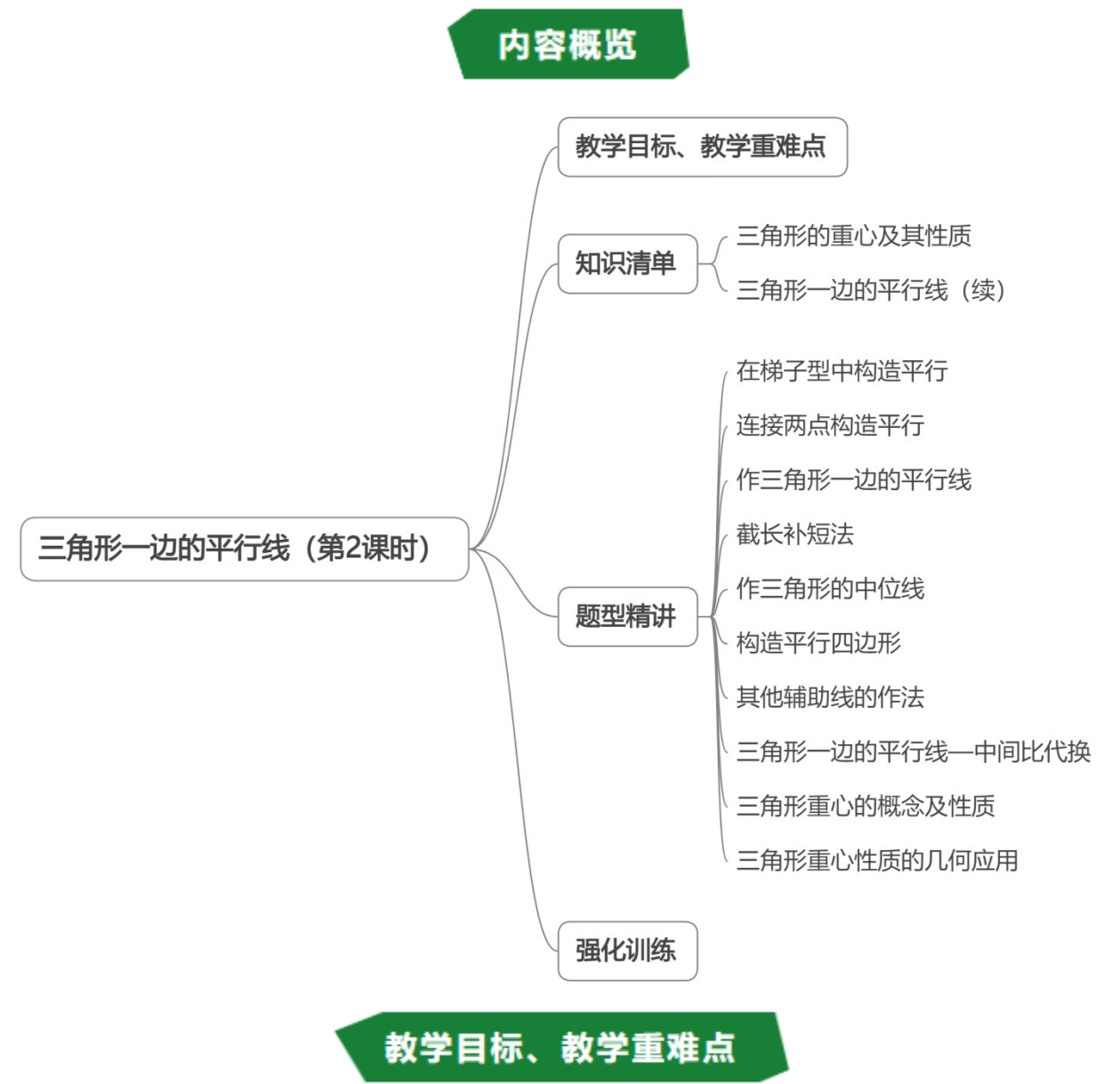


专题 24.5 三角形一边的平行线（第 2 课时）



教学目标	1. 掌握三角形一边的平行线的性质中间比代换； 2. 学会构造平行的七种技巧； 3. 掌握重心的概念及性质；重心性质的几何应用。
教学重难点	1.重点 (1) 常用构造平行辅助线的作法； (2) 比例线段的化简；中间比代换； (3) 重心的性质的推导过程；重心性质的应用。

2.难点

- (1) 构造平行；
- (2) 综合分析法，比例线段的化简与几何图形的性质综合分析；
- (3) 分类讨论思想。

知识清单

知识点1 三角形的重心及其性质

1.知识引入

例题 已知：如图 24-19, BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的中线，交于点 G. 求证： $\frac{GE}{GB} = \frac{GF}{GC} = \frac{1}{2}$

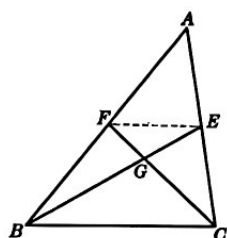


图 24-19

分析 要证明 $\frac{GE}{GB} = \frac{GF}{GC}$, 只要证明 $EF \parallel BC$. 根据已知条件，可知 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，由此可推出所要证明的结论.

证明 联结 EF.

由 BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的中线，可知 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

$$\therefore EF \parallel BC, \quad EF = \frac{1}{2} BC, \quad \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$$

$\therefore EF \parallel BC,$

$$\therefore \frac{GE}{GB} = \frac{GF}{GC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2} \text{ (三角形一边的平行线性质的推论).}$$

$$\therefore \frac{GE}{GB} = \frac{GF}{GC} = \frac{1}{2}$$

问题：在图 24-19 中，如果 $\triangle ABC$ 的另一条中线 AD 与 BE 相交于点 G'，如图 24-20 所示，那么这个交点 G' 与交点 G 是否同一个点？

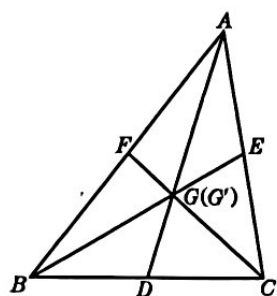


图 24-20

解释：通过联结 DE ，运用例题的证明方法，可得 $\frac{GE}{GB} = \frac{GD}{GA} = \frac{1}{2}$ 因为点 G' 与点 G 同在中线 BE 上，

$\frac{GE}{GB} = \frac{1}{2}$ ，且 $\frac{GE}{GB} = \frac{1}{2}$ 所以点 G' 与点 G 是同一点. 这就是说，三角形的三条中线交于一点.

2. 三角形的重心：三角形三条中线的交点叫做三角形的重心.

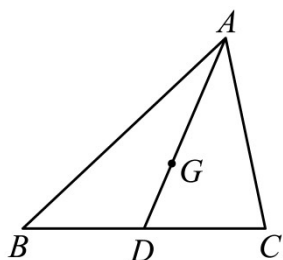
3. 重心的性质：三角形的重心到一个顶点的距离，等于它到这个顶点对边中点的距离的二倍.

4. 重心的画法：两条中线的交点.

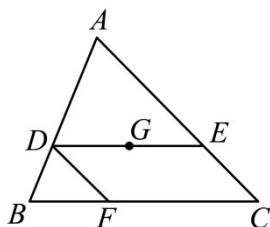
【即学即练】

1. 已知在 $\triangle ABC$ 中， AD 是中线， G 是重心，如果 $GD = 3\text{cm}$ ，那么 $AG = \underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$.

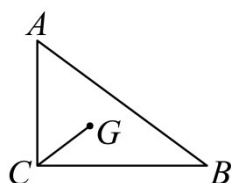
2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 的中点，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心. $AD = 6$ ，则 $AG = \underline{\hspace{2cm}}$.



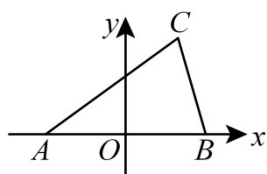
3. 如图，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心， DE 过点 G ， $DE \parallel BC$ ， $DF \parallel AC$ ，那么 $BF : CF = \underline{\hspace{2cm}}$.



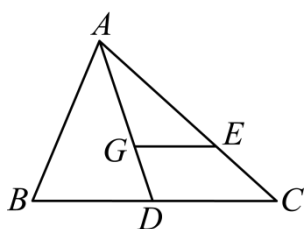
4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，若点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心， $AB = 6$ ，则 $CG = \underline{\hspace{2cm}}$.



5. 如图，在平面直角坐标系中，已知 $A(-8,0)$ ， $B(8,0)$ ， $C(6,9)$ ，则 $\triangle ABC$ 重心的坐标是_____。



6. 如图，点 G 是 $\triangle ABC$ 重心， $GE \parallel BC$ ，如果 $BC = 6$ ，那么线段 GE 的长为



知识点 2 三角形一边的平行线（续）

1. 三角形一边的平行线的六种解题技巧：

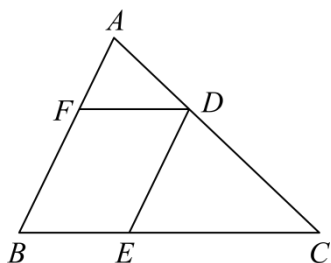
- ①中间比代换法证比例式；②等积代换法证比例式；③等比代换法证比例中项；
④平行法证比例式；⑤等比过渡法证线段相等；同分母的中间比代换法。

2. 构造平行

- ①连接两点构造平行；②作三角形一边的平行线；③截长补短法；④构造平行四边形……

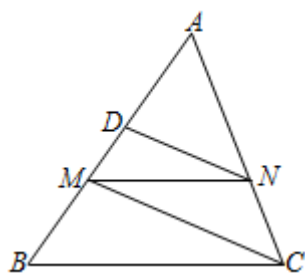
【即学即练】

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 、 F 分别在边 AC 、 BC 、 AB 上， $DE \parallel AB$ ， $DF \parallel BC$ ，则下列比例式中错误的是（ ）



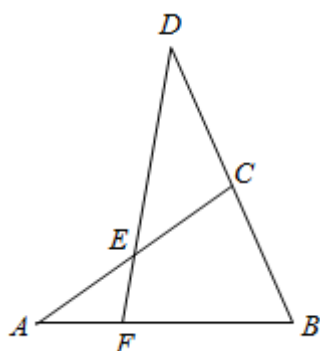
- A. $\frac{AF}{DE} = \frac{AD}{DC}$ B. $\frac{DC}{AC} = \frac{CE}{BC}$ C. $\frac{AD}{AC} = \frac{FD}{BC}$ D. $\frac{DE}{AB} = \frac{BE}{EC}$

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $MN \parallel BC$ ， $DN \parallel MC$ ，下列结论正确的是（ ）

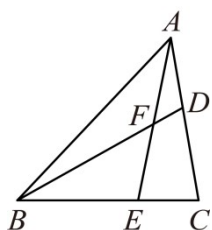


- A. $\frac{AM}{NC} = \frac{AM}{AB}$ B. $\frac{AD}{DM} = \frac{DN}{MC}$ C. $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{AC}$ D. $\frac{DN}{MC} = \frac{MN}{BC}$

3. 如图，已知 E 是 AC 的中点， C 是 BD 的中点，那么 $\frac{FE}{ED} = \underline{\hspace{1cm}}$.

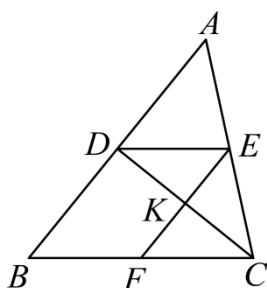


4. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，点 E 是 BC 上的一点， $BE = 2CE$ ， F 是 AE 上的中点，则 $DF:BF$ 的值 ()



- A. 1:4 B. 2:5 C. 1:5 D. 3:5

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 为 AB 上一点，过点 D 作 BC 的平行线交 AC 于点 E ，过点 E 作 AB 的平行线交 BC 于点 F ，连接 CD ，交 EF 于点 K ，则下列说法正确的是 ()



- A. $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{EF}$ B. $\frac{FK}{KE} = \frac{BF}{FC}$

$$C. \frac{DE}{FC} = \frac{AE}{EC}$$

$$D. \frac{BD}{AD} = \frac{BF}{FC}$$

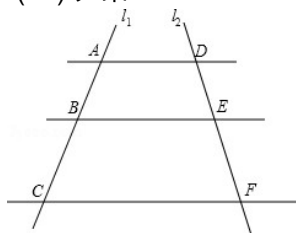
题型精讲

题型 01 在梯子型中构造平行

【典例 1】 如图，已知 $AD \parallel BE \parallel CF$ ，它们依次交直线 l_1 、 l_2 于点 A 、 B 、 C 和点 D 、 E 、 F 。

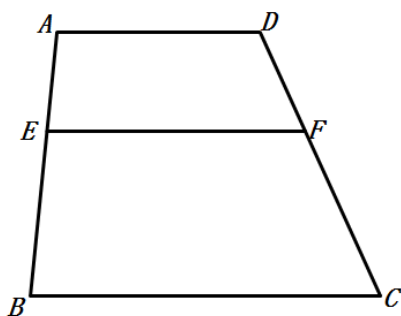
(1) 如果 $AB = 6$ ， $BC = 8$ ， $DF = 21$ ，求 DE 的长；

(2) 如果 $DE:DF = 2:5$ ， $AD = 9$ ， $CF = 14$ ，求 BE 的长。



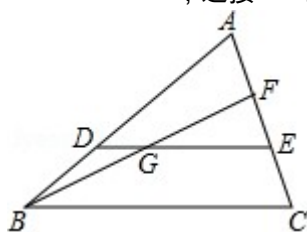
【变式 1】 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD = 3$ ， $BC = 5$ ， E 、 F 是两腰上的点，且

$EF \parallel AD$ ， $AE:EB = 1:2$ ，则 $EF =$ __



题型 02 连接两点构造平行

【典例 1】 如图，点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上，若 $AD:BD = 2:1$ ，点 G 在 DE 上， $DG:GE = 1:2$ ，连接 BG 并延长交 AC 于点 F ，则 $AF:EF$ 等于()



A. 1:1

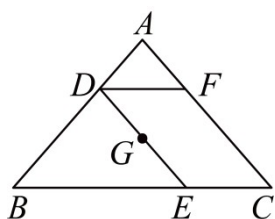
B. 4:3

C. 3:2

D. 2:3

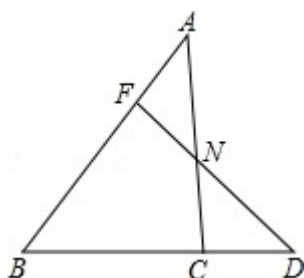
【变式 1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 G 为 ABC 的重心，过点 G 作 $DE \parallel AC$ 分别交边 AB 、 BC 于点 D 、 E ，过

点 D 作 $DF \parallel BC$ 交 AC 于点 F ，如果 $DF = 4$ ，那么 BE 的长为__。

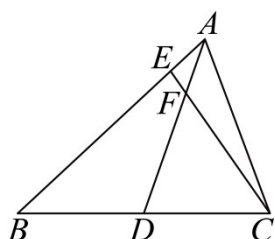


题型 03 作三角形一边的平行线

【典例 1】 . 如图, 已知点 F 在 AB 上, 且 $AF:BF=1:2$, 点 D 是 BC 延长线上一点, $BC:CD=2:1$, 连接 FD 与 AC 交于点 N , 求 $FN:ND$ 的值.



【变式 1】 . 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 点 F 是 AD 上一点, 且 $DF=2AF$, 连接 CF 并延长交 AB 于点 E .

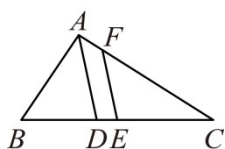


(1) 若 $AE=1$, 求 AB 的长;

(2) 求 $\frac{EF}{CF}$ 的值.

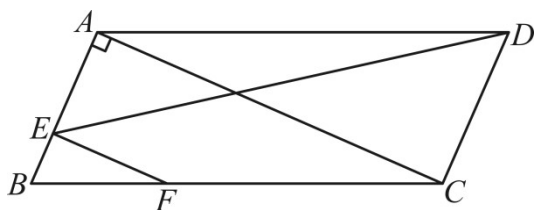
题型 04 截长补短法

【典例 1】 . 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, E 是 BC 的中点, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, $EF \parallel AD$ 交 AC 于点 F , 若 $AB=7$, $AC=15$, 则 AF 的长为_____.



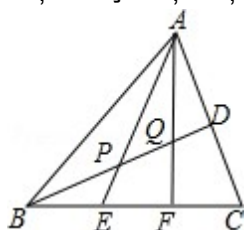
【变式 1】 . 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 连接 AC , 点 E 是 AB 上一点, $EF \parallel AC$ 交 BC 于点 F . 若

$AC \perp AB$, $AD=4\sqrt{3}$, $DE=4\sqrt{5}$, $\frac{BF}{CF}=\frac{1}{2}$, 则 CD 的长为_____.

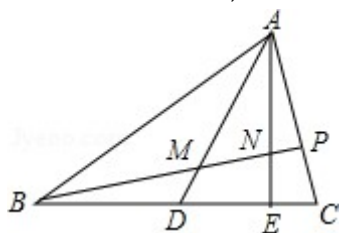


题型 05 作三角形的中位线

【典例 1】 . 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, E, F 是边 BC 上的两个三等分点, D 是 AC 的中点, BD 分别交 AE, AF 于 P, Q , 求 $BP:PQ:QD$.



【变式 1】 . 如图, $\triangle ABC$ 中, D, E 是 BC 边上的点, 且 $BD:DE:EC = 3:2:1$, P 是 AC 边上的点, 且 $AP:PC = 2:1$, BP 分别交 AD, AE 于 M, N , 则 $BM:MN:NP$ 等于 ()



A. 3:2:1

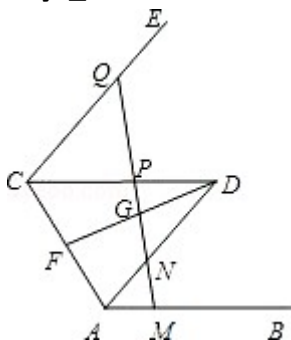
B. 5:3:1

C. 25:12:5

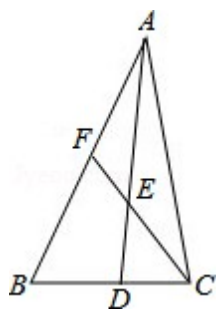
D. 51:24:10

题型 06 构造平行四边形

【典例 1】 . 如图, $AB \parallel CD, AD \parallel CE$, F, G 分别是 AC 和 FD 的中点, 过 G 的直线依次交 AB, AD, CD, CE 于点 M, N, P, Q , 求证: $MN + PQ = 2PN$.

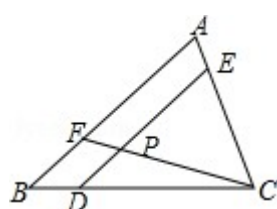


【变式 1】 . 已知如图, 点 D 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点, 且 $BD:DC = 2:3$, 过点 C 任作一条直线与 AB, AD 分别交于点 F 和 E , 求证: $\frac{AE}{ED} = \frac{5AF}{3BF}$.



题型 07 其他辅助线作法

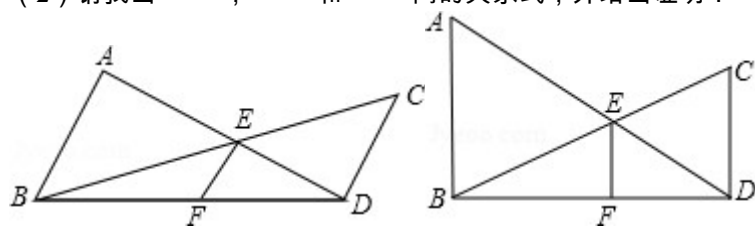
【典例 1】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AF = 2BF$ ， $CE = 3AE$ ， $CD = 4BD$. 连接 CF 交 DE 于 P 点，求 $EP:DP$ 的值 .



【变式 1】 . 已知：如图， $AB \perp BD$ ， $CD \perp BD$ ，垂足分别为 B 、 D ， AD 和 BC 相交于点 E ， $EF \perp BD$ ，垂足为 F ，我们可以证明 $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{EF}$ 成立（不要求考生证明） .

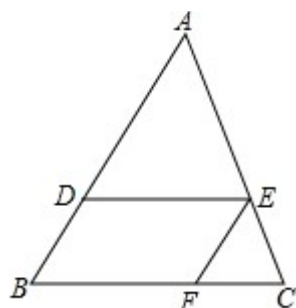
若将图中的垂线改为斜交，如图， $AB \parallel CD$ ， AD ， BC 相交于点 E ，过点 E 作 $EF \parallel AB$ 交 BD 于点 F ，则：

- (1) $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{EF}$ 还成立吗？如果成立，请给出证明；如果不成立，请说明理由；
- (2) 请找出 $S_{\triangle ABD}$ ， $S_{\triangle BED}$ 和 $S_{\triangle BDC}$ 间的关系式，并给出证明 .



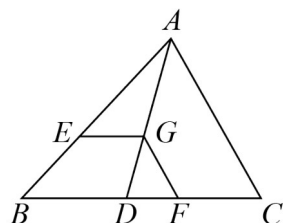
题型 08 三角形一边的平行线—中间比代换

【典例 1】 . 如图， $DE \parallel BC$ ， $EF \parallel AB$ ，则下列式子中成立的是（ ）



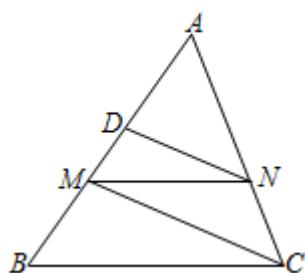
- A. $\frac{AD}{DB} = \frac{BF}{EC}$ B. $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{AC}$ C. $\frac{EF}{AB} = \frac{AC}{CE}$ D. $\frac{AD}{DB} = \frac{BF}{FC}$

【变式1】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，点 G 在线段 AD 上， $GE \parallel BD$ ，且交 AB 于点 E ， $GF \parallel AC$ ，且交 CD 于点 F ，则下列结论一定正确的是（ ）



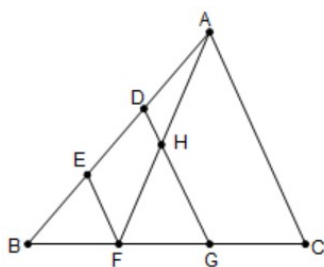
- A. $\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CD}$; B. $\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC}$; C. $\frac{EG}{BD} = \frac{FG}{AC}$; D. $\frac{AE}{AG} = \frac{AD}{AB}$.

【变式2】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $MN \parallel BC$ ， $DN \parallel MC$ ，下列结论正确的是（ ）



- A. $\frac{AM}{NC} = \frac{AM}{AB}$ B. $\frac{AD}{DM} = \frac{DN}{MC}$ C. $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{AC}$ D. $\frac{DN}{MC} = \frac{MN}{BC}$

【变式2】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D ,点 E 为边 AB 的三等分点， $EF \parallel DG \parallel AC$ ， AF 与 DG 交于点 H ，则下列比例式正确的是（ ）



- A. $\frac{AD}{DE} = \frac{HG}{AC}$ B. $\frac{BF}{BE} = \frac{FG}{FH}$ C. $\frac{DH}{EF} = \frac{BF}{BG}$ D. $\frac{AH}{HF} = \frac{EF}{DG}$

题型 09 三角形的重心概念及性质

【典例1】 . 三角形的重心正确的叙述是（ ）

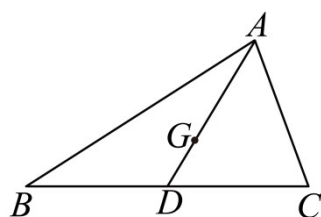
- A. 三角形三条角平分线的交点

B. 三角形三条中垂线的交点

C. 三角形三条中线的交点

D. 三角形三条高的交点

【变式1】 . 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的中线, G 是重心. 如果 $AG=6$, 那么线段 DG 的长为 ()



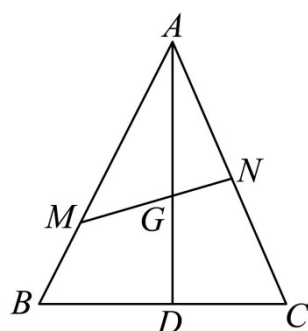
A. 1

B. 2

C. 3

D. 6

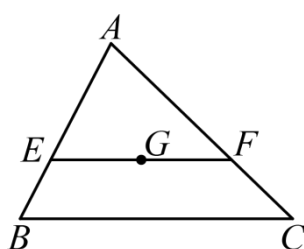
【变式2】 . 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 与 MN 交于点 G , 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 点 M 、 N 分别在边 AB 、 AC 上, 若 $AM:AB=3:4$, 则 $AN:AC$ 的值为_____.



题型 10：三角形重心的性质的几何应用

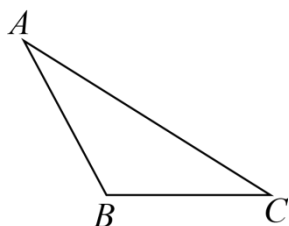
【典例1】 . 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 AD 是中线, 点 G 是重心, 那么 $S_{\triangle BDG}:S_{\triangle ABC} =$ _____.

【变式1】 . 如图, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, EF 经过点 G , 且 $EF \parallel BC$. 那么 $\triangle AEF$ 的周长与 $\triangle ABC$ 的周长之比为_____.



【变式2】 . 新定义：如果一个三角形一条边上的高等于这条边, 那么这个三角形叫做等高底三角形, 这条边叫做等底. 如图, $\triangle ABC$ 是等高底三角形, BC 是等底, 点 A 关于直线 BC 的对称点是点 A' , 连接 AA' ,

如果点 B 是 $\triangle AA'C$ 的重心，那么 $\frac{AC}{BC}$ 的值是_____。



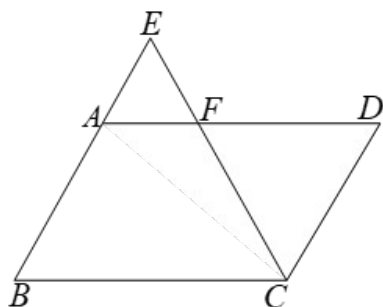
强化训练

一、单选题

1. 如果点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，连接 AG 并延长，交对边 BC 于点 D ，那么 $AG:AD$ 是 ()

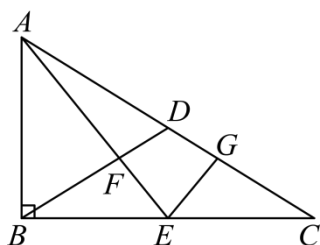
- A. 2:3 B. 1:2 C. 1:3 D. 3:4

2. 如图， E 是平行四边形 $ABCD$ 的 BA 边的延长线上的一点， CE 交 AD 于点 F ，下列各式中，错误的是 ()



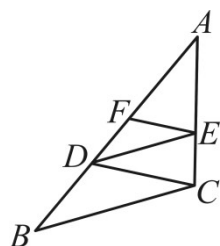
- A. $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{BC}$ B. $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{DF}$ C. $\frac{AE}{AB} = \frac{FE}{FC}$ D. $\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BC}$

3. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = 6\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ，点 F 是重心，点 G 在 CD 上且 $DG:GC = 1:2$ ，则 $\triangle CEG$ 的面积为 ()



- A. 2cm^2 B. 4cm^2 C. 6cm^2 D. 8cm^2

4. 如图， $\triangle ABC$ 中，点 D 、 F 在边 AB 上，点 E 在边 AC 上，如果 $DE \parallel BC$ ， $EF \parallel CD$ ，那么一定有 ()



A. $DE^2 = AD \cdot AE$

B. $AD^2 = AF \cdot AB$

C. $AE^2 = AF \cdot AD$

D. $AD^2 = AE \cdot AC$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 4$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D , EF 垂直平分线段 AD 交 AD 于点 E , 交 BC 的延长线于点 F , 则 AF 之长为 ()

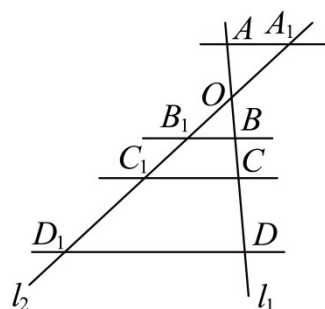
A. 5

B. 6

C. $\frac{34}{5}$

D. 7

6. 如图, 两条不平行的直线 l_1 与直线 l_2 相交于点 O , 四条平行线分别交直线 l_1 于点 A 、 B 、 C 、 D , 分别交直线 l_2 于点 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 , 则有 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. 如果 $AO = 3$, $OB_1 = B_1C_1 = 2$, $C_1D_1 = 4$, 那么在下列结果中, 线段之差最大的是 ()



A. $BD - AB$

B. $OC - OA$

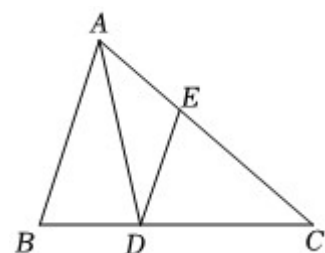
C. $OC - CD$

D. $CD - OB$

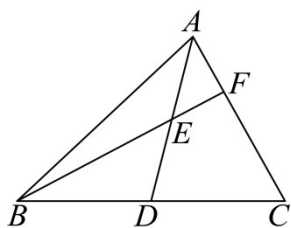
二、填空题

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$, 那么它的重心 G 到 C 点距离是_____.

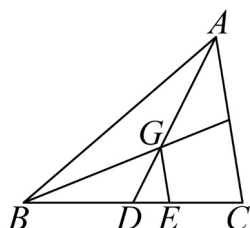
8. 如图, 已知 AD 为 $\triangle ABC$ 角平分线, $DE \parallel AB$, 如果 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$, $AB = 6$, 那么 $DE =$ _____.



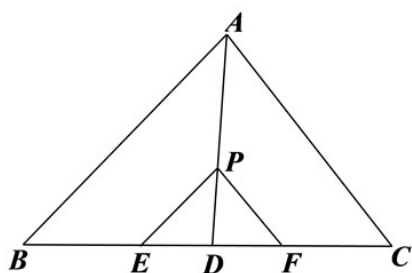
9. 如图，已知， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， E 是 AD 的中点，则 $AF:FC =$ _____.



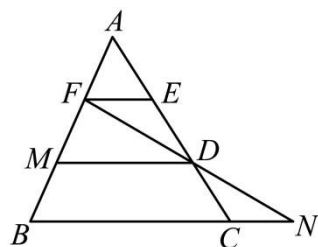
10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线， G 是重心， $GE \parallel AC$ ，交 BC 于点 E ，则 $BE:EC =$ _____.



11. 如图，已知点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，联结 AD ， P 为 AD 上一点，过点 P 分别作 AB 、 AC 的平行线交 BC 于点 E, F ，如果 $BC = 3EF$ ，那么 $\frac{AP}{PD} =$ _____.

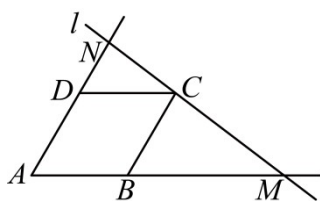


12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 E, D 在边 AC 上，点 F, M 在边 AB 上，且 $AE = ED = DC$ ， $FE \parallel MD \parallel BC$ ，如果 FD 的延长线交 BC 的延长线于 N ，那么 $\frac{FE}{BN}$ 的值为_____.

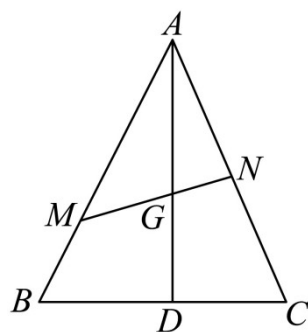


13. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 1，直线 l 过点 C ，交 AB 的延长线于 M ，交 AD 的延长线于 N ，则

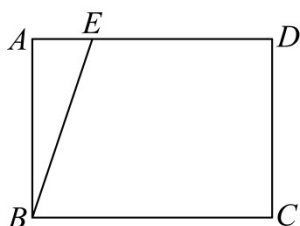
$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \text{_____}.$$



14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 与 MN 交于点 G ，点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，点 M 、 N 分别在边 AB 、 AC 上，若 $AM:AB=3:4$ ，则 $AN:AC$ 的值为_____。

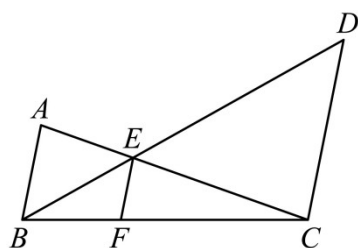


15. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=6$ ， $BC=8$ ， $\triangle ABC$ 重心为点 G ，直线 l 经过边 AB 的中点，将 $\triangle ABC$ 沿直线 l 翻折得到 $\triangle DEF$ （点 A 、 B 、 C 分别与点 D 、 E 、 F 对应）， $\triangle DEF$ 的重心点 P 在 $\triangle ABC$ 的内部。若点 P 到 AB 的距离与点 G 到 AB 的距离相等，那么 D 到直线 l 的距离为_____。
16. 阅读：对于线段 MN 与点 O （点 O 与 MN 不在同一直线上），如果同一平面内点 P 满足：射线 OP 与线段 MN 交于点 Q ，且 $\frac{OQ}{OP}=\frac{1}{2}$ ，那么称点 P 为点 O 关于线段 MN 的“准射点”。问题：如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=3$ ， $AD=4$ ，点 E 在边 AD 上，且 $AE=1$ ，连接 BE 。设点 F 是点 A 关于线段 BE 的“准射点”，且点 F 在矩形 $ABCD$ 的内部或边上，如果点 C 与点 F 之间距离为 d ，那么 d 的取值范围为_____。



三、解答题

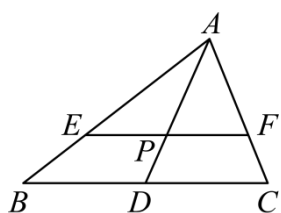
17. 如图，已知 $AB \parallel CD$ ， AC 与 BD 相交于点 E ，点 F 在线段 BC 上， $\frac{AB}{CD}=\frac{1}{2}$ ， $\frac{BF}{CF}=\frac{1}{2}$ 。



(1) 求证： $AB \parallel EF$ ；

(2) 求 $AB:EF:CD$.

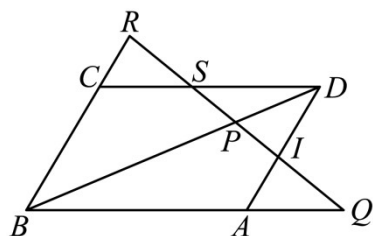
18. 如图，如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的一条中线， P 为 $\triangle ABC$ 的重心， $EF \parallel BC$ ，交 AB ， AC 于点 E, F ，交 AD 于点 P .



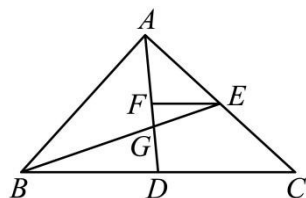
(1) 求 AE 与 AB 的比值 .

(2) 若 $BC = 6$ ，求 EP 的长 .

19. 如图， P 为 $\square ABCD$ 对角线 BD 上任意一点 . 求证： $PQ \cdot PI = PR \cdot PS$.



20. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD ， BE 交于点 G ， $EF \parallel BC$ 交 AD 于点 F .



(1) 如果 $FG = 1$ ，求 GD 和 AF 的长 .

(2) 求证： $\frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{1}{12}$.

21. 已知：如图， $AB \perp BD$ ， $CD \perp BD$ ，垂足分别为 B, D ， AD 和 BC 相交于点 E ， $EF \perp BD$ ，垂足为 F ，我们

可以证明 $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{EF}$ 成立（不要求考生证明）。

若将图中的垂线改为斜交，如图， $AB \parallel CD$ ， AD ， BC 相交于点 E ，过点 E 作 $EF \parallel AB$ 交 BD 于点 F ，则：

(1) $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{EF}$ 还成立吗？如果成立，请给出证明；如果不成立，请说明理由；

(2) 请找出 $S_{\triangle ABD}$ ， $S_{\triangle BED}$ 和 $S_{\triangle BDC}$ 间的关系式，并给出证明。

