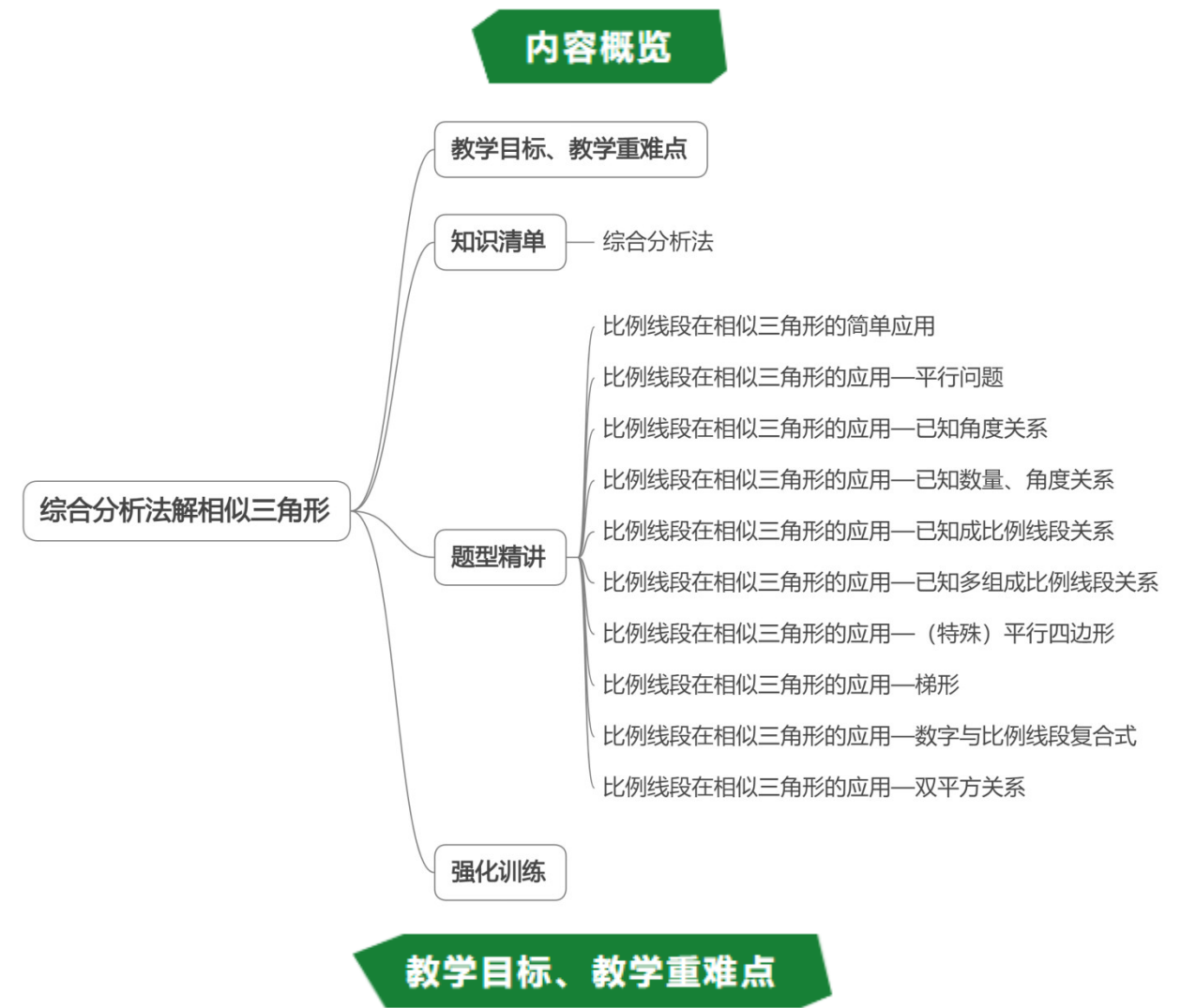


专题 24.9 综合分析法解相似三角形



教学目标	1. 会证明相似三角形的对应线段成比例问题； 2. 知道中间比代换的重要性； 3. 综合分析法解相似三角形。
教学重难点	1.重点 (1) 利用比例线段的性质、几何图形的性质构造合适的比例关系，即我们所需适当的相似关系； (2) 得到适当的相似关系又推出我们所需的长度关系或角度关系等，并以此类推； (3) 在我们选择的某一种思路中，往往需要寻求某一个关键突破点，以此推断这个思路的 (是否) 可行性。

	2.难点 (1) 综合分析法是解决几何问题常用的经典方法，与固有的模型思维是有区别的； (2) 练习—思考—总结—……（大量）
--	--

知识清单

知识点1 综合分析法

1.分析法

解数学问题，若从命题的结论出发，根据已知的定义、公理和定理逐步寻找这个结论成立的条件，直至这个结论成立的条件就是已知条件，这种方法叫作分析法。它的思维形式是逆向推理。

对问题的分析过程不能代替解答过程的书写，通常是“倒退着分析”，书写解题过程时需反过来“顺着书写”。

2.综合法

解数学问题，若从已知条件出发，运用已学过的公理、定义和定理逐步推理，直到推出结论为止，这种方法叫作综合法。

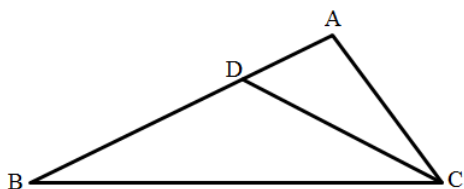
用综合法进行推理时，语气是肯定的，且每一步推理都必须是正确的。书写时应先写原因后写结论，一般都用“因为……，所以……”来表述推理。在叙述过程中，当前面一步陈述的结论，同时是后面一步陈述的条件时，常把后一步推理的条件省略不写。

3.综合分析法

对于比较复杂的数学问题，利用分析法和综合法很难解决问题，常常将分析法和综合法结合起来使用。一方面从已知条件入手，看能推出什么结论；另一方面从结论着眼，想需要找到什么条件，从而找到解题途径。这种方法称为分析综合法（或综合分析法）。

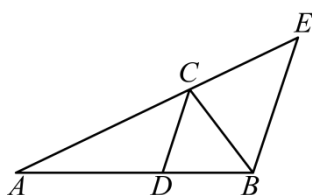
【即学即练】

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是边 AB 上的一点，若 $\angle ACD = \angle B$ ，求证： $AC^2 = AD \cdot AB$ 。

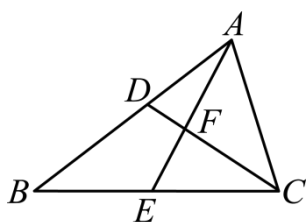


2. 如图，已知，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB$ 的平分线 CD 交 AB 于 D ，过 B 作 $BE \parallel CD$ 交 AC 的延长线于点 E 。

求证： $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$ 。



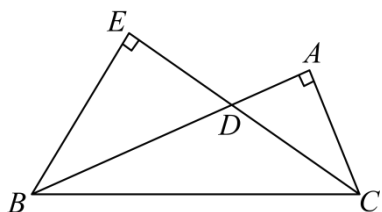
3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 BC 上，连接 CD 、 AE 交于点 F ， $AF = FC$ ， $\angle ADC = \angle ACB$ 。



(1) 求证： $AC^2 = CD \cdot AE$ ；

(2) 如果点 E 是边 BC 的中点，求证： $BC^2 = 2AD \cdot AB$ 。

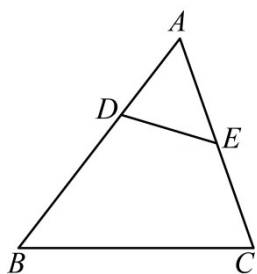
4. 已知：如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，点 D 是 AB 边上一点，过点 B 作 $BE \perp CD$ 交 CD 延长线于点 E ， $AD \cdot BC = BE \cdot CD$ 。



(1) 求证： $BE^2 = ED \cdot EC$ ；

(2) 求证： $AB \cdot BC = 2CE \cdot BE$ 。

5. 已知：如图，点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的 AB 、 AC 边上， $AE = EC$ ， $AE^2 = \frac{1}{2} AD \cdot AB$ ，联结 DE 。



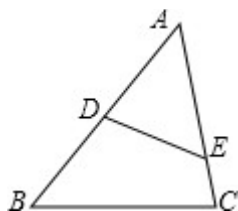
(1) 求证： $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ；

(2) 取 AD 的中点 F ，联结 EF 、 BE ，求证： $\angle DEF = \angle CBE$ 。

题型精讲

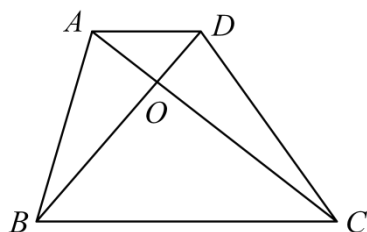
题型 01 比例线段在相似三角形的简单应用

【典例 1】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 上， $\angle ADE = \angle C$ ，求证： $AD \cdot AB = AE \cdot AC$

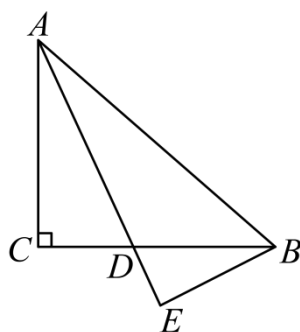


【变式 1】 . 如图，四边形 $ABCD$ 中， AC 、 BD 相交于点 O ，若 $\frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO}$ ， $AO = 8$ ， $CO = 20$ ，

$BC = 15$ ，求 AD 的长。



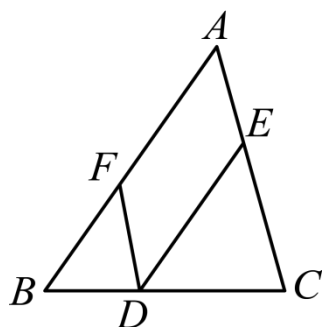
【变式 2】 . 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AE 平分 $\angle CAB$ ，且 $BE^2 = DE \cdot AE$ 。求证： $BE \perp AE$ 。



题型 02 比例线段在相似三角形的应用—平行问题

【典例 1】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上， $DE \parallel AB$ ， DE 交 AC 于点 E ，点 F 在边 AB 上，且

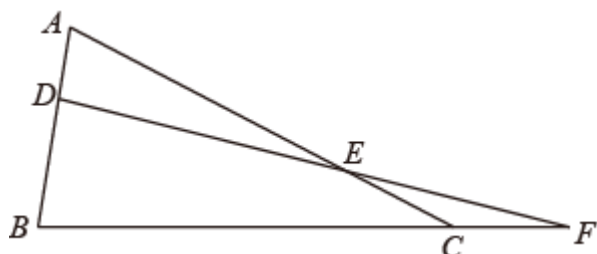
$$\frac{AF}{FB} = \frac{CE}{AE}.$$



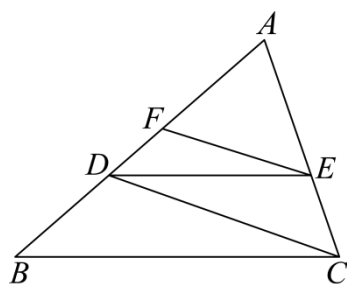
(1) 求证： $DF \parallel AC$ ；

(2) 如果 $S_{\text{四边形}ABDE} = S_{\triangle CDE}$ ，求 $\triangle BFD$ 周长与 $\triangle DEC$ 周长的比值。

【变式1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB < AC$ ，在 AB 、 AC 上分别截取 $BD = CE$ ， DE ， BC 的延长线相交于点 F ，证明： $AB \cdot DF = AC \cdot EF$ 。



【变式2】 如图，已知点 D 、 F 在 $\triangle ABC$ 边 AB 上，点 E 在边 AC 上，且 $EF \parallel DC$ ， $\frac{AF}{DF} = \frac{AD}{DB}$ 。

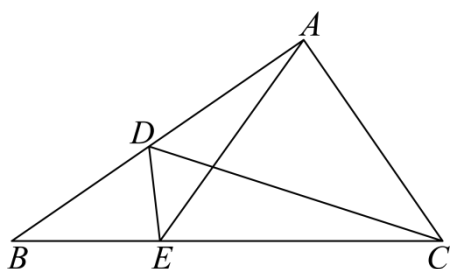


(1) 求证： $DE \parallel BC$ ；

(2) 如果 $\frac{AF}{DF} = \frac{3}{2}$ ， $S_{\triangle ADE} = 9$ ，求 $S_{\triangle ABC}$ 的值。

题型 03 比例线段在相似三角形中的应用—已知角度关系

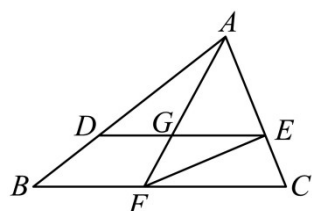
【典例1】 如图，已知：在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 BC 上，且 $\angle BDE = \angle BCA$ 。



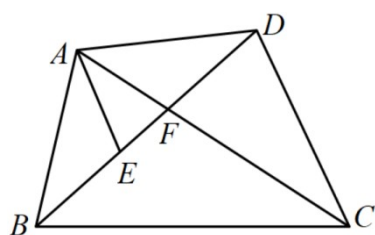
(1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle BDC$ ；

(2) 如果 $AE = AC$ ，求证： $AC^2 = AD \cdot AB$ 。

【变式1】 . 已知，如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ，点 F 在 BC 边上，且 $\angle BAF = \angle CFE$ ， AF 与 DE 相交于点 G 。求证： $AB \cdot GE = EF \cdot AF$ 。



【变式2】 . 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 BD 与 AC 交于点 F ， $\angle ADB = \angle ACB$ 。

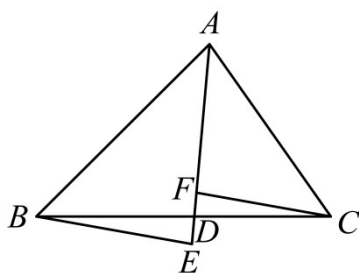


(1) 求证： $\angle ABD = \angle ACD$ ；

(2) 过点 A 作 $AE \parallel DC$ 交 BD 于点 E ，求证： $EF \cdot BC = AD \cdot AF$ 。

题型 04 比例线段在相似三角形的应用—已知数量、角度关系

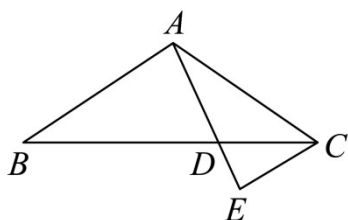
【典例1】 . 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 D ，点 E 在 AD 的延长线上， $BE = BD$ 。



(1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle ACD$

(2) 过点 C 作 $CF \parallel BE$ 交 AE 于点 F ，求证： $AD^2 = AE \cdot AF$ 。

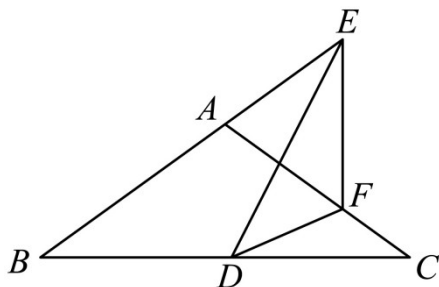
【变式1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 在 BC 边上， $CE \perp AD$ 延长线于 E ，且 $BC = 2AE$ 。



(1) 求证： $AD = CD$ ；

(2) 求证： $AB^2 = AD \cdot BC$ 。

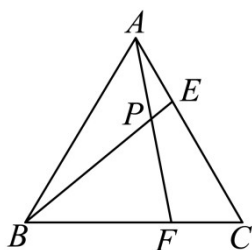
【变式2】 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 是 BC 中点，点 E 在 BA 延长线上，点 F 在 AC 边上， $\angle EDF = \angle B$ 。求证：



(1) $\triangle BDE \sim \triangle CFD$ ；

(2) $DF^2 = EF \cdot CF$ 。

【变式3】 如图，等边 $\triangle ABC$ ，点 E, F 分别在 AC, BC 边上， $AE = CF$ ，连接 AF, BE ，相交于点 P 。



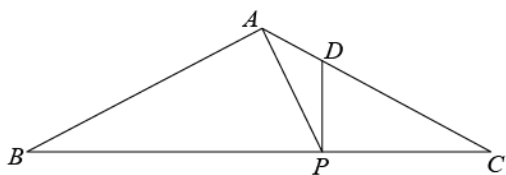
(1) 求 $\angle BPF$ 的度数；

(2) 求证： $BP \cdot BE = BF \cdot BC$ 。

题型 05 比例线段在相似三角形中的应用—已知成比例线段关系

【典例1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 P, D 分别在边 BC, AC 上， $PA \perp AB$ ，垂足为点 A ， $DP \perp BC$ ，垂足为

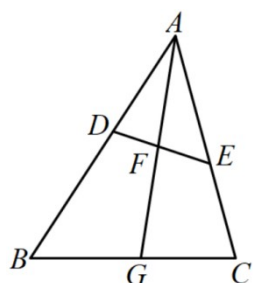
点 P ， $\frac{AP}{PD} = \frac{BP}{CD}$ 。



(1) 求证： $\angle APD = \angle C$ ；

(2) 如果 $AB = 6$ ， $DC = 4$ ，求 AP 的长。

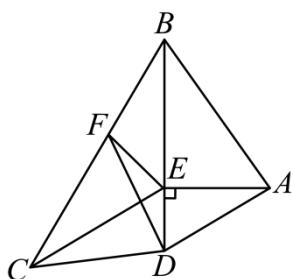
【变式 1】．如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别在边 AB, AC 上， $\angle AED = \angle B$ ， AG 分别交线段 DE, BC 于点 F, G ， $\frac{AD}{DF} = \frac{AC}{CG}$ 。



(1) 求证： $\triangle ADF \sim \triangle ACG$ ；

(2) 求证： $DF \cdot BC = DE \cdot GC$ 。

【变式 2】．如图所示，在四边形 $ABCD$ 中， BD 为对角线，过点 A 作 $AE \perp BD$ ，垂足为 E ，已知 $\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{AE}$ ，点 F 在 BC 边上，且 $AB^2 = BF \cdot BC$ 。

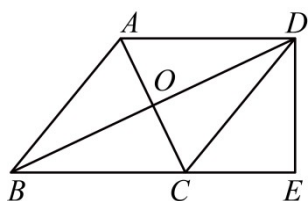


(1) 求证： $BE \cdot BD = BF \cdot BC$ ；

(2) 连接 DF, CE ，如果点 D 在 CF 的垂直平分线上，求证： $\frac{BF}{EF} = \frac{BC}{CE}$ 。

【变式 3】．已知：如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O ， $DE \perp BC$ 交 BC 的延长线于

点 E , $BO \cdot BD = BC \cdot BE$.

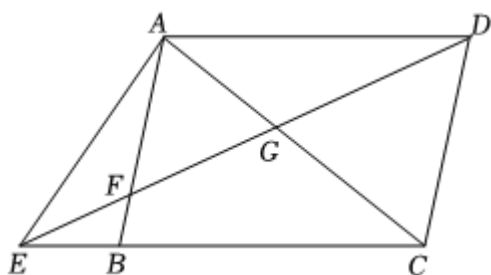


(1) 求证：四边形 $ABCD$ 为菱形；

(2) 连结 AE 交 DC 于点 F , 如果 $AE \perp CD$, 求证： $\frac{CF}{DE} = \frac{OC}{BO}$.

题型 06 比例线段在相似三角形的应用—已知多组成比例线段关系

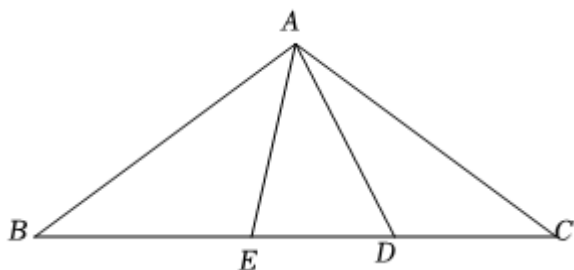
【典例 1】 . 如图，已知在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$, E 为边 CB 延长线上一点，联结 DE 交边 AB 于点 F , 联结 AC 交 DE 于点 G , 且 $\frac{FG}{DG} = \frac{AD}{CE}$.



(1) 求证： $AB \parallel CD$;

(2) 如果 $AE^2 = AG \cdot AC$, 求证： $\frac{AE}{AG} = \frac{DE}{AD}$.

【变式 1】 . 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$, 点 D 、 E 分别在边 BC 上， $AB^2 = BD \cdot CE$.

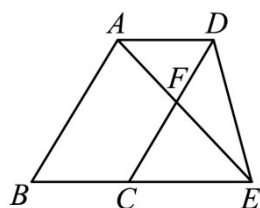


(1) 求证： $\angle EAD = \angle B$;

(2) 如果点 F 在边 AB 上，且 $EF \parallel AD$, $\frac{FB}{EF} = \frac{BE}{DE}$, 求证： $\triangle BAE \sim \triangle BCA$.

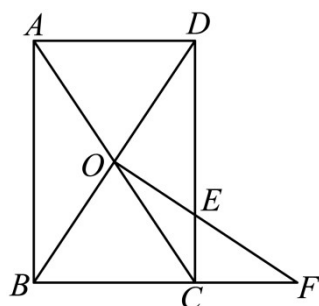
题型 07 比例线段在相似三角形的应用—（特殊）平行四边形

【典例1】 . 已知：如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 为线段 BC 延长线上一点，连接 AE 交 CD 于点 F ，且 $\angle BAE = \angle DEC$.

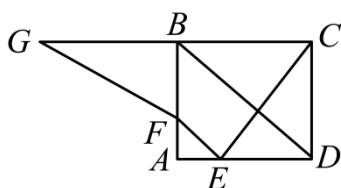


- (1) 求证 $CD^2 = EC \cdot BE$;
- (2) 连接 BF ，当 $\angle AED = \angle FBE$ 时，求证： $EF^2 = BC \cdot CE$.

【变式1】 . 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， $OF \perp BD$ 于点 O ，交 CD 于点 E ，交 BC 的延长线于点 F . 求证： $AO^2 = OE \cdot OF$.

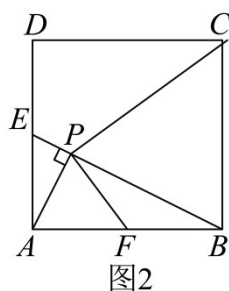
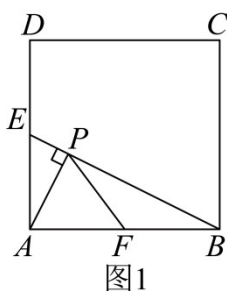


【变式2】 . 如图， BD 是正方形 $ABCD$ 的对角线，点 E 、 F 分别在边 AD 、 AB 上， $EF \parallel BD$ ，延长 CB 到 G ，且 $BG = BC$ ，连接 GF 、 CE .



- (1) 求证： $GF = CE$;
- (2) 延长 GF 交 CE 于点 H ，连接 BH ，求证： $2BH^2 = GH \cdot GF$.

【变式3】 . 如图，正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是 AD 、 AB 上的点， $AP \perp BE$ 于点 P .

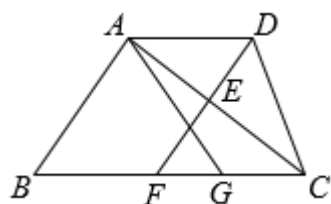


(1)如图 1，如果点 F 是 AB 的中点，求证： $BP \cdot BE = 2PF \cdot BC$ ；

(2)如图 2，如果 $AE = AF$ ，连接 CP ，求证： $CP \perp FP$ 。

题型 08 比例线段在相似三角形的应用—梯形

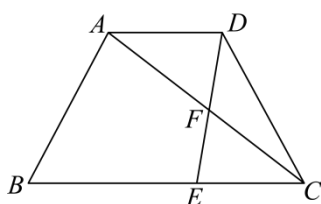
【典例 1】 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， DF 分别交对角线 AC 、底边 BC 于点 E 、 F ，且 $AD \cdot AC = AE \cdot BC$ 。



(1)求证： $AB \parallel FD$ ；

(2)点 G 在底边 BC 上， $BC=10$ ， $CG=3$ ，连接 AG ，如果 $\triangle AGC$ 与 $\triangle EFC$ 的面积相等，求 FC 的长。

【变式 1】 如图，等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = CD$ ，点 E 在边 BC 上， DE 与 AC 交于点 F ，且 $CD^2 = CF \cdot CA$ 。



(1)求证：

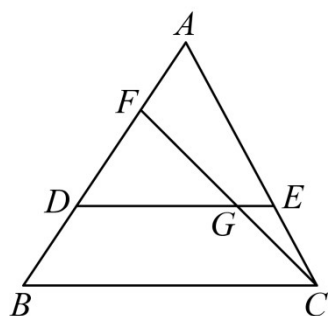
$$\angle CDE = \angle CAD ;$$

(2)求证：

$$AB^2 = EC \cdot BC .$$

题型 09 比例线段在相似三角形的应用—数字与比例线段复合式

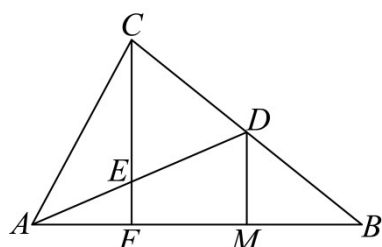
【典例 1】 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D ， E 分别在 AB ， AC 上， $DE \parallel BC$ ，点 F 在边 AB 上， $BC^2 = BF \cdot BA$ ， CF 与 DE 相交于点 G 。



(1) 求证： $\triangle ABC \sim \triangle GDF$.

(2) 当点 E 为 AC 的中点时，求证： $\frac{2EG}{DG} = \frac{AF}{DF}$.

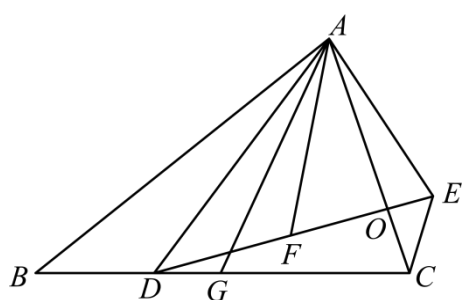
【变式 1】 . 如图，过 $\triangle ABC$ 顶点 C 作直线与 AB 及中线 AD 交于 F, E ，过 D 作 $DM \parallel FC$ 交 AB 于 M .



(1) 若 $S_{\triangle AEF} : S_{\text{四边形}MDEF} = 2 : 3$ ，求 $AE : ED$ 的值；

(2) 求证： $AE \cdot FB = 2AF \cdot ED$.

【变式 2】 . 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中， $BC = BA, DE = DA$. 点 D 是 BC 边上一点， $\angle EDC = \angle BAD$ ， AC 与 DE 交于点 O . 点 F, G 分别是 DE, BC 边上的中点 .

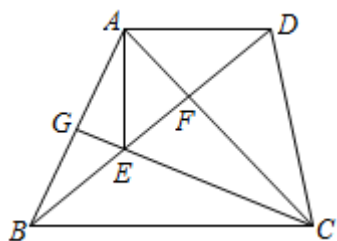


求证：

(1) $AF \cdot AC = AG \cdot AE$

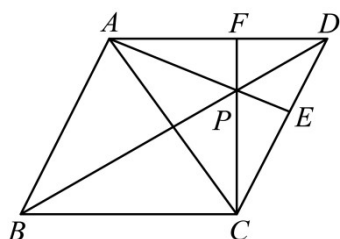
(2) $2DF \cdot OE = OA \cdot CE$.

【变式 3】 . 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC, AD = \frac{1}{2}BC$ ，对角线 AC 与 BD 交于点 F ，点 G 是 AB 边上的中点，连接 CG 交 BD 于点 E ，并满足 $BG^2 = GE \cdot GC$.



- (1) 求证： $\angle GAE = \angle GCA$ ；
 (2) 求证： $AD \parallel BC = 2DF \parallel DE$

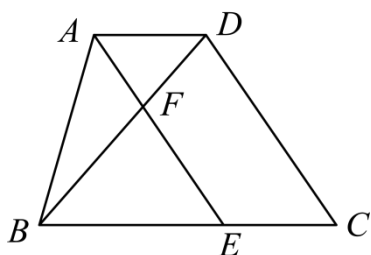
【变式4】 . 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是菱形， P 是对角线 BD 上一点，连结 AP 、 CP 并延长，分别与边 CD 、 AD 交于点 E 、 F .



- (1) 求证： $AE = CF$ ；
 (2) 如果 $\angle APF = 2\angle ABD$ ，求证： $BP \cdot BD = 2AB^2$.

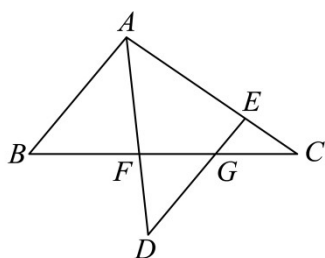
题型10 比例线段在相似三角形中的应用—含双平方关系

【典例1】 . 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 为边 BC 上一点， AE 与 BD 相交于点 F 、 $EB^2 = FE \cdot EA$ 、 $\angle ABE = \angle BDC$.



- (1) 求证：四边形 $AECD$ 是平行四边形；
 (2) 求证： $\frac{BE}{BC} = \frac{AF^2}{EC^2}$.

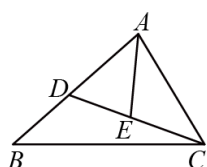
【变式1】 . 如图， $\triangle ABC$ 中， E 、 F 分别是 AC 、 BC 边上的点， $ED \parallel AB$ 交 AF 的延长线于 D ，交 BC 于 G ， $\angle DAC = \angle B$.



(1) 求证： $\triangle ABF \sim \triangle DAE$

(2) 求证： $\frac{DE^2}{DA^2} = \frac{CF}{CB}$

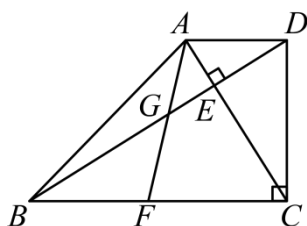
【变式2】 . 如图，已知：点 D 在 $\triangle ABC$ 的 AB 边上，连接 CD ，点 E 在线段 CD 上，且 $\angle BAE = \angle ACD = \angle B$.



(1) 求证： $\frac{AD}{BC} = \frac{DE}{AC}$;

(2) 当 E 为 CD 的中点时，求证： $\frac{AE^2}{CE^2} = \frac{AB}{AD}$.

【变式3】 . 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 E ，且 $AC \perp BD$.



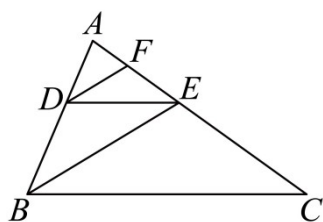
(1) 求证： $CD^2 = BC \cdot AD$;

(2) 点 F 是边 BC 上一点，连接 AF ，与 BD 相交于点 G ，且 $\angle BAF = \angle ADB$ ，求证： $\frac{AG^2}{AD^2} = \frac{BG}{BD}$.

强化训练

一、解答题

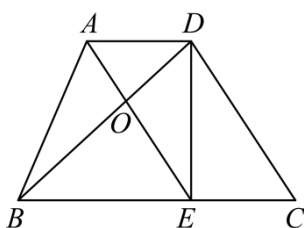
1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，点 E 、点 F 在边 AC 上，且 $DE \parallel BC$ ， $\frac{AF}{FE} = \frac{AE}{EC}$.



(1) 求证： $DF \parallel BE$ ；

(2) 如果 $EF = 2AF$ ，求 $\frac{C_{\triangle DFE}}{C_{\triangle BEC}}$ 的值

2. 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 是 BC 上一点，且 $OA \cdot BE = OE \cdot CE$ 。



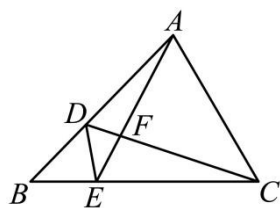
(1) 求证：四边形 $AECD$ 是平行四边形；

(2) 如果 $\angle BDE = \angle DAE$ ，求证： $OB \cdot CD = BE \cdot DE$ 。

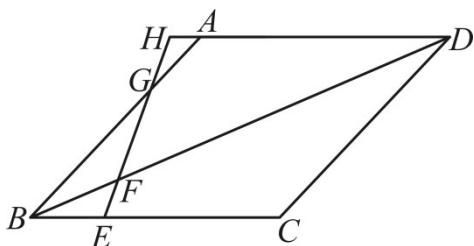
3. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D ， E 分别在边 AB ， BC 上， $BA \cdot BD = BC \cdot BE$

(1) 求证： $\triangle BDE \sim \triangle BCA$ ；

(2) 如果 $AE = AC$ ，求证： $AC^2 = AD \cdot AB$ 。



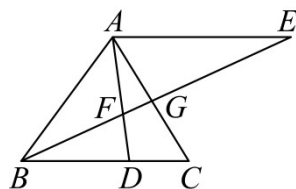
4. 在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是 BC 上一点，点 H 是 DA 延长线上一点。连接 EH ，交 BD 于点 F ， AB 于点 G 。若 $BG \cdot BA = BF \cdot BD$ ， $BF = FG$ ，



(1) 证明：平行四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2)证明： $\frac{BC}{HE} = \frac{FD}{HD}$.

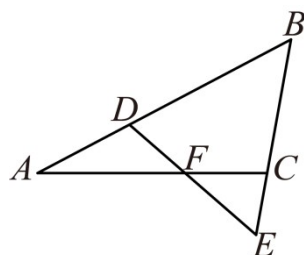
5. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上， $AE \parallel BC$ ， BE 与 AD 、 AC 分别相交于点 F 、 G ，
 $AF^2 = FG \cdot FE$.



(1)求证： $\triangle FAG \sim \triangle FEA$ ；

(2)求证： $AG \cdot BF = AE \cdot DF$.

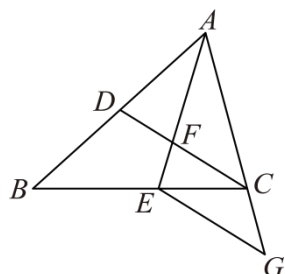
6. 如图，点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上，点 E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 的延长线上，联结 DE 交于边 AC 于点 F 且
 $\angle BDF + \angle ACB = 180^\circ$



(1)求证： $AD \cdot AB = AF \cdot AC$

(2)联结 AE ，如果 $\frac{AD}{DE} = \frac{BC}{AC}$ ，求证： $AF \cdot DE = BE \cdot AD$

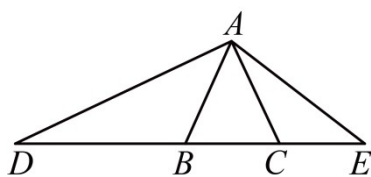
7. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 BC 上， AE 与 CD 交于点 F 。若 AE 平分 $\angle BAC$ ，
 $AB \cdot AF = AC \cdot AE$.



(1)求证： $\angle AFD = \angle AEC$ ；

(2)若 $EG \parallel CD$ ，交边 AC 的延长线于点 G ，求证： $CD \cdot CG = FC \cdot BD$.

8. 如图，已知等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 2$ ，点 D 在 BC 的反向延长线上，且 $DB = 3$ ，点 E 在边 BC 的延长线上，且 $\angle EAC = \angle D$ 。



- (1) 求线段 CE 的长；
- (2) 求证： $\frac{AC^2}{AE^2} = \frac{BD}{DE}$ ；
- (3) 当 AC 平分 $\angle BAE$ 时，求线段 AD 的长。