03 因式分解

考点 04 解分式方程

考点 05 求代数式的值

考点 06 增根、无解问题

考点 07 分式方程的实际应用题

考点 08 图形的运动作图题

考点 09 整式加减的应用；幂的运算的综合应用

考点 10 整式的图形应用

考点专练

考点 01 计算题

1. 计算：

$$(1) (-2m^2)^3 \cdot m^2 \div (m^4)^2$$

$$(2) (3a-b)^2 - (a-3b)(a+3b)$$

2. 计算：

$$(1) (3x+2)(3x-2)(9x^2+4)$$

$$(2) (x+2y-3z)(x-2y-3z)$$

$$3. \text{ 计算：} (5x-7y+6z)(5x+7y-6z)$$

4. 计算：

$$(1) 6a^2b \cdot \left(-\frac{a}{2b}\right)^2 \div \frac{a}{8b} ;$$

$$(2) \frac{2a}{a^2-4} - \frac{1}{a-2} .$$

$$5. \text{ 计算：} \left(\frac{-4x}{x^2y}\right)^2 \div \left(\frac{a^{-1}x^2}{2y^{-1}}\right)^2 \cdot \left(\frac{ay}{x}\right)^{-4} .$$

$$6. \text{ 计算：} \left(y-1-\frac{3}{y+1}\right) \div \frac{y^2-4y+4}{y+1} .$$

7. 分式计算

$$(1) \frac{a+1}{a^2-a} \div \frac{a^2-1}{a^2-2a+1}$$

$$(2) \frac{a^2-1}{a^2-5a+6} \div \frac{a^2+a-2}{a-3} - \frac{a+3}{a^2-4}$$

8. 简便计算：

$$(1) 2 \times 56^2 + 8 \times 56 \times 22 + 2 \times 44^2$$

$$(2) \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$$

$$9. \text{ 化简：} (x^{-1}-y^{-1}) \div (x^{-2}-y^{-2}) - xy(x+y)^{-1}$$

考点 02 化简求值题

$$10. \text{ 先化简再求值：} [(3x-y)(2x+y)-(x-3y)^2+10y^2] \div x, \text{ 其中 } x=\frac{1}{10}, y=-1 .$$

$$11. \text{ 先化简，再求值：} [(ab+1)(ab-2)-2a^2b^2+2] \div \left(-\frac{1}{2}ab\right), \text{ 其中，} a=\frac{3}{5}, b=-\frac{10}{7} .$$

$$12. \text{ 先化简，再求值：} \left(\frac{2x+2}{x^2-1}+1\right) \div \frac{x+1}{x^2-2x+1}, \text{ 其中 } x=4 .$$

$$13. \text{ 先化简，再求值：} \left(1-\frac{2}{a+1}\right) \div \frac{a^2-2a+1}{a+1}, \text{ 其中 } a=-\frac{1}{2} .$$

$$14. \text{ 先化简，再求值：} (m^2-1) \cdot \left(\frac{m}{m+1}-\frac{1}{m-1}-1\right), \text{ 其中 } m=\frac{5}{2} .$$

考点 03 因式分解

15 . 因式分解：

$$(1) 2(a-b)^2 + a(b-a) ;$$

$$(2) 3a^3 - 6a^2b - 24ab^2 ;$$

$$(3) 7a^2 - 3b + ab - 21a ;$$

$$(4) (a^2 + 1)^2 - 4a^2 ;$$

$$(5) (a^2 + 5a)^2 - (a^2 + 5a) - 20 .$$

16 . 因式分解

$$(1) 9(m+n)^2 - 3(m-n)(m+n) .$$

$$(2) -4x^3 + 16x^2 - 16x .$$

$$(3) x^2 - 9y^2 + 9 - 6x .$$

$$(4) (x^2 - 4x)^2 - 8(x^2 - 4x) - 48 .$$

$$17 . 因式分解： m^2 - 25 + 9n^2 + 6mn$$

$$18 . 因式分解： 8ax - by + 4ay - 2bx$$

$$19 . 因式分解： m^3 - 2m^2 - 4m + 8 .$$

$$20 . 因式分解： x^2 + 4y^2 - 4xy - 1$$

考点 04 解分式方程

$$21 . 解方程： \frac{2-x}{3x-1} + \frac{7}{1-3x} = 1$$

$$22 . 解方程： \frac{3}{2x-1} - 1 = \frac{15}{4x-2}$$

23 . 解分式方程：

$$(1) \frac{1}{x-4} = \frac{8}{x^2-16} ;$$

$$(2) \frac{x}{x+1} + 1 = \frac{3x}{2x+2} .$$

考点 05 求代数式的值

24. 已知 $13x^2 - 6xy + y^2 - 4x + 1 = 0$ ，求 $(xy - x^2)^5$ 的值。

25. 已知 $a - b = 5$ ， $ab = 8$ ，求下列各式的值：

(1) $a^2 + b^2$

(2) $a^4 + b^4$

26. 已知 $3^a = 4$ ， $3^b = 10$ ， $3^c = 16$ 。

(1) 求 3^{a+b} 的值；

(2) 求 3^{2a-c} 的值。

27. 已知 $x + x^{-1} = 3$ 。

(1) 求 $x^2 + x^{-2}$ 的值。

(2) 求 $(x - x^{-1})^2$ 的值。

考点 06 增根、无解问题

28. 若关于 x 的方程 $\frac{x-2a}{x-3} + \frac{2a}{3-x} = 2$ 的解是增根，求 a 的值。

29. 已知关于 x 的方程： $\frac{x+1}{x-3} - \frac{x}{x+2} = \frac{2m-x}{x^2-x-6}$ 的解是正数，求 m 的取值范围

30. 求当 a 为何值时，关于 x 的方程 $\frac{3}{x-2} + \frac{ax}{x^2-4} = \frac{3}{x+2}$ 无解。

考点 07 分式方程的实际应用题

31. 某工人原计划在规定时间内加工 1500 个零件，在加工了 1 小时后，改进了操作方法，工作效率提升到原来的两倍。因此加工完成后，比预定的时间提前了 2 个小时。求原计划每小时加工多少个零件？

32. 某区为治理污水，需要铺设一段全长为 300 米的污水排放管道。铺设 120 米后，为了尽量减少施工对城市交通所造成的影响，以后每天铺设管道的长度比原计划增加 20%，结果共用 30 天完成这一任务。求原计划每天铺设管道的长度。

33. A 、 B 两地相距 60km，甲骑自行车从 A 地出发 1.5 小时后，乙也从 A 地出发追赶甲，乙的速度比甲快 50%，当追到 B 地时，甲比乙先到 20 分钟，求甲、乙两人的速度。

34. 2024 年 4 月第七批上海市非物质文化遗产代表性项目名录发布，青浦有 2 个非遗项目入选，其中一项是“水印版画”。为宣传非遗文化，学校开设了“水印版画”社团，计划采购 A 、 B 两种套装的工具，已知某商

店 A 种套装的工具的标价比 B 种套装的工具的标价高 30% ，如果用 1300 元购买 A 种套装的数量比用 3000 元购买 B 种套装的数量少 20 套，那么 A 种、 B 种套装的标价分别为多少元？

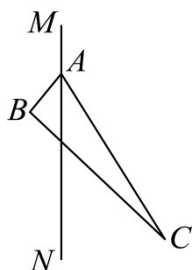
35. 某单位需要完成一项工程，单位派遣甲施工队进场施工，计划用 45 天时间完成整个工程。当甲施工队工作 24 天后，单位又派遣乙工程队协助进行施工，最终比计划提前 7 天完成施工。

(1) 若乙施工队单独施工，完成整个工程需要多少天？

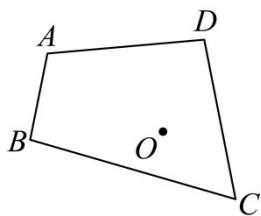
(2) 若单位一开始派遣甲、乙两支队伍合作施工，能否在 25 天内完成工程？

考点 08 图形的运动作图题

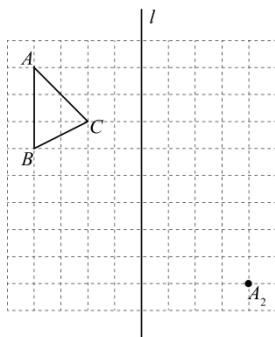
36. (1) 画出 $\triangle ABC$ 关于直线 MN 成轴对称的图形；



(2) 画出四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称的图形。



37. 在如图所示的方格中，每个小方格都是边长为 1 个单位的正方形， $\triangle ABC$ 的三个顶点都在格点上（每个小方格的顶点叫格点）

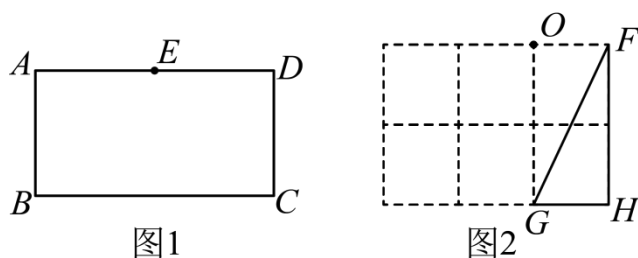


(1) 画出 $\triangle ABC$ 向右平移 2 个单位，再向下平移 4 个单位后的 $\triangle A_1B_1C_1$ ；

(2) 如果点 A 与点 A_2 关于某点成中心对称，请标出这个对称中心点 O ，并画出 $\triangle ABC$ 关于点 O 成中心对称的 $\triangle A_2B_2C_2$ ；

(3)画出 $\triangle ABC$ 关于直线 l 成轴对称的图形 $\triangle A_3B_3C_3$ 。

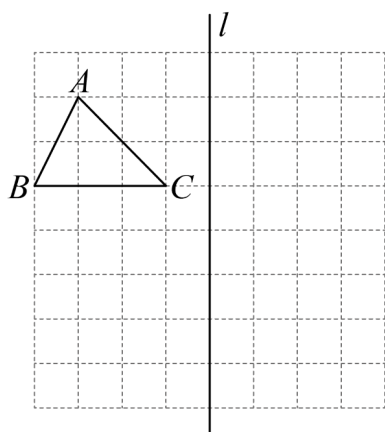
38. 仅使用无刻度的直尺完成下列作图，不写作法，保留作图痕迹。



(1)如图1，已知点 E 是长方形 $ABCD$ 边 AD 的中点，过点 E 作长方形 $ABCD$ 的对称轴；

(2)如图2，在方格纸上画出 $\triangle FGH$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 90° 后的图形 $\triangle F'G'H'$ 。

39. 在边长为1的正方形方格纸中，有如图所示的 $\triangle ABC$ （顶点都在格点上）。



(1)先画出该三角形关于直线 l 成轴对称的 $\triangle A'B'C'$ ；

(2)再画将 $\triangle A'B'C'$ 绕点 B' 逆时针方向旋转 90° 后的 $\triangle A''B''C''$ ；

(3)求点 C' 绕点 B' 旋转到点 C'' 所经过的路线长（结果保留 π ）。

考点 09 整式加减的应用；幂的运算的综合应用

40. 已知整式 A 、 B 、 C 满足 $A - B = 2C$ ，其中 $A = 4px^3 + 3qx - 6$ ， $C = px^3 + qx + 2$ ，求整式 B 。

41. 已知整式 $A = 3x^2 - 2x - 1$ ，整式 $B = -2x^2 + kx - 5$ ，且 $2A + 5B$ 的结果中不含 x 的一次项，求 k 的值。

42. 若 $a^m = a^n$ （ $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， m, n 是正整数），则 $m = n$ 。利用上面的结论解决下面的问题：

(1)如果 $2 \times (2^2)^x \times (2^x)^3 = 2^{21}$ ，求 x 的值；

(2)如果 $3^{a+2} \cdot 6^{a+2} = 18^{2a-4}$ ，求 a 的值。

43. (1) 计算： $(2a^2)^3 + (-3a^3)^2 + (a^2)^2 \cdot a^2$

(2) 已知 $a^m = 10$, $a^n = 2$, 求 a^{m-2n} 的值 ;

(3) 已知 $2x+5y-3=0$, 求 $4^x \cdot 32^y$ 的值 .

44. 在数学兴趣小组中, 同学们学到了很多有趣的数学知识, 其中有一个数学知识引起了同学们的兴趣 .

(i) 阅读和学习下面的材料 :

比较 3^{55} , 4^{44} , 5^{33} 的大小 .

分析: 小刚同学发现 55, 44, 33 都是 11 的倍数, 于是把这三个数都转化为指数为 11 的幂, 然后通过比较底数的方法, 比较了这三个数的大小, 解法如下:

解: $\because 3^{55} = (3^5)^{11} = 243^{11}$, $4^{44} = (4^4)^{11} = 256^{11}$, $5^{33} = (5^3)^{11} = 125^{11}$,

$\therefore 5^{33} < 3^{55} < 4^{44}$.

(ii) 阅读和学习下面的材料 :

已知 $a^m = 3$, $a^n = 5$, 求 a^{3m+2n} 的值 .

分析: 小明同学发现, 这些已知的幂和所求的幂的底数都相同, 于是逆用同底数幂和幂的乘方公式, 完成题目的解答. 解法如下:

解: $\because a^{3m} = (a^m)^3 = 3^3 = 27$, $a^{2n} = (a^n)^2 = 5^2 = 25$,

$\therefore a^{3m+2n} = a^{3m} \cdot a^{2n} = 27 \times 25 = 675$.

学习以上解题思路和方法, 然后完成下题:

(1) 比较 2^{606} , 3^{404} , 4^{202} 的大小 (用“<”号连接起来) .

(2) 计算: $16^{506} \times (-0.5)^{2023}$.

(3) 求点 C' 绕点 B' 旋转到点 C'' 所经过的路线长 (结果保留 π) .

考点 10 整式的图形应用

45. 如图 1 所示, 有一块边长为 a 的正方形物料, 其中心是边长为 b 的正方形空白. 为避免浪费, 在图 1 沿虚线将该物料切割成四个完全相同的图形, 并将切割后的物料拼成一个平行四边形重新利用, 如图 2 所示.

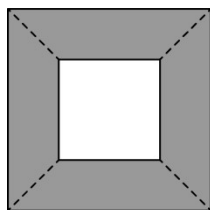


图1

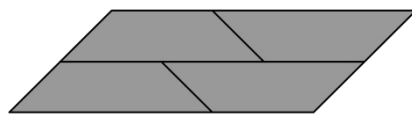
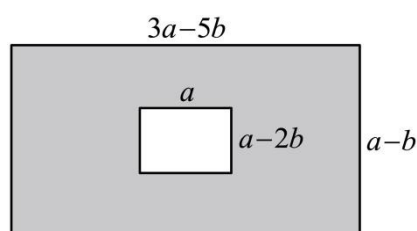


图2

(1)结合图 1、图 2 的面积关系，你认为可以验证哪一个乘法公式？

(2)若 $a = 5.5$ 分米， $b = 1.5$ 分米，求该物料的面积。

46. 如图，有一块长 $(3a-5b)$ m、宽 $(a-b)$ m 的长方形地块，计划将阴影部分建成绿化带，中间空白部分修建一座两邻边长分别为 a m 和 $(a-2b)$ m 的塑像。（图中 $a > 2b$ ）



(1)绿化带的面积是多少？（用含 a 、 b 的代数式表示，结果要化简）

(2)当 $a = 25$ m, $b = 5$ m 时，求绿化带的面积。

47. 数形结合是解决数学问题的一种重要的思想方法，借助这样方法可将抽象的数学知识变得直观起来。

如等式： $(a+m)(b+n) = ab + an + bm + mn$ 就可以用（图 1）中各长方形的面积来帮助理解，请完成下列问题：

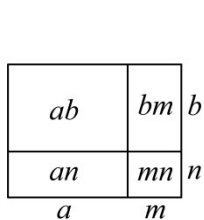


图1

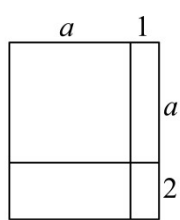


图2

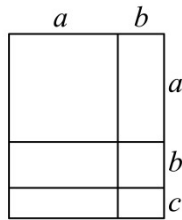


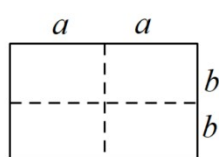
图3

(1)写出（图 2）中所表示的数学等式：_____。

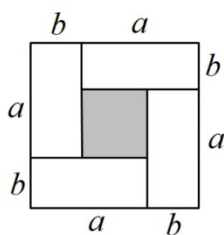
(2)从（图 3）可得 $(a+b)(a+b+c) =$ _____。

(3)请通过画图，说明等式 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ 。

48. 通常用两种不同的方法计算同一个图形的面积，可以得到一个恒等式，例如：如图①是一个长为 $2a$ ，宽为 $2b$ 的长方形，沿图中虚线用剪刀均分成四个小长方形，然后按图②的形状拼成一个正方形，请解答下列问题：



图①



图②

(1)图②中阴影部分的正方形边长的是：_____。

(2)用两种不同的方法求图②中阴影部分的面积：方法¹：_____；方法²：_____。

(3)观察图②，请你写出 $(a+b)^2$ 、 $(a-b)^2$ 、 ab 之间的等量关系_____；

(4)根据(3)中的等量关系解决如下问题：若 $x+y=7$ ， $xy=12$ ，则 $x-y=$ _____。

49. 拓展探索：

若 x 满足 $(9-x)(x-4)=4$ ，求 $(9-x)^2+(x-4)^2$ 的值。

解：设 $9-x=a$ ， $x-4=b$ ，

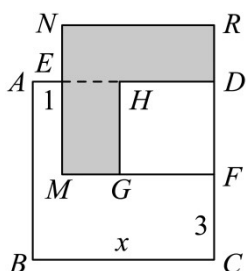
则 $(9-x)(x-4)=ab=4$ ， $a+b=(9-x)+(x-4)=5$ ，

$\therefore (9-x)^2+(x-4)^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5^2-2\times 4=17$ 。

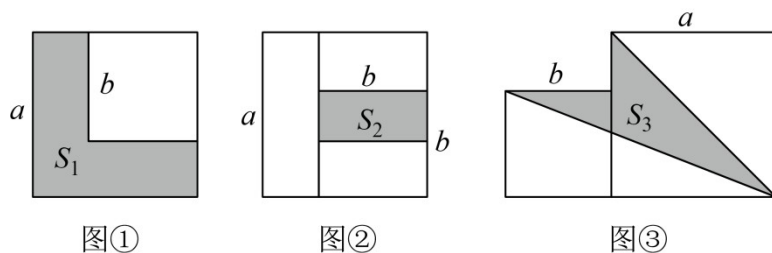
请仿照上面的方法求解问题：

(1)若 x 满足 $(5-x)(x-2)=2$ ，求 $(5-x)^2+(x-2)^2$ 的值。

(2)已知正方形 $ABCD$ 的边长为 x ， E 、 F 分别是 AD 、 DC 上的点，且 $AE=1$ ， $CF=3$ ，长方形 $EMFD$ 的面积是48，分别以 MF 、 DF 为边作正方形，求阴影部分的面积。



50. 两个边长分别为 a 和 b 的正方形如图放置(图①)，其未叠合部分(阴影)面积为 S_1 ；若再在图①中大正方形的右下角摆放一个边长为 b 的小正方形(如图②)，两个小正方形叠合部分(阴影)面积为 S_2 。



- (1) 用含 a 、 b 的代数式分别表示 S_1 、 S_2 ；
- (2) 若 $a - b = 8$ ， $ab = 13$ ，求 $S_1 + S_2$ 的值；
- (3) 用 a 、 b 的代数式表示 S_3 ，并当 $S_1 + S_2 = 36$ 时，求出图③中阴影部分的面积 S_3 ．