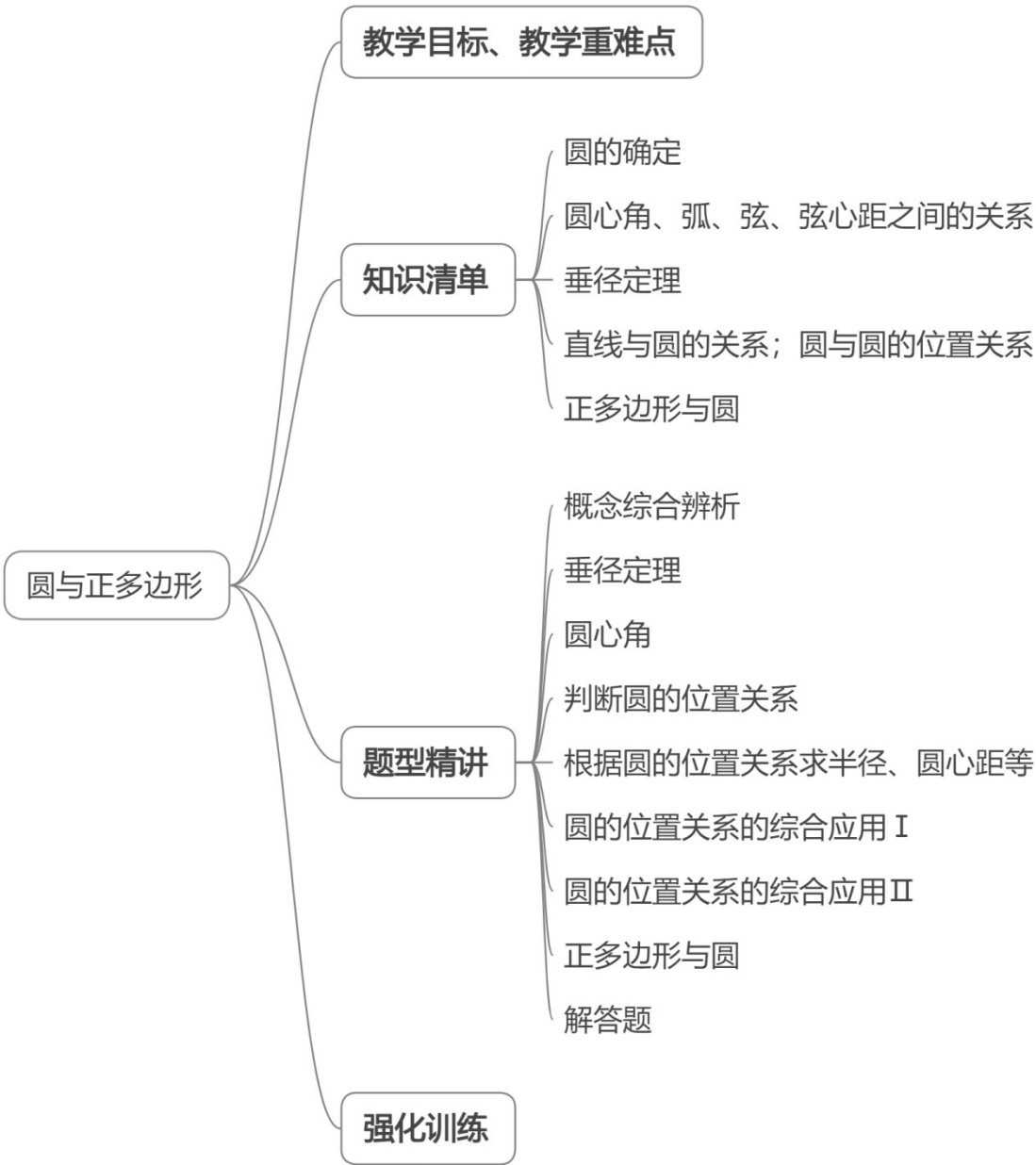


第 27 章 圆与正多边形

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 圆的有关概念，点与圆的位置关系；三角形的外接圆，外心； 2. 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系； 3. 垂径定理；
------	--

	4. 直线与圆的位置；圆与圆的位置关系； 5. 正多边形的有关概念，正多边形与圆。
教学重难点	1.重点 (1) 圆的确定； (2) 圆中的几组量的等量关系；垂径定理及其推论； (3) 圆的位置的判断及其几何应用。 2.难点 (1) 正多边形与圆；新定义题；分类讨论思想； (2) 圆的位置关系的综合应用。

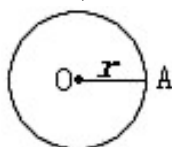
知识清单

知识点1 圆的确定

一、圆的定义

1. 圆的描述概念

如图，在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 随之旋转所形成的图形叫做圆，固定的端点 O 叫做圆心，线段 OA 叫做半径。以点 O 为圆心的圆，记作“ $\odot O$ ”，读作“圆 O ”。



2. 圆的集合概念

圆心为 O ，半径为 r 的圆是平面内到定点 O 的距离等于定长 r 的点的集合。

平面上的一个圆，把平面上的点分成三类：圆上的点，圆内的点和圆外的点。

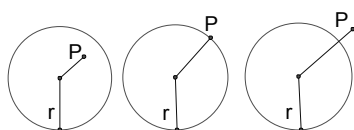
圆的内部可以看作是到圆心的距离小于半径的点的集合；圆的外部可以看成是到圆心的距离大于半径的点的集合。

二、点与圆的位置关系

点和圆的位置关系有三种：点在圆内，点在圆上，点在圆外。

若 $\odot O$ 的半径为 r ，点 P 到圆心 O 的距离为 d ，那么：

点 P 在圆内 $\Leftrightarrow d < r$ ；点 P 在圆上 $\Leftrightarrow d = r$ ；点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d > r$ 。



“ $\Leftrightarrow$ ”读作“等价于”，它表示从左端可以推出右端，从右端也可以推出左端。

三、与圆有关的概念

1. 弦

弦：连结圆上任意两点的线段叫做弦.

直径：经过圆心的弦叫做直径.

弦心距：圆心到弦的距离叫做弦心距.

2. 弧

弧：圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧.以 A、B 为端点的弧记作 $\widehat{AB}$ ，读作“圆弧 AB”或“弧 AB”.

半圆：圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧，每一条弧都叫做半圆；

优弧：大于半圆的弧叫做优弧；

劣弧：小于半圆的弧叫做劣弧.

3.等弧 在同圆或等圆中，能够完全重合的弧叫做等弧.

4.同心圆与等圆

圆心相同，半径不等的两个圆叫做同心圆.

圆心不同，半径相等的两个圆叫做等圆.

5.圆心角 顶点在圆心的角叫做圆心角.

考点四、确定圆的条件

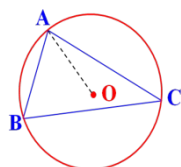
(1) 经过一个已知点能作无数个圆；

(2) 经过两个已知点 A、B 能作无数个圆，这些圆的圆心在线段 AB 的垂直平分线上；

(3) 不在同一直线上的三个点确定一个圆.

(4)(后面还会学习到)经过三角形各个顶点的圆叫做三角形的外接圆，外接圆的圆心叫做三角形的外心，这个三角形叫做圆的内接三角形.

如图： $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心.



外心的性质：外心是 $\triangle ABC$ 三条边的垂直平分线的交点，它到三角形的三个顶点的距离相等.

【即学即练】

1. 下列命题中正确的是 ()

①直径是圆中最长的弦. ②弧是半圆. ③过圆心的直线是直径. ④半圆不是弧. ⑤直径不是弦. ⑥长度相等的弧是等弧. ⑦圆上两点间的部分叫做弦. ⑧大小不等的圆中不存在等弧.

A. ①⑧

B. ②⑦

C. ③⑤

D. ④⑥

2. 已知 $\odot O$ 的半径为 4cm， $OP = 3cm$ ，则点 P 与 $\odot O$ 的位置关系是 ()

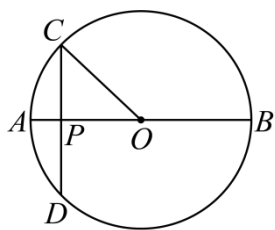
A. 点 P 在圆内

B. 点 P 在圆上

C. 点 P 在圆外

D. 无法确定

3. 如图，图中的弦共有 ()



A. 1 条

B. 2 条

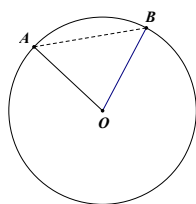
C. 3 条

D. 4 条

知识点 2 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系

一、圆心角与弧的定义

1. **圆心角定义**：顶点在圆心的角叫做圆心角。如图所示， $\angle AOB$ 就是一个圆心角。

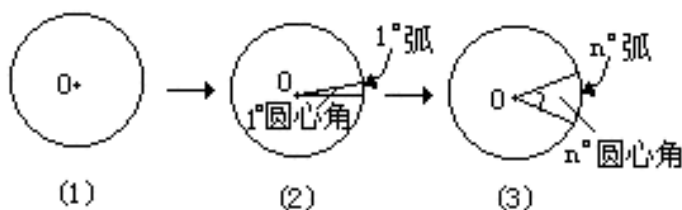


要点：(1) 一个角要是圆心角，必须具备顶点在圆心这一特征；

(2) 圆心角 $\angle AOB$ 所对的弦为线段 AB，所对的弧为弧 AB。

2. 1° 的弧的定义

1° 的圆心角所对的弧叫做 1° 的弧。如下图，



要点：

(1) 圆心角的度数和它所对的弧的度数相等。注意不是角与弧相等。即不能写成圆心角 $\angle AOB = \widehat{AB}$ 。

(2) 在同圆或等圆中，能够互相重合的弧叫做等弧。等弧的长度相等，所含度数相等（即弯曲程度相等）。

二、弦心距

圆心到弦的距离叫做弦心距。在图 27-9 中，过圆心 O 作弦 AB 的垂线，垂足为 C，则垂线段 OC 的长是弦 AB 的弦心距。

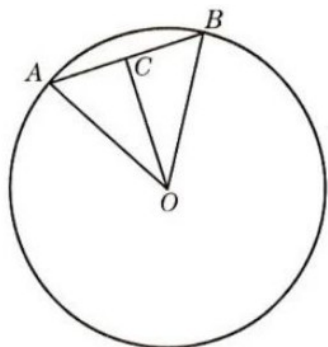


图 27-9

三、圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理：

①**定理** 在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等。

②**推论** 圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理有以下推论：

推论 在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条劣弧(或优弧)、两条弦、两条弦的弦心距得到的四组量中有一组量相等，那么它们所对应的其余三组量也分别相等。

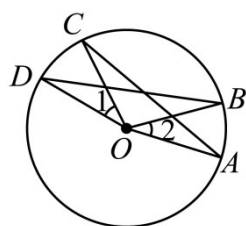
【即学即练】

1. 下列命题中，正确的是 ()

- A. 相等的弧所对的圆心角相等
- B. 圆心到弦的距离相等，则这两条弦相等
- C. 相等的圆心角所对的弦相等
- D. 同圆中，如果两条弦相等，那么两条弦所对的弧相等

2. 在半径为 2cm 的圆中， 120° 的圆心角所对的弦长为 _____ cm .

3. 如图， A, B, C, D 是 $\odot O$ 上的点， $\angle 1 = \angle 2$ ，下列结论中错误的是 ()



- A. $\widehat{AB} = \widehat{CD}$
- B. $AC = BD$
- C. $\angle COB = 2\angle 1$
- D. $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

知识点 3 垂径定理

一、垂径定理

垂径定理 如果圆的一条直径垂直于一条弦，那么这条直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的弧。

要点：垂径定理指出了圆的直径与弦及弦所对的弧之间的关联，即由直径“垂直”于弦得到“平分”弦(弧)。

二、垂径定理的推论 1

如果圆的直径平分弦(这条弦不是直径),那么这条直径垂直于这条弦，并且平分这条弦所对的弧，

如果圆的直径平分弧，那么这条直径就垂直平分这条弧所对的弦。

在圆中，圆心到弦的两个端点的距离都等于圆的半径，由线段垂直平分线定理的逆定理，可知圆心一定在弦的垂直平分线上.于是得到：

如果一条直线是弦的垂直平分线，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦所对的弧。

三、垂径定理的推论 2

如果一条直线平分弦和弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且垂直于这条弦。

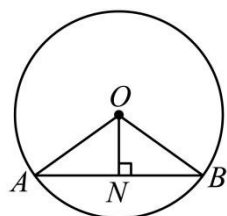
如果一条直线垂直于弦，并且平分弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦。

总结上面的讨论，可以概括为：

在圆中，对于某一条直线“经过圆心”、“垂直于弦”、“平分弦”、“平分弦所对的弧”这四组关系中，如果有两组关系成立，那么其余两组关系也成立，

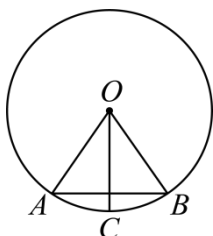
【即学即练】

1. 如图， $\odot O$ 的半径为 5， $ON \perp AB$ ，垂足为 N ， $ON = 3$ ，则弦 AB 的长度是 ()



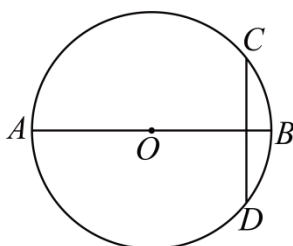
- A. 4 B. $4\sqrt{3}$ C. 8 D. $8\sqrt{3}$

2. 如图，在 $\odot O$ 中，点 C 是弧 AB 的中点， $\angle OAB = 55^\circ$ ，则弧 BC 的度数为 ()



- A. 35° B. 40° C. 45° D. 50°

3. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 B 是弧 CD 的中点。下列结论错误的是 ()



- A. 点 A 是弧 CAD 的中点 B. $AB \perp CD$
C. AB 平分 CD D. CD 平分 AB

知识点 3 直线与圆的位置

一、直线和圆的位置关系

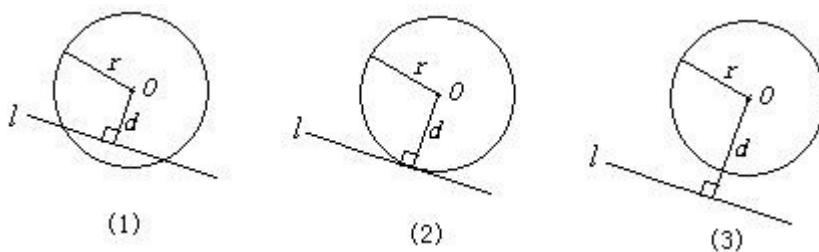
1. 直线和圆的三种位置关系：

- (1) 相交：直线与圆有两个公共点时，叫做直线和圆相交。这时直线叫做圆的割线。
- (2) 相切：直线和圆有唯一公共点时，叫做直线和圆相切。这时直线叫做圆的切线，唯一的公共点叫做切点。
- (3) 相离：直线和圆没有公共点时，叫做直线和圆相离。

2. 直线与圆的位置关系的判定和性质.

直线与圆的位置关系能否像点与圆的位置关系一样通过一些条件来进行分析判断呢？

由于圆心确定圆的位置，半径确定圆的大小，因此研究直线和圆的位置关系，就可以转化为直线和点(圆心)的位置关系. 下面图(1)中直线与圆心的距离小于半径；图(2)中直线与圆心的距离等于半径；图(3)中直线与圆心的距离大于半径.



如果 $\odot O$ 的半径为 r ，圆心 O 到直线 l 的距离为 d ，那么

(1) 直线 l 和 $\odot O$ 相交 $\Leftrightarrow d < r$;

(2) 直线 l 和 $\odot O$ 相切 $\Leftrightarrow d = r$;

(3) 直线 l 和 $\odot O$ 相离 $\Leftrightarrow d > r$.

要点：

这三个命题从左边到右边反映了直线与圆的位置关系所具有的性质；从右边到左边则是直线与圆的位置关系的判定.

二、切线的判定定理

切线的判定定理：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

要点：

切线的判定方法：

(1) 定义：直线和圆有唯一公共点时，这条直线就是圆的切线；

(2) 定理：和圆心的距离等于半径的直线是圆的切线；

(3) 判定定理：经过半径外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线. (切线的判定定理中强调两点：一是直线与圆有一个交点，二是直线与过交点的半径垂直，缺一不可).

【即学即练】

1. 已知 $\odot O$ 的半径为3，圆心 O 到直线的距离为2，则 $\odot O$ 与直线的位置关系是 ()

- A. 相切 B. 相交 C. 相离 D. 相交或相离

2. $\odot O$ 的半径为5cm，点 O 到直线 AB 的距离为 d ，当 $d = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， AB 与 $\odot O$ 相切.

3. 已知 $\odot O$ 的半径为3，点 O 到直线 m 的距离为 d ，若直线 m 与 $\odot O$ 公共点的个数为2个，则 d 可取 ()

- A. 2 B. 3 C. 3.5 D. 4

知识点5 圆与圆的位置关系

一、圆与圆的位置关系

1. 圆与圆的五种位置关系的定义

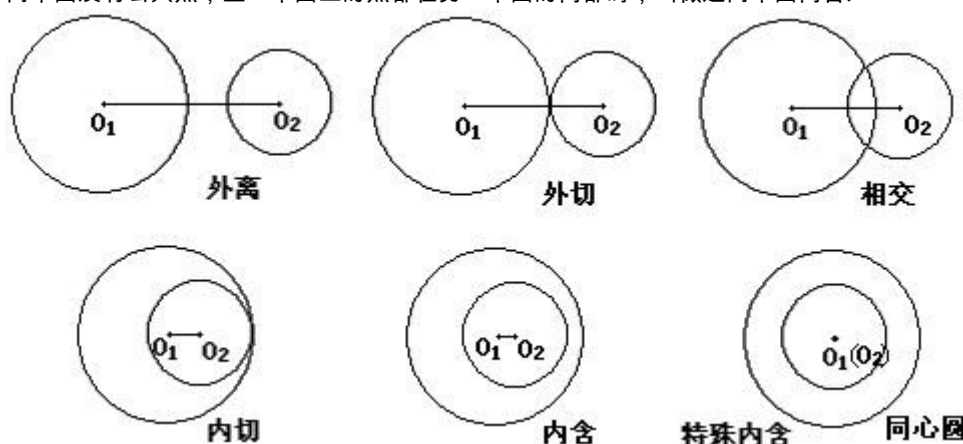
两圆外离：两个圆没有公共点，且每个圆上的点都在另一个圆的外部时，叫做这两个圆外离。

两圆外切：两个圆有唯一公共点，并且除了这个公共点外，每个圆上的点都在另一个圆的外部时，叫做这两个圆外切。这个唯一的公共点叫做切点。

两圆相交：两个圆有两个公共点时，叫做这两圆相交。

两圆内切：两个圆有唯一公共点，并且除了这个公共点外，一个圆上的点都在另一个圆的内部时，叫做这两个圆内切。这个唯一的公共点叫做切点。

两圆内含：两个圆没有公共点，且一个圆上的点都在另一个圆的内部时，叫做这两个圆内含。



2. 两圆的位置与两圆的半径、圆心距的数量关系：

设 $\odot O_1$ 的半径为 r_1 ， $\odot O_2$ 半径为 r_2 ，两圆心 O_1O_2 的距离为 d ，则：

两圆外离 $\Leftrightarrow d > r_1 + r_2$

两圆外切 $\Leftrightarrow d = r_1 + r_2$

两圆相交 $\Leftrightarrow r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ ($r_1 \geq r_2$)

两圆内切 $\Leftrightarrow d = r_1 - r_2$ ($r_1 > r_2$)

两圆内含 $\Leftrightarrow d < r_1 - r_2$ ($r_1 > r_2$)

3. 两个圆的圆心之间的距离叫做圆心距. 经过两个圆的圆心的直线叫做连心线。

要点：

(1) 圆与圆的位置关系，既考虑它们公共点的个数，又注意到位置的不同，若以两圆的公共点个数 分类，又可以分为：相离(含外离、内含)、相切(含内切、外切)、相交；

(2) 内切、外切统称为相切，唯一的公共点叫作切点；

(3) 具有内切或内含关系的两个圆的半径不可能相等，否则两圆重合。

二、两圆连心线的性质

1. 定理：相交两圆的连心线垂直平分两圆的公共弦。

2. 定理：相切两圆的连心线经过切点。

【即学即练】

1. 下列命题中，真命题是 ()

A. 内含两圆的圆心距大于零

B. 没有公共点的两圆叫两圆外离

C. 联结相切两圆圆心的线段必经过切点

D. 相交两圆的交点关于这两个圆的连心线对称

2. 已知半径分别是15cm和20cm的两个圆相交，公共弦长是24cm，那么这两个圆的圆心距是_____.

3. 如果 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内含，圆心距 $O_1O_2 = 3$ ， $\odot O_1$ 的半径长是5，那么 $\odot O_2$ 的半径长 r 的取值范围是().

A. $0 < r < 2$ B. $2 < r < 8$ C. $0 < r < 2$ 或 $r > 8$ D. $r > 8$

知识点6 正多边形与圆

一、正多边形的概念

各边相等，各角也相等的多边形是正多边形.

要点：

判断一个多边形是否是正多边形，必须满足两个条件：(1)各边相等；(2)各角相等；缺一不可.如菱形的各边都相等，矩形的各角都相等，但它们都不是正多边形(正方形是正多边形).

二、正多边形的重要元素

1. 正多边形的外接圆和圆的内接正多边形

正多边形和圆的关系十分密切，只要把一个圆分成相等的一些弧，就可以作出这个圆的内接正多边形，这个圆就是这个正多边形的外接圆.

2. 正多边形的相关概念

(1)一个正多边形的外接圆的圆心叫做这个正多边形的中心.

(2)正多边形外接圆的半径叫做正多边形的半径.

(3)正多边形每一边所对的圆心角叫做正多边形的中心角.

(4)正多边形的中心到正多边形的一边的距离叫做正多边形的边心距.

3. 正多边形的相关计算

(1)正 n 边形每一个内角的度数是 $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ ；

(2)正 n 边形每个中心角的度数是 $\frac{360^\circ}{n}$ ；

(3)正 n 边形每个外角的度数是 $\frac{360^\circ}{n}$.

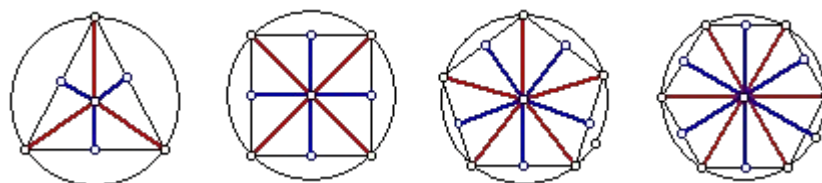
要点：要熟悉正多边形的基本概念和基本图形，将待解决的问题转化为直角三角形.

三、正多边形的性质

1. 正多边形都只有一个外接圆，圆有无数个内接正多边形.

2. 正 n 边形的半径和边心距把正 n 边形分成 $2n$ 个全等的直角三角形.

3. 正多边形都是轴对称图形，对称轴的条数与它的边数相同，每条对称轴都通过正 n 边形的中心；当边数是偶数时，它也是中心对称图形，它的中心就是对称中心.



4.边数相同的正多边形相似。它们周长的比，边心距的比，半径的比都等于相似比，面积的比等于相似比的平方。

5.任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心圆

要点：（1）各边相等的圆的内接多边形是圆的内接正多边形；（2）各角相等的圆的外切多边形是圆的外切正多边形。

四、正多边形的画法

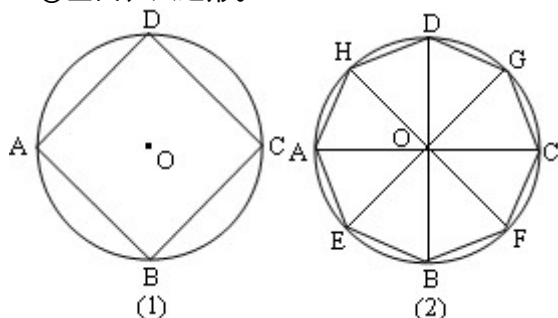
1.用量角器等分圆

由于在同圆中相等的圆心角所对的弧也相等，因此作相等的圆心角(即等分顶点在圆心的周角)可以等分圆；根据同圆中相等弧所对的弦相等，依次连接各分点就可画出相应的正 n 边形。

2.用尺规等分圆

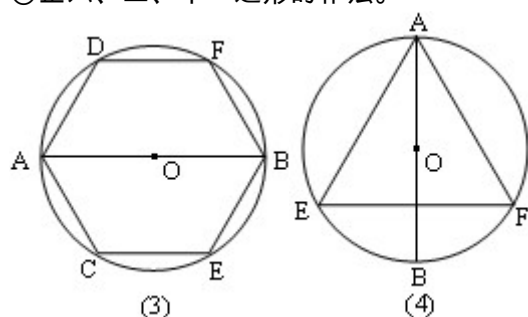
对于一些特殊的正 n 边形，可以用圆规和直尺作图。

①正四、八边形。



在 $\odot O$ 中，用尺规作两条互相垂直的直径就可把圆分成 4 等份，从而作出正四边形。再逐次平分各边所对的弧(即作 $\angle AOB$ 的平分线交 $\widehat{AB}$ 于 E) 就可作出正八边形、正十六边形等，边数逐次倍增的正多边形。

②正六、三、十二边形的作法。



通过简单计算可知，正六边形的边长与其半径相等，所以，在 $\odot O$ 中，任画一条直径 AB ，分别以 A 、 B 为圆心，以 $\odot O$ 的半径为半径画弧与 $\odot O$ 相交于 C 、 D 和 E 、 F ，则 A 、 C 、 E 、 B 、 F 、 D 是 $\odot O$ 的 6 等分点。

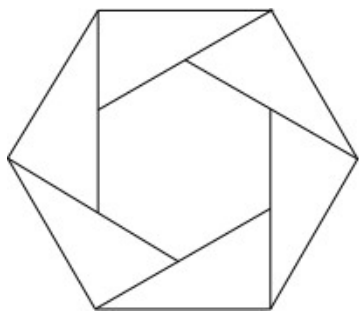
显然， A 、 E 、 F (或 C 、 B 、 D)是 $\odot O$ 的 3 等分点。

同样，在图(3)中平分每条边所对的弧，就可把 $\odot O$ 12 等分……。

要点：画正 n 边形的方法：（1）将一个圆 n 等份，（2）顺次连结各等分点。

【即学即练】

1. 正二十边形中心角的正弦值为
2. 六个带 30° 角的直角三角板拼成一个正六边形，直角三角板的最短边为 1，求中间正六边形的面积__



3. 已知一个圆与一个角的两边各有两个公共点，且在两边上截得的两条弦正好是该圆内接正五边形的两条边，那么这个角的大小是_____.

题型精讲

题型 01 概念综合辨析

【典例 1】. 下列说法正确的是 ()

- A. 两圆外切时，连心线等于这两圆的半径长的和
- B. 平分弦的直径垂直于弦
- C. 在同圆中，相等的弦所对的弧相等
- D. 经过半径外端且垂直于半径的直线是圆的切线

【变式 1】. 下列命题一定正确的是 ()

- A. 平分弦的直径垂直于弦
- B. 各角相等的圆内接多边形是正多边形
- C. 相等的圆周角所对的弧也相等
- D. 三角形的外心到三角形三个顶点的距离都相等

【变式 2】. 下列命题中正确的是 ()

- A. 垂直于弦的直线平分这条弦
- B. 平分弦的直径垂直于这条弦

C. 平分弧的直线垂直于弧所对的弦

D. 平分弦所对的两条弧的直线平分这条弦

【变式 3】 . 下列命题中真命题的是 ()

A. 平分弦的直径垂直于弦

B. 三角形的外心到三角形各边的距离相等

C. 平分弧的直径垂直于弧所对的弦

D. 在同圆中相等两条弦所对的弧相等

【变式 4】 . 有下列五个命题：①等弧所对的圆心角相等；②经过三个点一定可以作圆；③三角形的外心到三角形各边的距离都相等；④同圆或等圆中，等弦所对的弧相等；⑤直径平分弦，则垂直于弦. 其中正确的有 ()

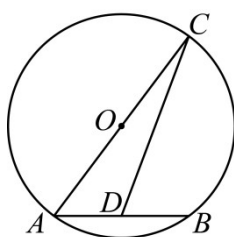
A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【变式 5】 . 如图，下列说法正确的是 ()



A. 线段 AB , AC , CD 都是 $\odot O$ 的弦

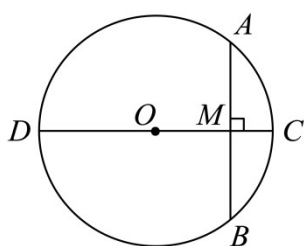
B. 线段 AC 经过圆心 O , 线段 AC 是直径

C. $AD = BD$

D. 弦 AB 把圆分成两条弧，其中 $\overset{\frown}{ACB}$ 是劣弧

题型 02 垂径定理

【典例 1】 . 如图， CD 是 $\odot O$ 的直径， $AB \perp CD$ 于点 M . 若 $AB = 8$, $MC = 2$, 则 OM 长是 ()



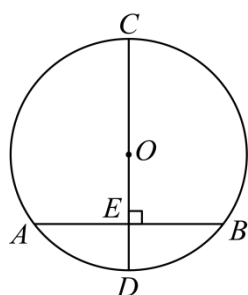
A . 6

B . 5

C . 4

D . 3

【变式1】 . 如图，线段 CD 是 $\odot O$ 的直径， $CD \perp AB$ 于点 E ，若 $AB=8$ ， $OE=3$ ，则 CE 的长是 ()



A . 8

B . 7

C . 6

D . 5

【变式2】 . 已知 $\odot O$ 的直径 $AB=10$ ，弦 $CD \perp AB$ 于点 M ，若 $OM : OA=3 : 5$ ，则弦 AC 的长度 () .

A . $2\sqrt{5}$

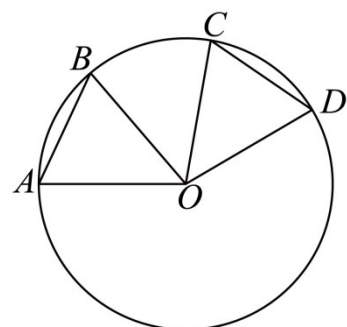
B . $4\sqrt{5}$

C . 3

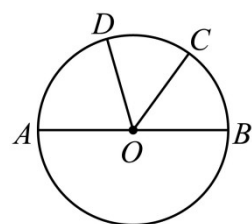
D . $2\sqrt{5}$ 或 $4\sqrt{5}$

题型 03 圆心角

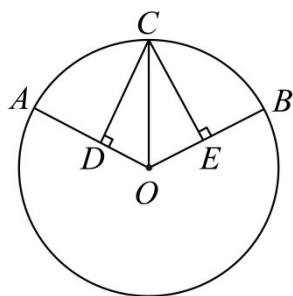
【典例1】 . 如图，在 $\odot O$ 中，请添上一个条件：_____，使得 $AB=CD$.



【变式1】 . 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ ， $\angle COD = 52^\circ$ ，则 $\angle AOD$ 的大小为_____ .



【变式2】 . 如图， D 、 E 分别是 $\odot O$ 的半径 OA 、 OB 上的点， $CD \perp OA$ ， $CE \perp OB$ ， $CD=CE$ ，则弧 AC 与弧 CB 弧长的大小关系是_____ .



题型 04 判断圆的位置关系

【典例 1】. 在直角坐标平面内， $M(2,0)$ ，圆 M 的半径为 4，那么点 $P(-2,3)$ 与圆 M 的位置关系是 ()

- A. 点 P 在圆内 B. 点 P 在圆上 C. 点 P 在圆外 D. 不能确定

【变式 1】. 若 $\odot O$ 的圆心 O 到直线 l 的距离 d 小于半径 r ，则直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系是_____.

【变式 2】. 已知 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 的半径不相等， $\odot O_1$ 的半径长为 3，若 $\odot O_2$ 上的点 A 满足 $AO_1 = 3$ ，则 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的位置关系是 ()

- A. 相交或相切 B. 相切或相离 C. 相交或内含 D. 相切或内含

【变式 3】. 已知 $\odot O$ 的半径为 2，直线 l 上有一点 M ，若 $OM = 2$ ，则直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系是 ()

- A. 相交 B. 相离或相交 C. 相离或相切 D. 相交或相切

【变式 4】. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 6, AC = 8, BC = 12$ ，如果分别以 AB 、 AC 为直径画圆，那么这两个圆的位置关系是_____.

题型 05 根据圆的位置关系求半径、圆心距等

【典例 1】. 已知 $\odot A$ 和 $\odot B$ 内切， $AB = 3$ ， $\odot A$ 的半径是 7，则 $\odot B$ 的半径是_____.

【变式 1】. 半径分别为 2 和 3 的两圆相切，它们的圆心距为_____.

【变式 2】. 已知 $\odot O$ 和直线 l 相交，圆心到直线 l 的距离为 10cm，则 $\odot O$ 的半径可能为 ()

- A. 8cm B. 9cm C. 10cm D. 11cm

【变式 3】. 如果半径分别为 r 和 2 的两个圆内含，圆心距 $d = 3$ ，那么 r 的取值范围是_____.

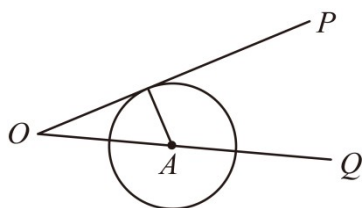
【变式 4】. $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4, BC = 3$ ， $\odot C$ 与 AB 相切，若 $\odot A$ 与 $\odot C$ 相交，则 $\odot A$ 半径 r 的取值范围是_____.

题型 06 圆的位置关系的综合应用

【典例1】 . 在 $\triangle ABC$ 中， $AC=3$ ， $BC=4$ ， $AB=5$ ，点 P 在 $\triangle ABC$ 内，分别以 A 、 B 、 P 为圆心画，圆 A 半径为 1 ，圆 B 半径为 2 ，圆 P 半径为 3 ，圆 A 与圆 P 内切，圆 P 与圆 B 的关系是（ ）

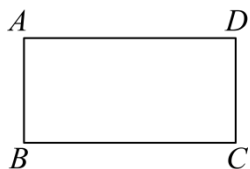
- A . 内含 B . 相交 C . 外切 D . 相离

【变式1】 . 如图，已知 $\angle POQ=30^\circ$ ，点 A 、 B 在射线 OQ 上（点 A 在点 O 、 B 之间），半径长为 2 的 $\odot A$ 与直线 OP 相切，半径长为 5 的 $\odot B$ 与 $\odot A$ 内含，那么 OB 的取值范围是（ ）



- A . $4 < OB < 7$ B . $4 \leq OB < 7$
C . $4 < OB < 9$ D . $4 \leq OB < 9$

【变式2】 . 如图，已知矩形 $ABCD$ 中， $AB=1$ ，以点 B 为圆心， AB 为半径作 $\odot B$ ，交 AB 的延长线于点 E ，连结 CE . 再以点 A 为圆心， AD 为半径作 $\odot A$. 若 $\odot A$ 与 $\odot B$ 相交且至少有一个交点在 $\triangle BEC$ 内部或在 $\triangle BEC$ 边上，设 $AD=k$ ，那么 k 的取值范围是_____ .

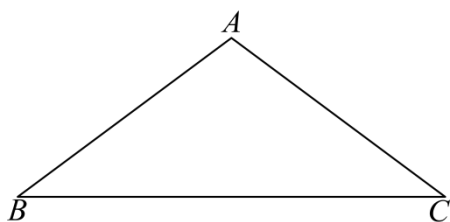


题型 07 圆的位置关系的综合应用II

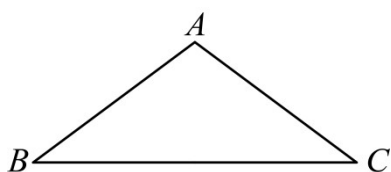
【典例1】 . 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=12$ ， $BC=5$ ，若以 C 为圆心， r 长为半径的圆 C 与边 AB 有交点，那么 r 的取值范围是（ ）

- A . $5 \leq r \leq 12$ 或 $r = \frac{60}{13}$ B . $5 < r < 12$
C . $\frac{60}{13} < r < 12$ D . $\frac{60}{13} \leq r \leq 12$

【变式1】 . 我们把以三角形的重心为圆心的圆叫做该三角形的重心圆 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=10$ ， $BC=16$ ，如果 $\triangle ABC$ 的重心圆与该三角形各边的公共点一共有 4 个，那么它的半径 r 的取值范围是_____ .



【变式2】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $\cos B = \frac{4}{5}$ ，分别以点 B 、 C 为圆心，1为半径长作 $\odot B$ 、 $\odot C$ ， D 为边 BC 上一点，将 $\triangle ABD$ 和 $\odot B$ 沿着 AD 翻折得到 $\triangle AB'D$ 和 $\odot B'$ ，点 B 的对应点为点 B' ， AB' 与边 BC 相交，如果 $\odot B'$ 与 $\odot C$ 外切，那么 $BD =$ _____.



题型 08 正多边形与圆

【典例1】 . 圆 O 半径长为2，对于圆 O 的内接正六边形 $ABCDEF$ ，下列说法错误的是（ ）

- A . 中心角是 60° B . 内角是 120°
C . 边心距为 $\sqrt{3}$ D . 边长为4

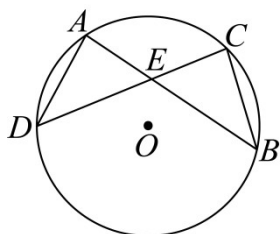
【变式1】 0 . 边长为2的等边三角形的边心距是（ ）

- A . $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B . $\sqrt{3}$ C . $2\sqrt{3}$ D . $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

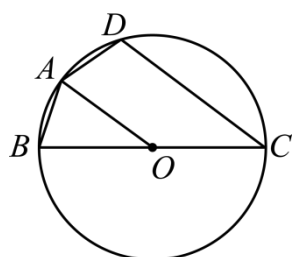
【变式2】 . 若一个正多边形无对角线，则这个正多边形外接圆直径与自身体长之比为

题型 09 解答题

【典例1】 . 已知，如图， $AD = BC$. 求证： $AB = CD$.

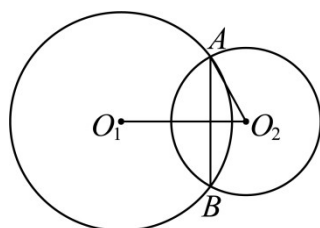


【变式1】 . 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ， BC 为 $\odot O$ 的直径， $OA \parallel CD$.



求证： $\widehat{AB} = \widehat{AD}$.

【变式2】 . 如图， $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于点A、B，连接AB、 O_1O_2 、 AO_2 ，已知 $AB = 48$ ， $O_1O_2 = 50$ ， $AO_2 = 30$.



(1)求 $\odot O_1$ 的半径长；

(2)试判断以 O_1O_2 为直径的 $\odot P$ 是否经过点B，并说明理由 .

【变式3】 . 定义：我们把平面内经过已知直线外一点并且与这条直线相切的圆叫做这个点与已知直线的点切圆 . 如图¹，已知直线 l 外有一点 H ，圆 Q 经过点 H 且与直线 l 相切，则称圆 Q 是点 H 与直线 l 的点切圆 . 阅读以上材料，解决问题：

已知直线 OA 外有一点 P ， $PA \perp OA$ ， $OA = 4$ ， $AP = 2$ ，圆 M 是点 P 与直线 OA 的点切圆 .

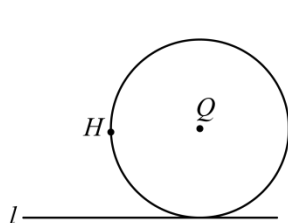


图1

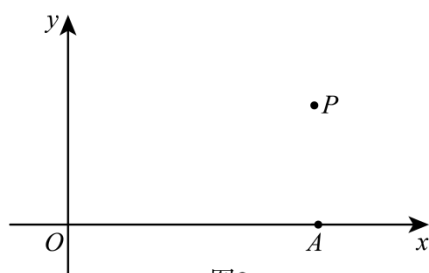


图2

(1)如果圆心 M 在线段 OP 上，那么圆 M 的半径长是——（直接写出答案） .

(2)如图2，以 O 为坐标原点、 OA 为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系 xOy ，点 P 在第一象限，设圆心 M 的坐标是 (x, y) .

①求 y 关于 x 的函数解析式；

②点 B 是①中所求函数图象上的一点，连接 BP 并延长交此函数图象于另一点 C . 如果 $CP:BP = 1:4$ ，求

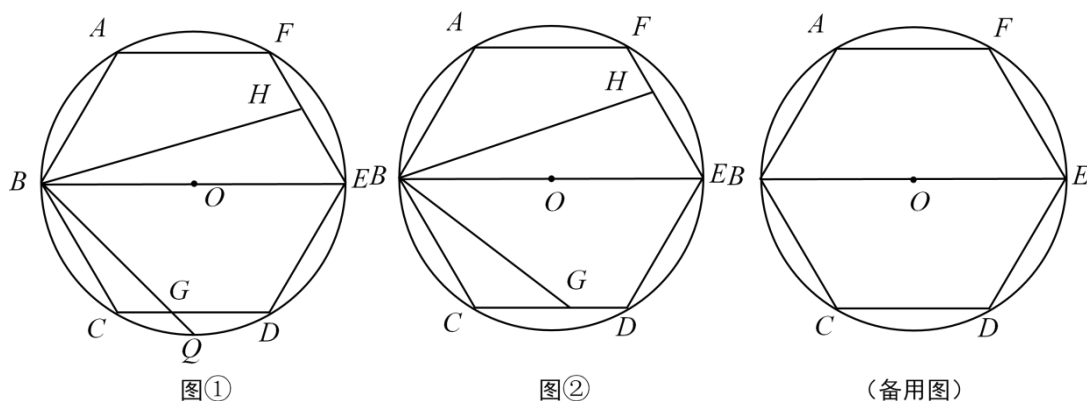
点 B 的坐标 .

【变式 4】 . 如图，已知圆 O 是正六边形 $ABCDEF$ 外接圆，直径 $BE=8$ ，点 G 、 H 分别在射线 CD 、 EF 上（点 G 不与点 C 、 D 重合），且 $\angle GBH=60^\circ$ ，设 $CG=x$ ， $EH=y$.

(1) 如图①，当直线 BG 经过弧 CD 的中点 Q 时，求 $\angle CBG$ 的度数；

(2) 如图②，当点 G 在边 CD 上时，试写出 y 关于 x 的函数关系式，并写出 x 的取值范围；

(3) 联结 AH 、 EG ，如果 $\triangle AFH$ 与 $\triangle DEG$ 相似，求 CG 的长 .



强化训练

一、单选题

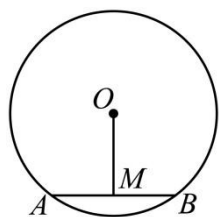
1. 下面四个命题中正确的是 ()

- A. 平面上不同的三点可以确定一个圆 B. 平分一条弦的直径必垂直于这条弦
C. 圆中相等的两条弦所对的弦心距相等 D. 任何一个三角形都有唯一一个外接圆

2. 已知 $\odot O$ 的半径为 3，点 P 在 $\odot O$ 外，则 OP 的长可以是 ()

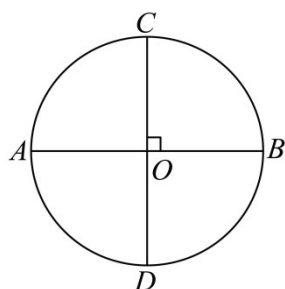
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 如图， $\odot O$ 的弦 $AB=6$ ， M 是 AB 的中点，且 $OM=4$ ，则 $\odot O$ 的半径等于 ()



- A. 4 B. 1 C. 5 D. 10

4. 如图， $\odot O$ 的半径为 2，直径 AB 、 CD 互相垂直，则弧 $\widehat{BC}$ 的长是 ()

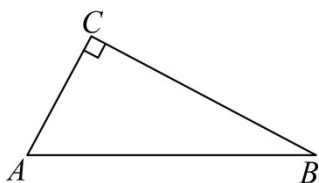


- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

5. 若正六边形的内切圆半径为 2，则其外接圆半径为 ()

- A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

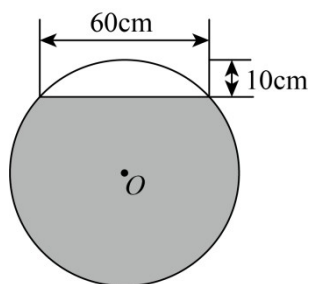
6. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $\tan B = \frac{1}{2}$ ，如果以点 C 为圆心，半径为 R 的 $\odot C$ 与线段 AB 有两个交点，那么 $\odot C$ 的半径 R 的取值范围是 ()



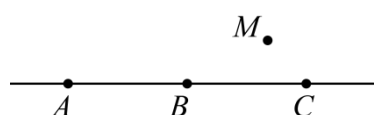
- A. $2 < R \leq \sqrt{5}$ B. $2 \leq R \leq \sqrt{5}$
C. $\sqrt{5} \leq R \leq 2\sqrt{5}$ D. $0 < R \leq \sqrt{5}$

二、填空题

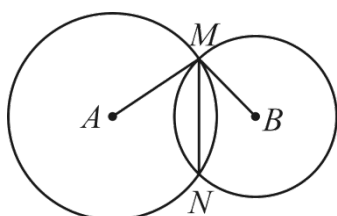
7. 正十边形的中心角的度数为_____.
8. 已知 $\odot O$ 的直径为 6cm ，点 A 在直线 l 上，且 $AO = 3\text{cm}$ ，那么直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系是_____.
9. 已知 $\odot O$ 中， $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$ ，则弦 AB 和 $2CD$ 的大小关系是_____.
10. 两个圆的半径分别是 8cm 和 $x\text{cm}$ ，圆心距为 5cm ，如果两圆内切，则 x 的值是_____ cm .
11. 某居民区一处地下圆形管道破裂，修理人员准备更换一段新管道，如图，污水水面宽度为 60cm ，污水水面至管道顶部的距离为 10cm ，则圆形管道的直径为_____ cm .



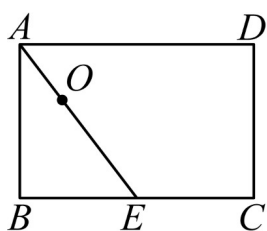
12. 如图所示，点 A, B, C 在同一直线上，点 M 在 AC 外，经过图中的三个点作圆，可以作_____个。



13. 如图，圆 A 和圆 B 相交于点 M, N ，连结 AM, MN, NB ， $\angle AMB = 90^\circ$ 。若 $MB = 7.5$ 、 $NM = 12$ ，则圆 A 的劣弧 MN 的长为_____。（ $\tan 37^\circ$ 取 0.75、 $\sin 37^\circ$ 取 0.6、 $\cos 37^\circ$ 取 0.8，保留 π ）

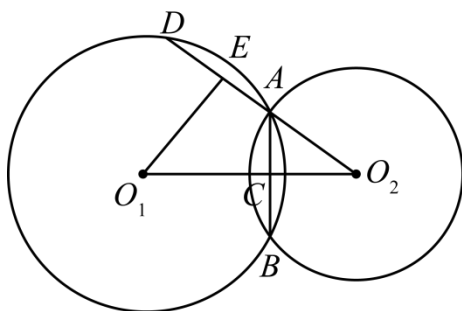


14. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ，点 E 是 BC 的中点，连接 AE ，点 O 是线段 AE 上一点， $\odot O$ 的半径为 1，如果 $\odot O$ 与矩形 $ABCD$ 的各边都没有公共点，那么线段 AO 长的取值范围是_____。



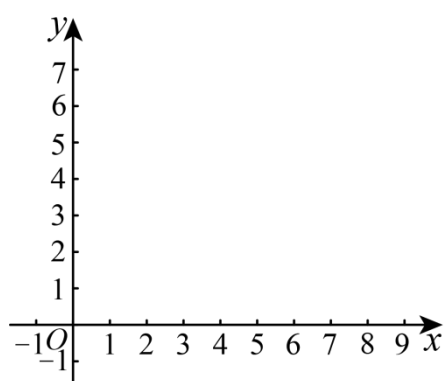
三、解答题

15. 如图， $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A, B 两点， O_1O_2 与 AB 交于点 C ， O_2A 的延长线交 $\odot O_1$ 于点 D ，点 E 为 AD 的中点， $AE = AC$ ，连接 O_1E 。求证： $O_1E = O_1C$ ；



16. 已知：在平面直角坐标系中（如图），反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 在第一象限内的图像与直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)

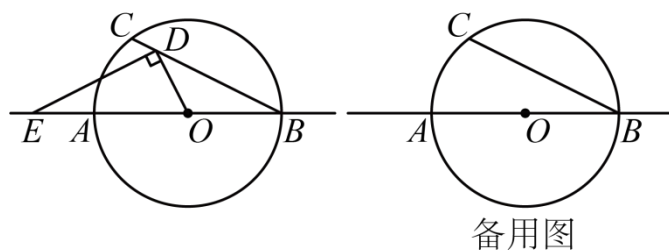
的交点为 $A(3, m)$ ，且直线 $y = kx + b$ 与直线 $y = -\frac{1}{3}x$ 平行。



(1) 求直线 $y = kx + b$ 的表达式；

(2) 若以 A 为圆心、半径长为 r 的 $\odot A$ 与以原点 O 为圆心、半径长为 1 的 $\odot O$ 相切，求 r 的值。

17. 如图，在 $\odot O$ 中，直径 AB 长为 $4\sqrt{5}$ ，弦 BC 的长为 8，点 D 是 BC 上一点，过点 D 作 OD 的垂线交直线 AB 于点 E 。



(1) 求 $\angle CBO$ 的正切值。

(2) 当 $\triangle BOD$ 与 $\triangle BDE$ 相似时，求 BD 的长。

(3) 以点 E 为圆心， ED 长为半径画 $\odot E$ ，试根据线段 BD 的长度情况探究 $\odot E$ 和 $\odot O$ 的位置关系。