

专题 02 等腰三角形中的“手拉手”模型

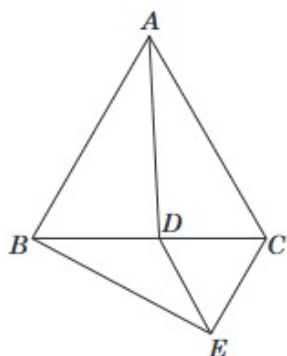
“手拉手”模型是指共顶点且顶角相等的两个等腰三角形，如果把等腰三角形顶角看作“头”，左底角看作“左手”，右底角看作“右手”，则可以描述成：头对头，左手拉左手，右手拉右手，这也正是手拉手模型名称的由来。

手拉手模型常利用旋转全等、旋转相似的思想进行解题。常见的手拉手模型包括等腰三角形、等边三角形、等腰直角三角形中的手拉手模型。

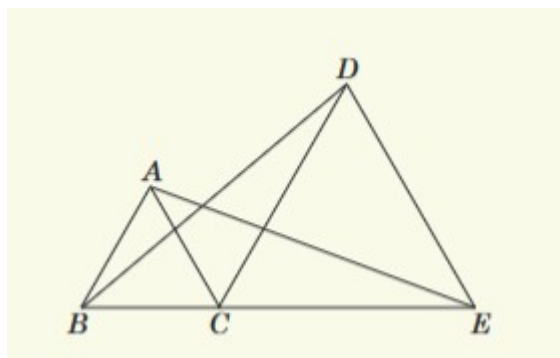
真题现模型

1. (课本 P129 例 2) 如图，已知：在等边三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 D ，以 CD 为边向外作等边三角形 CDE ，连接 AD 、 BE 。

求证： $BE=AD$ 。

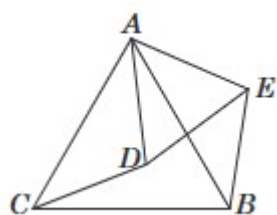


2. (课本 P130 习题 2) 如图，已知：点 B 、 C 、 E 在同一直线上， $\triangle ABC$ 、 $\triangle DCE$ 都是等边三角形，连接 AE 、 BD 。求证： $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ 。



3. (课本 P131 习题 3) 如图，已知：点 D 在 $\triangle ABC$ 的内部， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，连接 EB 、 DC 。求

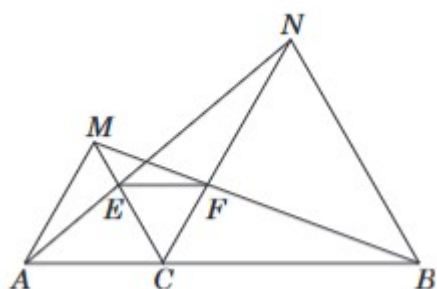
证：EB=DC



4. (课本 P143 习题 6) 如图，已知：C 为线段 AB 上一点， $\triangle ACM$ 、 $\triangle CBN$ 都是等边三角形，直线 AN、MC 相交于点 E，直线 BM、CN 相交于点 F。

(1) 求证：AN=MB；

(2) 求证： $\triangle CEF$ 是等边三角形。

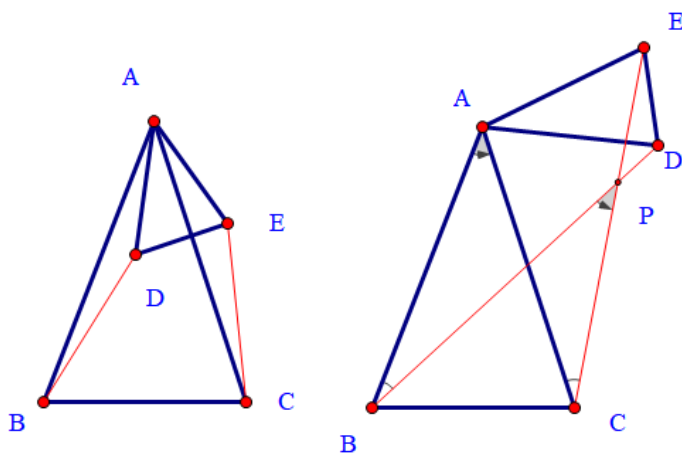


提炼模型

【基本模型】（两个等腰，顶角相等、共顶点→全等特明显）

条件：①若 $AE=BF$ ， $AB=AC$ ，② $\angle BAC=\angle DAE$

结论：① $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ；② $DB=EC$ （手拉线相等）；③ $\angle BPC=\angle BAC$ （手拉线的夹角等于等腰的顶角）；



【分析】

①由旋转角相等得到 $\angle DAB=\angle EAC$ ，结合 $AD=AE$ ， $AB=AC$ 即可证得 $\triangle ADB \cong \triangle AEC$ ；

②由结论①中的全等，得到结论 $DB=EC$ ， $\angle ABD=\angle ACE$

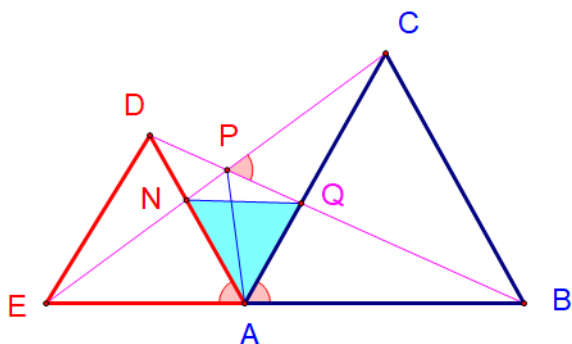
③由 $\angle ABD=\angle ACE$ 及“8 字形”得到 $\angle BPC=\angle BAC$ 。

【模型演变】（两个等边共顶点）

当两个等边三角形有两边共线时，有如下结论：

① $\triangle ADB \cong \triangle AEC \rightarrow DB=EC$

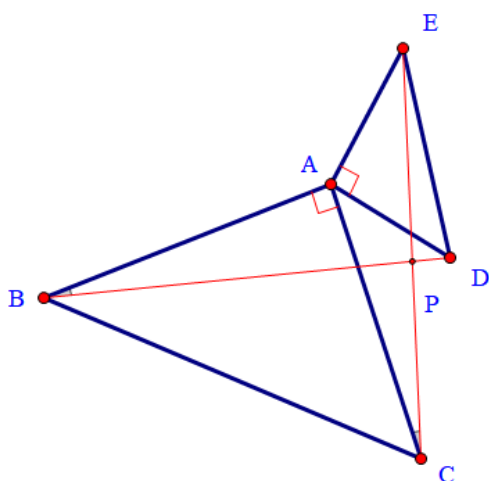
② $\triangle ANQ$ 为等边三角形



【模型拓展】（两个等腰直角共顶点）

$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 为等腰直角三角形

结论：① $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ② $BD = CE$ ③ $BD \perp CE$ (由全等可知 $\angle ABP = \angle ACP$, 结合 8 字形图可证)

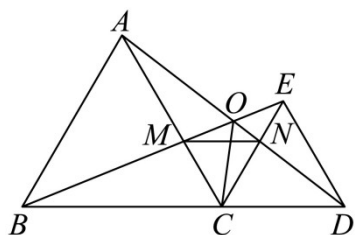


模型运用

1. 如图所示，已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 均是等边三角形，点 B 、 C 、 D 在同一条直线上， BE 与 AD 交于点 O ，

AD 与 CE 交于点 N ， AC 与 BE 交于点 M ，连接 OC 、 MN ，则下列结论：① $AD = BE$ ；② $AN = BM$ ；③

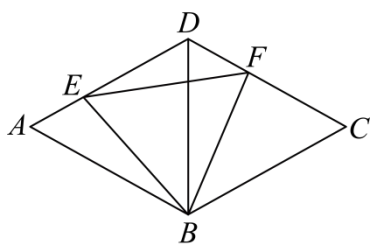
$MN \parallel BD$; ④ $\triangle CMN$ 为等边三角形 ; 其中正确的结论个数为 ()



- A . 1 个 B . 2 个 C . 3 个 D . 4 个

2 . 等边三角形 ABD 和等边三角形 CBD 的边长均为 5 , 现把它们拼合起来如图所示 , E 是 AD 上异于 A, D

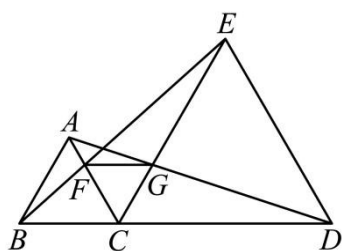
两点的一个动点 , F 是 CD 上一个动点 , 满足 $AE + CF = 5$, 当 E, F 移动时 , $\triangle BEF$ 的形状为 ()



- A . 等边三角形
B . 等腰直角三角形
C . 等腰三角形非等边三角形
D . 无法确定

3 . 如图 , $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形 , 且 B, C, D 在同一直线上 , 连接 AD , BE 分别交 CE , AC 于

点 G, F , 连接 FG .

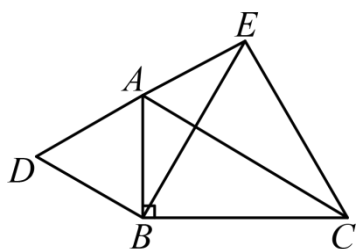


(1) 求证： $\angle ADC = \angle BEC$ ；

(2) 若 $FG = 2$ ，求 $\triangle FGC$ 的周长。

4. (24-25 七年级下·上海青浦·期末) 已知：如图，分别以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两条直角边 AB 、 BC 为边作等边三

角形 ABD 和等边三角形 BCE ，连接 DE ，且点 A 在线段 DE 上。

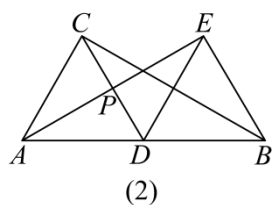
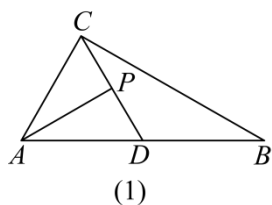


(1) 求证： $DE = AC$ ；

(2) 求证： $BE \perp AC$ 。

5. (24-25 七年级下·上海松江·期末) 已知：在 $\triangle ACD$ 中， P 是 CD 的中点， B 是边 AD 延长线上的一点，

$BD = AC$ ，连接 BC 、 AP 。



(1) 如图 (1)，如果 $AP \perp CD$ ，证明： $BD = AD$ ；

求 $\angle BDC$ 的度数 .

解 : $\because \triangle ABC$ 为等边三角形 ,

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ \quad (\quad) ,$$

$$AB = AC ,$$

$$\angle AOB = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOD = 60^\circ ,$$

$$\angle ODA = \angle OAD ,$$

$$\therefore \angle \quad = \angle \quad (\quad) ,$$

$$\therefore \angle AOD + \angle ADO + \angle OAD = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle ADO = \angle OAD = 60^\circ ,$$

$$\therefore \triangle AOD \text{ 为等边三角形 } (\quad) ,$$

$$\therefore AO = AD , \quad \angle OAD - \angle OAC = \angle BAC - \angle OAC ,$$

$$\text{即 } \angle 1 = \angle 2 ,$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle ACD ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle AOB = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle BDC = 60^\circ .$$

7 . 如图 , 四边形 $ABCD$ 中 , $AB = BC$, $\angle BAC = 60^\circ$, 以 AD 为边作等边 $\triangle ADE$, 连接 CE .

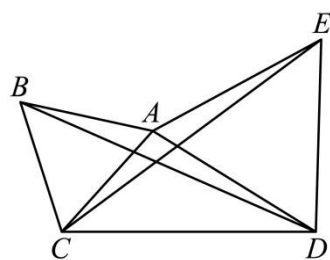


图1

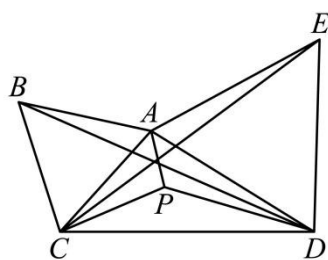


图2

(1) 求证： $BD = CE$ ；

(2) 如图2， P 为四边形 $ABCD$ 内一点，且 $\angle APD = 120^\circ$ 。求证： $PA + PD + PC > BD$ 。

8. 数学活动课上，老师让同学们准备两个等腰直角三角形纸片，将直角顶点重合到一起，利用图形的旋

转开展探究活动。

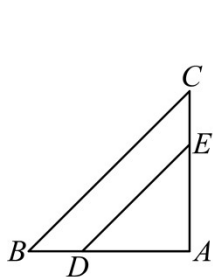


图1

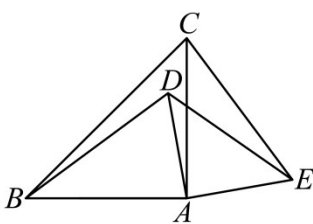


图2

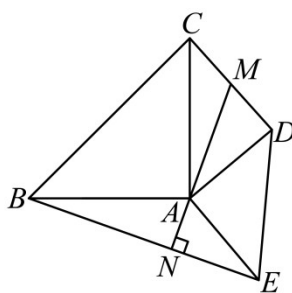


图3

(1) 当两个等腰直角三角形纸片如图1放置时， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D 和点 E 分别在 AB 和 AC 上，且

$AD = AE$ ，则 BD 与 CE 的数量关系是——，位置关系是——；

(2) 将图1中的 $\triangle ADE$ 绕着点 A 顺时针旋转，连接 BD, CE ，在旋转过程中 BD 与 CE 的数量关系和位置关系

与(1)中是否发生变化？请结合图2加以证明；

(3) 将 $\triangle ADE$ 绕着点 A 顺时针旋转到图3的位置，过点 A 作 $AN \perp BE$ 于点 N ，延长 NA 交 CD 于点 M 。求证：

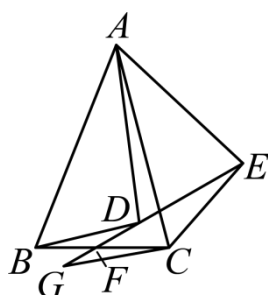
M 为 CD 的中点。

9. (25-26 八年级上·上海嘉定·期中) 如图，把 $\triangle ABD$ 绕着点 A 逆时针旋转 (旋转角小于 180°) 至 $\triangle ACE$ ，

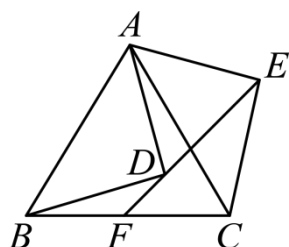
连接 BC 、 ED ，延长 ED 交 BC 于点 F 。

(1) 如图，若 $\angle ADB = 90^\circ$ ，旋转角为 40° ，过点 C 作 BD 的平行线，交 EF 的延长线于点 G ，求证：

$$BD = CG$$



(2) 如图，若点 F 是 BC 中点，旋转角为 60° ，且 $ED = EC$ ，求 $\angle BAD$ 度数。



(3) 如图，旋转角为 40° ，点 F 与点 B 重合， $\triangle BDC$ 为以 BD 为腰的等腰三角形，求 $\angle BAD$ 的度数。



10. 我们已经认识了图形的轴对称、平移和旋转。这是图形的三种基本变换，图形经过这样的变换，虽然

位置发生了改变，但图形的形状与大小都不发生变化，反映了图形之间的全等关系。这种运用动态变换研

究图形之间的关系的方法是一种重要而且有效的方法，同学们学完了这些知识后，王老师在黑板上给大家

出示了这样一道题目：

(1) 如图1， $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形，点 A ， D ， E 在同一直线上，连结 BE 。试说明：

$AD = BE$ 。聪明的小亮很快就找到了解决该问题的方法，请你帮小亮把说理过程补充完整。

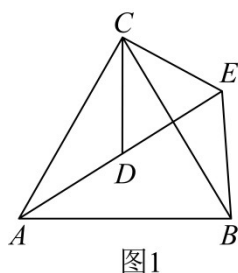


图1

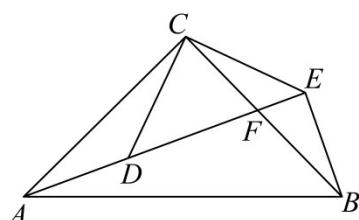


图2

解： $\because \triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等边三角形，

$\therefore CA = CB$ ， $CD = CE$ ， $\angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$ （等边三角形的性质）

$\therefore \angle ACD = \textcircled{1}$ ；（等式的性质）

$\therefore \angle ACD$ 绕点 C 按逆时针方向旋转 $\textcircled{2}$ °，能够与 $\textcircled{3}$ 重合。

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$ 。（旋转变换的性质）

$\therefore AD = BE$ （全等三角形对应边相等）

【拓展应用】

(2) 当同学们把这题领会感悟后，王老师又在上题基础上追加了一问：试求 $\angle AEB$ 的度数，聪明的同

学们你能解决吗？请写出你的求解过程（此问不用写推理依据）。

【尝试解决】

(3) 如图 2, $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 均为等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, $AC = BC$, $DC = EC$, 点 A , D , E 在同一直线上, 连结 BE , AE 与 BC 交于点 F , 点 F 恰好为 BC 中点.

①直接写出 $\angle AEB$ 的度数为_;

②若 $BE = 6$, 求 $\triangle BCE$ 的面积.