

专题 04 因式分解 难点分析

考点归纳

考点 01 因式分解

考点 02 因式分解的应用

考点 03 分类讨论

考点 04 求值问题

考点 05 几何应用；新定义题

考点 06 解答题

考点专练

考点 01 因式分解

1. 因式分解： $1 - \frac{1}{16}a^4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 因式分解： $x^2 - 5xy - 6y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 因式分解： $9a^2 - 3a + b - b^2$.

4. 因式分解：

(1) $a + b - ab - 1$ ；

(2) $(x^2 - 2x)^2 - 5(x^2 - 2x) - 6$.

5. 因式分解：

(1) $x^4 - 16$ ；

(2) $x^2yz + xyzr + yz - xy^2 - xz^2 - z^2r$.

6. 因式分解：

(1) $2ax^2 - 18a^3$ ；

(2) $6x^2 - 7x - 5$ ；

(3) $x^3 - xyz + x^2y - x^2z$;

(4) $(x^2 - 3x + 1)^2 - 6x^2 + 18x - 1$.

7 . 分解因式 : $24xy^2z^2(x+y-z) - 16xyz(z-x-y)^2 + 8xy^2(z-x-y)$.

8 . 因式分解 : $1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+\dots+x(x+1)^n$ (n 是正整数) = _____ .

考点 02 因式分解的应用

9 . 多项式 $8x^{2n} - 4x^n$ 提取公因式后, 剩下的因式应是 () .

A . $4x^n$

B . $2x^n - 1$

C . $4x^n - 1$

D . $2x^{n-1} - 1$

10 . 若 $-(a-b)^2 + 4c^2$ 分解因式有一个因式是 $b+2c-a$, 则另一个因式是 ()

A . $2c+b+a$

B . $2c+b-a$

C . $2c-b-a$

D . $2c-b+a$

11 . 已知 $a > b > c$, $M = a^2b + b^2c + c^2a$, $N = ab^2 + bc^2 + ca^2$, 则 M 与 N 的大小关系是 () .

A . $M > N$

B . $M = N$

C . $M > N$

D . $M < N$

12 . 已知甲、乙、丙均为 x 的一次多项式, 且其一次项的系数皆为正整数. 若甲与乙相乘的积为 $x^2 - 9$, 乙与丙相乘的积为 $x^2 + x - 6$, 则甲与丙相减的结果是 ()

A . -5

B . 5

C . 1

D . -1

13 . 本学期学校升级学生午餐的供餐方式为自助餐. 餐盘里有若干块质量相等的鸡米花, 可以平均分给 $(x+1)$ 名同学, 也可以平均分给 $(x+3)$ 名同学 (x 为大于 3 的正整数), 用代数式表示鸡米花的数量不可能是... ()

A . $(x+1)(x-3)$

B . $x(x^2 - 2x - 3)$

C . $x^2 - 4x + 3$

D . $2x^3 - 4x^2 - 6x$

14 . 有一种用“因式分解”法产生的密码记忆法, 方法是: 取一个多项式, 如: $x^4 - y^4$, 将此多项式因式分解的结果是: $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$. 再取两个值, 如: $x=9, y=7$, 那么各个因式的值是:

$(x+y)=16, (x-y)=2, (x^2+y^2)=130$, 于是就可以把“162130”作为一个六位数密码. 如果取多项式 $x^3 - xy^2$

以及 $x=20, y=2$, 那么下列密码不可能是用上述方法产生的是 ()

A . 221820

B . 222018

C . 222180

D . 201822

15. 试说明 $81^7 - 27^9 - 9^{13}$ 能被 5 整除.

考点 03 分类讨论

16. 已知二次三项式 $x^2 - kx - 15$ 能分解成系数为整数的两个一次因式的积, 则整数 k 的取值有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

17. 若 $x^2 + ax + 18$ 能分解成两个因式的积, 则整数 a 的取值可能有 ()

- A. 4 个 B. 6 个 C. 8 个 D. 无数个

18. 已知 $x^2 - ax - 24$ 在整数范围内可以分解因式, 则整数 a 的值有_____个

19. 因式分解 $x^2 + mx - 18 = (x + p)(x + q)$, 其中 m 、 p 、 q 都为整数, 则这样的 m 的最小值是_____.

20. 设二次三项式 $2x^2 + mx + 6$ 可分解为两个一次因式的乘积, 且各因式的系数都是整数, 则满足条件的整数的个数为 ()

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 3

考点 04 求值问题

21. 已知: $x + y = -5$, $xy = 2$, 则 $x^4y^2 + x^2y^4 =$ _____;

22. 已知 $x - y = 2$, $xy = \frac{1}{2}$, 那么 $x^3y + 3x^2y^2 + xy^3$ 的值为 ()

- A. 3 B. 6 C. $\frac{13}{2}$ D. $\frac{13}{4}$

23. 已知: $x^2 - xy - 6y + \frac{5}{4}y^2 + 9 = 0$, 则 $xy =$ _____.

24. 已知: $3a^3 - 2a - 5 = 0$, 则 $9a^6 - 12a^4 + 4a^2 - 10$ 的值为_____.

25. 已知 $3x^2 - x = 1$, 那么 $6x^3 + 7x^2 - 5x + 2018 =$ _____.

26. 已知 $x - y = 3$, $x^2 + y^2 = 13$, 则 $-2x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3$ 的值是_____.

27. 计算: $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$ _____.

28. 已知实数 x, y 满足 $x^2 - 4xy + 5y^2 - y = -\frac{1}{4}$, 则 $x + 2y =$ _____.

29. 已知 $a = 2017x + 2016$, $b = 2017x + 2017$, $c = 2017x + 2018$, 那么 $a^2 - ab - ac + bc =$ _____.

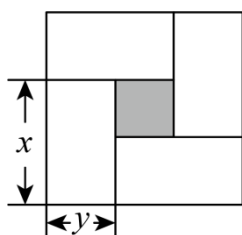
30. 已知 $a = 2020x + 2019$, $b = 2020x + 2020$, $c = 2020x + 2021$, 则多项式 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的值

为_____。

31. 若 a, b, c 满足 $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=2$, $a^3+b^3+c^3=3$, 则 $a^4+b^4+c^4=$ __

考点 05 几何应用；新定义题

32. 如图，用 4 个相同的长方形与 1 个小正方形镶嵌成的正方形图案，已知这个正方形图案的面积为 49，小正方形的面积为 9，我们用 x, y 表示小长方形的两边长 ($x > y$)。请观察图案，指出以下关系式中不正确的个数有 ()



① $x+y=7$; ② $x-y=3$; ③ $xy=10$; ④ $x^2+y^2=29$; ⑤ $x^2-y^2=21$.

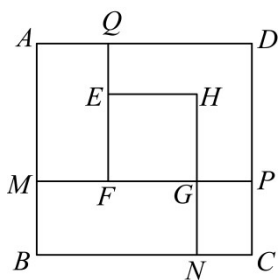
A . 0

B . 1

C . 2

D . 3

33. 如图，正方形 $ABCD$ 分割成四个长方形 $AMFQ$ 、 $QFPD$ 、 $MBNG$ 、 $GNCP$ ，它们的面积分别为 $3a^2+4ab$ 、 $6a^2+8ab$ 、 $3b^2$ 、 b^2 (其中 $a > 0$, $b > 0$)，请用含有 a, b 的代数式表示正方形 $ABCD$ 的边长_____。



34. 定义：如果一个正整数能表示为两个正整数 m, n 的平方差，且 $m-n=2$ ，则称这个正整数为“智慧优数”。例如，当 $m=3$, $n=1$ 时， $8=3^2-1^2$ ，8 是一个智慧优数，若将智慧优数从小到大排列，第 2024 个智慧优数是_____。

35. 定义：如果一个正整数能表示为两个正整数 m, n 的平方差，且 $m-n > 1$ ，则称这个正整数为“智慧优数”。例如， $16=5^2-3^2$ ，16 就是一个“智慧优数”，可以利用 $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$ 进行研究。若将“智慧优数”从小到大排列，第 4 个“智慧优数”是_____。

考点 06 解答题

36. 如图1, 有 A , B , C 三种不同型号的卡片若干, 其中 A 型是边长为 a 的正方形, B 型是长为 b , 宽为 a 的长方形, C 型是边长为 b 的正方形.

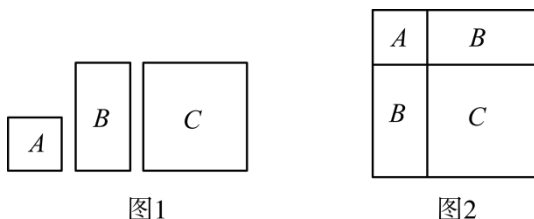


图1

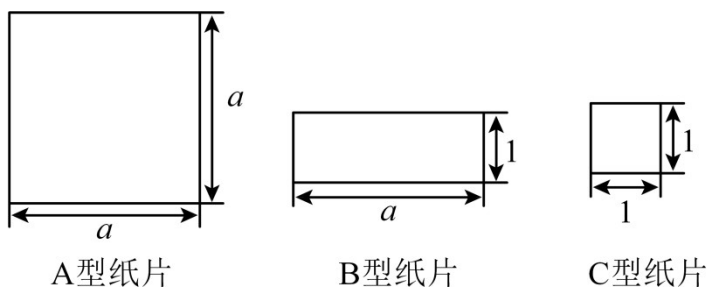
图2

(1) 若选取相应型号和数量的卡片拼出 (或镶嵌) 了一个符合某乘法公式的图形 (如图2), 则这个乘法公式是_;

(2) 请你选取相应型号和数量的卡片, 拼出 (或镶嵌) 一个符合等式 $a^2 + 3ab + 2b^2 = (a+b)(a+2b)$ 的长方形;

(3) 现有 A 型卡片 1 张, B 型卡片 4 张, C 型卡片 5 张, 从这 10 张卡片中拿掉一个卡片, 余下的卡片全用上, 能拼出 (或镶嵌) 一个长方形 (或正方形) 的有多少种拼法? 请你通过计算说明理由.

37. 如图, 有 A 型、 B 型、 C 型三种不同的纸板, 其中 A 型: 边长为 a 厘米的正方形; B 型: 长为 a 厘米, 为 1 厘米的长方形; C 型: 边长为 1 厘米的正方形.



A型纸片

B型纸片

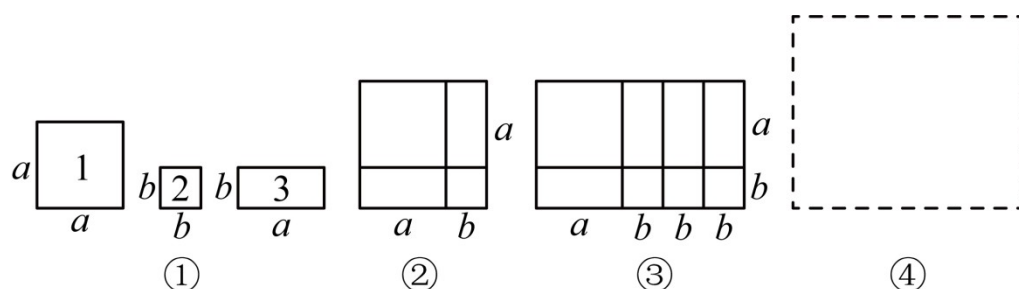
C型纸片

(1) A 型 2 块, B 型 4 块, C 型 4 块. 此时纸板的总面积为_____;

(2) 从这 10 块纸板中拿掉 1 块 A 型纸板, 剩下的纸板在不重叠的情况下, 可以紧密的排出一个大正方形. 这个大正方形的边长为_____;

(3) 从这 10 块纸板中拿掉 2 块同类型的纸板, 使得剩下的纸板在不重叠的情况下, 可以紧密的排出两个相同形状的大正方形, 请问拿掉的是 2 块哪种类型的纸板? 此时大正方形的面积是多少平方厘米? (计算说明)

38. 小刚同学动手剪了如图①所示的正方形与长方形纸片若干张. 他用 1 张 1 号、1 张 2 号和 2 张 3 号卡片拼出新的图形 (如图②). 根据图②的面积关系可得等式: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, 即使用拼图将 $a^2 + 2ab + b^2$ 分解因式.

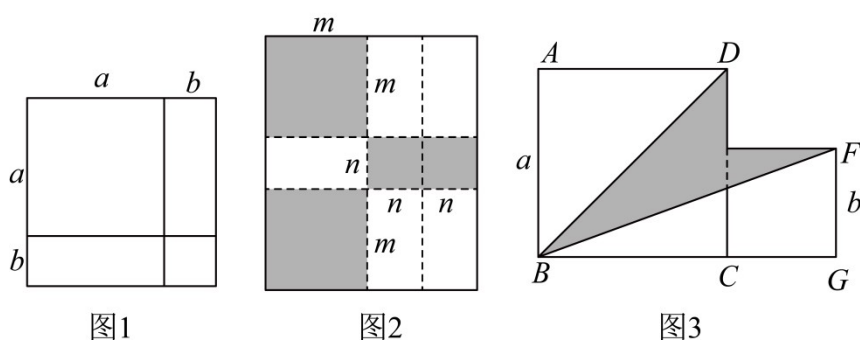


(1) 如果要拼成一个长为 $(a+2b)$ ，宽为 $(a+b)$ 的大长方形，则需要 2 号卡片_____张，3 号卡片_____张；

(2) 当他拼成如图③所示的长方形，根据图③的拼图可以把多项式 $a^2 + 4ab + 3b^2$ 分解因式，其结果是_____；

(3) 动手操作，请依照小刚的方法，在④的方框中画出面积为 $a^2 + 5ab + 6b^2$ 的长方形拼图，并利用拼图分解因式 $a^2 + 5ab + 6b^2$ 。

39. 我们知道某些代数恒等式可用一些卡片拼成的图形面积来解释。



(1) 如图 1 可以用来解释完全平方公式：_，反过来利用一些卡片拼成的图形面积也可以对某些二次三项式进行因式分解。

(2) 如图 2，将一张长方形纸板按图中虚线裁剪成九块，其中有两块是边长都为 m 的大正方形，两块是边长都为 n 的小正方形，五块是长为 m ，宽为 n 的全等小长方形，且 $m > n$ 。

① 观察图形，可以发现代数式 $2m^2 + 5mn + 2n^2$ 可以分解因式为_；

② 若每块小长方形的面积为 12cm^2 ，四个正方形的面积和为 50cm^2 ，试求 $m-n$ 的值。

(3) 将图 3 中边长为 a 和 b 的正方形拼在一起， B 、 C 、 G 三点在同一条直线上，连接 BD 和 BF ，若这两个正方形的边长满足 $a+b=5$ ， $ab=6$ ，请求出阴影部分的面积。

40. 阅读理解应用

待定系数法：设某一整式的全部或部分系数为未知数，利用当两个整式为恒等式时，同类项系数相等的原

理确定这些系数，从而得到待求的值。

待定系数法可以应用到因式分解中，例如问题：因式分解 $x^3 - 1$ ，因为 $x^3 - 1$ 为三次整式，若能因式分解，则可以分解成一个一次整式和一个二次整式的乘积故我们可以猜想 $x^3 - 1$ 可以分解成

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + ax + b)$ 展开等式右边得： $x^3 + (a - 1)x^2 + (b - a)x - b$ ，根据待定系数法原理，等式两边整式的同类项的对应系数相等， $a - 1 = 0$ ， $b - a = 0$ ， $-b = -1$ ，

可以求出 $a = 1$ ， $b = 1$ ，所以 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

(1) 若 x 取任意值，等式 $x^2 + 2x + 3 = x^2 + (3 - a)x + 3$ 恒成立，则 $a = \underline{\quad}$ ；

(2) 已知整式 $3x^3 + x^2 + 4x - 4$ 有因式 $3x - 2$ ，请用待定系数法求出该整式的另一因式。

41. 【阅读材料】19 世纪的法国数学家苏菲·热门给出了一种分解因式 $x^4 + 4$ 的方法：他抓住了该式只有两项，而且属于平方和 $(x^2)^2 + 2^2$ 的形式，要使用公式法就必须添一项 $4x^2$ ，随即将此项 $4x^2$ 减去，即可得 $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$ ，人们为了纪念苏菲·热门给出的这一解法，就把它叫做“热门定理”。

【知识应用】(1) 利用“热门定理”把 $m^4 + 64$ 分解因式。

【知识迁移】热门定理的本质是构造完全平方，用的是“添项”的方法，对于超过两项的多项式，也可以采取“添项”的方法，先添项再减去这项，构造完全平方进行分解。例如对于二次三项式 $x^2 + 2xa - 3a^2$ ，可以先加上一项 a^2 ，使它与 $x^2 + 2xa$ 的和成为一个完全平方式，再减去 a^2 ，整个式子的值不变，于是有 $x^2 + 2xa - 3a^2 = (x^2 + 2xa + a^2) - a^2 - 3a^2 = (x + a)^2 - 4a^2 = (x + a)^2 - (2a)^2 = (x + 3a)(x - a)$ ，像这样的方法统称为“配方法”。

(2) 请利用“配方法”分解因式：

① $m^2 - 10m + 16$ ；

② $a^4 + a^2 + 1$ 。

42. 阅读下列材料，然后回答问题：

问题：因式分解： $x^3 - 5x^2 + 4$

解答：对于任意一元整式 $f(x)$ ，其奇次项系数之和为 m ，偶次项系数之和为 n ，若 $m = n$ ，则 $f(-1) = 0$ ，若 $m = -n$ ，则 $f(1) = 0$ ，在 $x^3 - 5x^2 + 4$ 中，因为 $m = 1$ ， $n = -5 + 4 = -1$ ，所以把 $x = 1$ 代入整式 $x^3 - 5x^2 + 4$ ，

得其值为 0，由此确定整式 $x^3 - 5x^2 + 4$ 中有因式 $(x-1)$ 。于是可设 $x^3 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x^2 + px + q)$ ，分别求出 p ， q 值，再代入 $x^3 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x^2 + px + q)$ ，就可以把整式 $x^3 - 5x^2 + 4$ 因式分解，这种因式分解的方法叫做“试根法”。

(1) 上述式子中 $p = \underline{\quad}$ ， $q = \underline{\quad}$ ；

(2) 对于一元整式 $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ，必定有 $f(\underline{\quad}) = 0$ ；

(3) 请你用“试根法”分解因式： $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ 。

43.

(1) 【阅读与思考】

整式乘法与因式分解是方向相反的变形。如何把二次三项式 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 分解因式呢？我们已经知道：

$(a_1x + c_1)(a_2x + c_2) = a_1a_2x^2 + a_1c_2x + a_2c_1x + c_1c_2 = a_1a_2x^2 + (a_1c_2 + a_2c_1)x + c_1c_2$ 。反过来，就得到：

$a_1a_2x^2 + (a_1c_2 + a_2c_1)x + c_1c_2 = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$ 。我们发现，二次三项式 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的二次项的系数 a 分解成 a_1a_2 ，常数项 c 分解成 c_1c_2 ，并且把 a_1 ， a_2 ， c_1 ， c_2 ，如图 1 所示摆放，按对角线交叉相乘再相加，就得到 $a_1c_2 + a_2c_1$ ，如果 $a_1c_2 + a_2c_1$ 的值正好等于 $ax^2 + bx + c$ 的一次项系数 b ，那么 $ax^2 + bx + c$ 就可以分解为 $(a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$ ，其中 a_1 ， c_1 位于图的上一行， a_2 ， c_2 位于下一行。像这种借助画十字交叉图分解系数，从而帮助我们二次三项式分解因式的方法，通常叫做“十字相乘法”。

例如，将式子 $x^2 - x - 6$ 分解因式的具体步骤为：首先把二次项的系数 1 分解为两个因数的积，即 $1 = 1 \times 1$ ，把常数项 -6 也分解为两个因数的积，即 $-6 = 2 \times (-3)$ ；然后把 1，1，2，-3 按图 2 所示的摆放，按对角线交叉相乘再相加的方法，得到 $1 \times (-3) + 1 \times 2 = -1$ ，恰好等于一次项的系数 -1，于是 $x^2 - x - 6$ 就可以分解为 $(x+2)(x-3)$ 。

请同学们认真观察和思考，尝试在图 3 的虚线方框内填入适当的数，并用“十字相乘法”分解因式：

$$x^2 + x - 6 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 【理解与应用】

请你仔细体会上述方法并尝试对下面两个二次三项式进行分解因式：

① $2x^2 + 5x - 7 = \underline{\hspace{2cm}};$

② $6x^2 - 7xy + 2y^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 【探究与拓展】

对于形如 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ 的关于 x, y 的二元二次多项式也可以用“十字相乘法”来分解，如图

4. 将 a 分解成 mn 乘积作为一列， c 分解成 pq 乘积作为第二列， f 分解成 jk 乘积作为第三列，如果 $mq + np = b$ ， $pk + pj = e$ ， $mk + nj = d$ ，即第 1, 2 列、第 2, 3 列和第 1, 3 列都满足十字相乘规则，则原式 $= (mx + py + j)(nx + qy + k)$ ，请你认真阅读上述材料并尝试挑战下列问题：

① 分解因式 $3x^2 + 5xy - 2y^2 + x + 9y - 4 =$ _____；

② 若关于 x, y 的二元二次式 $x^2 + 7xy - 18y^2 - 5x + my - 24$ 可以分解成两个一次因式的积，求 m 的值。

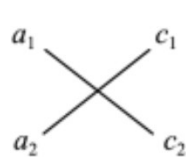


图1

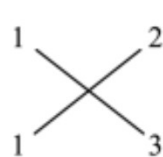


图2

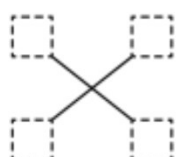


图3

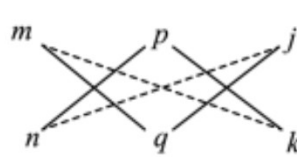


图4