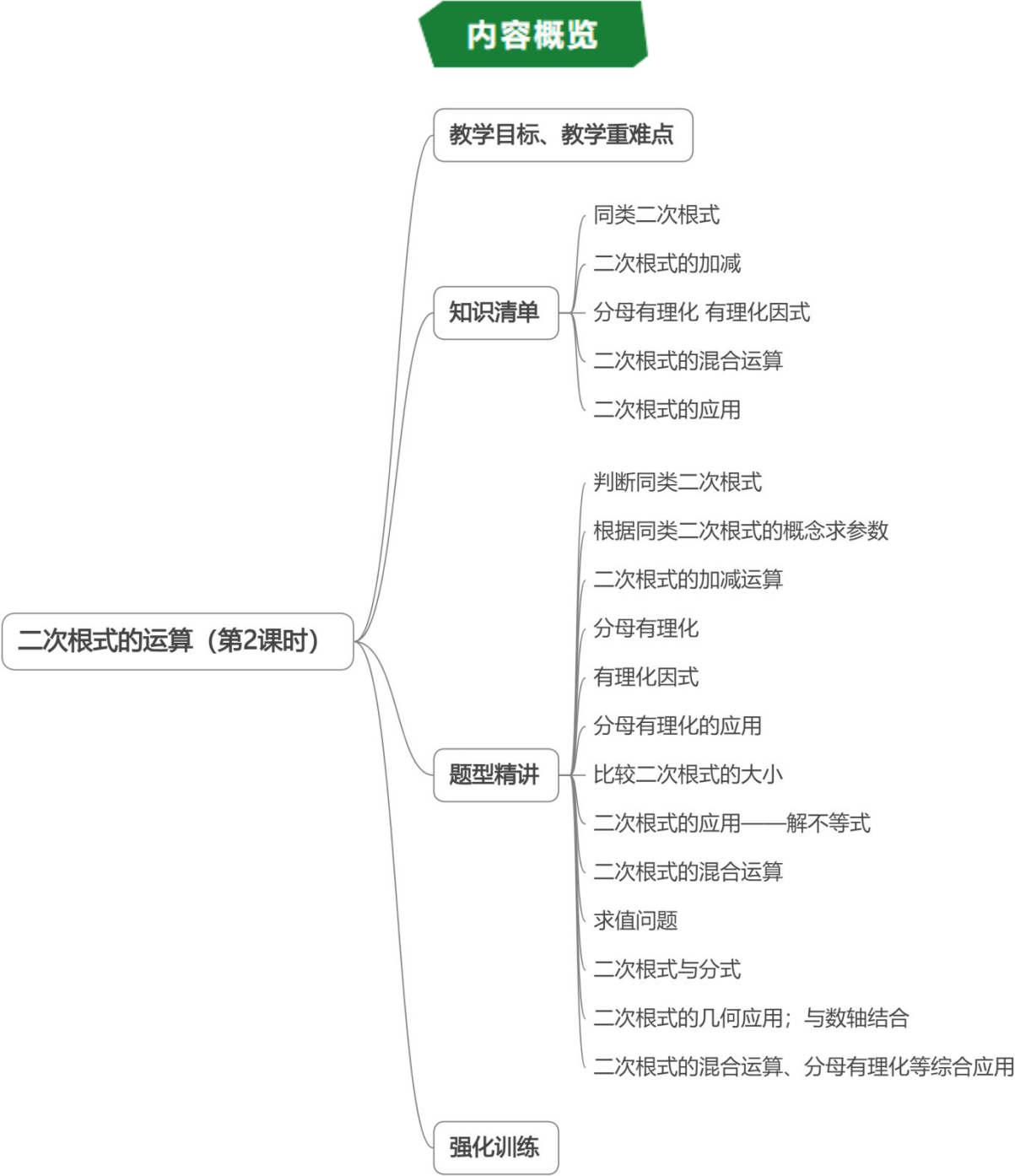


专题 20.4 二次根式的运算（第 2 课时）



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 知道同类二次根式的概念； 2. 掌握二次根式的加减运算； 3. 理解分母有理化，会求有理化因式；
------	---

	4. 学会二次根式的混合运算。
教学重难点	1.重点 (1) 同类二次根式的概念及其应用； (2) 二次根式的加减及其混合运算； (3) 分母有理化、有理化因式，二次根式混合运算的应用。 2.难点 (1) 二次根式运算有关的化简、变形； (2) 二次根式混合运算的综合应用。

知识清单

知识点1 同类二次根式

1.问题：把 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{18}$ 化成最简二次根式，所得结果有什么相同之处？

分析： $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ，二次根式 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的被开方数相同，都是2.

2.同类二次根式：几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式叫作同类二次根式.

例如， $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{18}$ 是同类二次根式，而 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式.

要点：

(1)判断几个二次根式是否是同类二次根式，必须先将二次根式化成最简二次根式，再看被开方数是否相同；

(2)几个二次根式是否是同类二次根式，只与被开方数及根指数有关，而与根号外的因式无关.

【即学即练】

1.下列根式中，与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{4}$ C. $\sqrt{20}$ D. $\sqrt[3]{2}$

2.下列二次根式中，能与 $\sqrt{3}$ 合并的是 ()

- A. $\sqrt{9}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $\sqrt{6}$

3.下列与 $\sqrt{2a}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2a^2}$ C. $\sqrt{2a^3}$ D. $\sqrt{a}$

4. 下列各组二次根式中，是同类二次根式的为 ()

A. $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{9}$ B. $3\sqrt{2}$ 和 $2\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{2a}$

5. 如果最简二次根式 $\sqrt[3]{3+a}$ 与 $\sqrt{b}$ 是同类二次根式，那么 b 的值等于_____.

知识点2 二次根式的加减

1. 二次根式的加减

二次根式的加减实质就是合并同类二次根式，即先把各个二次根式化成最简二次根式，再把其中的同类二次根式进行合并. 对于没有合并的二次根式，仍要写到结果中.

即： $a\sqrt{m} + b\sqrt{m} = (a+b)\sqrt{m} (m \geq 0)$ ； $a\sqrt{m} - b\sqrt{m} = (a-b)\sqrt{m} (m \geq 0)$

要点：

(1) 在进行二次根式的加减运算时，整式加减运算中的交换律、结合律及去括号、添括号法则仍然适用.

(2) 二次根式加减运算的步骤：

- 1) 将每个二次根式都化简成为最简二次根式；
- 2) 判断哪些二次根式是同类二次根式，把同类的二次根式结合为一组；
- 3) 合并同类二次根式.

【即学即练】

1. 合并下列各式中的同类二次根式并计算.

(1) $(4\sqrt{5} - 4\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}$ ；

(2) $2\sqrt{9} - \frac{2}{3}\sqrt{3} + \sqrt{27}$ ；

(3) $8\sqrt{x} - (\frac{1}{2}\sqrt{18x} + \sqrt{2x^3})$ ；

(4) $40\sqrt{5} - \sqrt{1000} + 5\sqrt{10}$.

2. 合并下列各式中的同类二次根式：

(1) $\sqrt{12} + 3\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}\sqrt{48}$ ；

(2) $a\sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{4b} - (\frac{\sqrt{a}}{2} - b\sqrt{\frac{1}{b}})$ ；

(3) $\frac{2}{3}\sqrt{8x} - 2\sqrt{\frac{x}{2}} + 2x\sqrt{\frac{2}{9x}}$ ；

知识点3 分母有理化 有理化因式

1.分母有理化

$$\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}} \text{ 和 } \frac{\sqrt{2a}}{3b}$$

思考：把代数式 $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}}$ 和 $\frac{\sqrt{2a}}{3b}$ 中分数线下的式子看作分母，前一个分母是根式，后一个分母是整式，这两个分母之间有什么关系？怎样把 $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}}$ 转化为 $\frac{\sqrt{2a}}{3b}$ ？

把 $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}}$ 的分数线上，下两式看作两个数相除，利用除法的性质以及根式乘法的法则可得

$$\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}} = \frac{\sqrt{2a} \cdot \sqrt{3b}}{\sqrt{3b} \cdot \sqrt{3b}} = \frac{\sqrt{6ab}}{3b}$$

把分母中的根号化去的过程称为分母有理化。分母有理化的方法：一般是把分子和分母都乘以同一个适当的代数式，使分母不含根号。

2.有理化因式

思考： $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = ?$

利用平方差公式，得 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y$

两个含有二次根式的非零代数式相乘，如果它们的积不含有二次根式，我们就说这两个含有二次根式的非零代数式互为**有理化因式**。如 $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 与 $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ 互为有理化因式； $\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$ 也互为有理化因式。

【即学即练】

1. 二次根式 $\sqrt{x} - 2$ 的有理化因式可以是 _____。

2. 写出 $\sqrt{2a-b}$ 的一个有理化因式_____。

3. 分母有理化： $\frac{2}{\sqrt{3}-2} =$ _____；

知识点4 二次根式的混合运算

二次根式的混合运算是对二次根式的乘除及加减运算法则的综合运用。

要点：

- (1)二次根式的混合运算顺序与实数中的运算顺序一样，先乘方，后乘除，最后算加减，有括号要先算括号里面的；
- (2)在实数运算和整式运算中的运算律和乘法公式在二次根式的运算中仍然适用；
- (3)二次根式混合运算的结果要写成最简形式。

【即学即练】

1. 计算：

$$(1) \sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{8}$$

$$(2) 6\sqrt{1\frac{3}{5}} + 2\sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{2}\sqrt{60}\right)$$

2. 计算： $\sqrt{2} \times \sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{3}-1} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$.

3. 计算：

(1) $\sqrt{27} - \sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{18} \div \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ ；

(2) $x\sqrt{\frac{y}{x}} - \sqrt{y} \div \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x-y}$.

知识点5 二次根式的应用

1. 二次根式的比较大小

①能化简成同类二次根式的，化简后比较系数，系数大的二次根式就大；

②不能化简成同类二次根式的：

a. 正数大于负数；

b. 同为正数时，进行平方运算，结果大的二次根式就大；

2. 二次根式的应用

把二次根式的运算与现实生活相联系，体现了所学知识之间的联系，感受所学知识的整体性，不断丰富解决问题的策略，提高解决问题的能力 .

二次根式的应用主要是在解决实际问题的过程中用到有关二次根式的概念、性质和运算的方法 .

【即学即练】

1. 比较大小：(1) $3\sqrt{5}$ _____ $4\sqrt{2}$ ；

(2) $4 - \sqrt{3}$ _____ $2 + \sqrt{3}$ ；

(3) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$ _____ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ；

(4) $\sqrt{2019} - \sqrt{2018}$ _____ $\sqrt{2018} - \sqrt{2017}$.

2. 不等式 $\sqrt{2}x > x+1$ 的解集是

3. 已知 $a+b=-8$, $ab=1$, 则 $\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值为_____ .

题型精讲

题型01 判断同类二次根式

【典例1】 . 下列二次根式中，与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 ()

A . $\sqrt{9}$ B . $\sqrt{50}$ C . $\sqrt{75}$ D . $\sqrt{125}$

【变式 1】 . 下列二次根式中，不能与 $\sqrt{5}$ 合并的是 ()

A . $2\sqrt{5}$ B . $\sqrt{15}$ C . $\sqrt{20}$ D . $\frac{1}{\sqrt{5}}$

【变式 2】 . 下列二次根式中，与 $\sqrt{5a}$ 是同类二次根式的是 ()

A . $\sqrt{\frac{a}{15}}$ B . $\sqrt{25a}$ C . $\sqrt{5a}$ D . $\sqrt{45a}$

【变式 3】 . 下列二次根式中，与 $\sqrt{6}$ 是同类二次根式的是 ()

A . $\sqrt{12}$ B . $\sqrt{18}$ C . $\sqrt{24}$ D . $\sqrt[3]{6}$

【变式 4】 . 下列各组二次根式中，属于同类二次根式的是 ()

A . $\sqrt{12}$ 与 $\sqrt{18}$ B . $\sqrt{\frac{16}{3}}$ 与 $\sqrt{\frac{2}{3}}$
C . $\sqrt{0.5}$ 与 $\sqrt{5}$ D . $\sqrt{32x^3}$ 与 $\sqrt{2x}$

题型 02 根据同类二次根式的概念求参数

【典例 1】 . 若最简二次根式 $^{2a-4}\sqrt{3a+b}$ 与 $\sqrt{a-b}$ 是同类根式，则 $2a-b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【变式 1】 . $\sqrt{18}$ 与最简二次根式 $\sqrt{a-5}$ 是同类二次根式，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

题型 03 二次根式的加减运算

【典例 1】 . 计算：

(1) $\sqrt{5} + 3\sqrt{7} + 4\sqrt{5} - 4\sqrt{7}$;

(2) $\sqrt{12} - \sqrt{20} + 3\sqrt{5} - \sqrt{125}$;

(3) $\sqrt{8} + \left(\frac{1}{2}\sqrt{12} - \frac{1}{5}\sqrt{50} \right)$;

(4) $\sqrt{12} - \sqrt{18} - \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$;

(5) $\sqrt{2x} + \sqrt{8x} - 2\sqrt{18x} (x \geq 0)$;

$$(6) \frac{2}{3}\sqrt{9x} - \left(6\sqrt{\frac{x}{4}} + 2\sqrt{x}\right) (x > 0)$$

【变式 1】 . 计算：

$$(1) 7\sqrt{12} - 5\sqrt{48} + 2\sqrt{\frac{1}{3}} + 9\sqrt{3} ;$$

$$(2) (\sqrt{8} - 2\sqrt{0.25}) - \left(\sqrt{1\frac{1}{8}} + \sqrt{50} + \frac{2}{3}\sqrt{72}\right) ;$$

$$(3) \frac{2}{3}\sqrt{9x} + 6\sqrt{\frac{x}{4}} - 2x\sqrt{\frac{1}{x}} (x > 0) ;$$

$$(4) \left(4b\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{2}{b}\sqrt{ab^3}\right) - \left(3a\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{9ab}\right) (a > 0) .$$

题型 04 分母有理化

【典例 1】 . 分母有理化：

$$(1) \frac{5}{\sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}} ;$$

$$(2) \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}} ;$$

$$(3) \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【变式 1】 . 分母有理化： $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \underline{\hspace{2cm}} .$

【变式 2】 . 把式子分母有理化过程中，错误的是 ()

$$A. \frac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} = \frac{(m-n)(\sqrt{m}+\sqrt{n})}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$$

$$B. \frac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$$

$$C. \frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} = \frac{(m-n)(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})} = \sqrt{m} - \sqrt{n}$$

$$D. \frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} = \sqrt{m}-\sqrt{n}$$

【变式3】 . 化简： $\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}$ ；

题型 05 有理化因式

【典例1】 . 二次根式 $\sqrt{m}-1$ 的一个有理化因式是 ()

- A . $\sqrt{m}+1$ B . $\sqrt{m}+1$ C . $\sqrt{m}-1$ D . $\sqrt{m}-1$

【变式1】 . 下列各式中，互为有理化因式的是 ()

- A . $\sqrt{a+b}, \sqrt{a-b}$ B . $\sqrt{5}-\sqrt{2}, \sqrt{5}-\sqrt{2}$
C . $\sqrt{x-1}, \sqrt{x-1}$ D . $-\sqrt{a}+\sqrt{b}, \sqrt{a}-\sqrt{b}$

【变式2】 . 下列式子中，是 $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ 的有理化因式的是 ()

- A . $a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$ B . $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ C . $b\sqrt{x}+a\sqrt{y}$ D . $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

题型 06 分母有理化的应用

【典例1】 . 已知 $a = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ ， $b = 2+\sqrt{5}$ ，则 a, b 的关系是 ()

- A . 相等 B . 互为相反数
C . 互为倒数 D . 互为有理化因式

【变式1】 . 式子 $\sqrt{5}-2$ 的倒数是 ()

- A . $\sqrt{5}+2$ B . $-\sqrt{5}-2$ C . $2\sqrt{5}+2$ D . $\sqrt{5}+2\sqrt{2}$

【变式2】 . 已知： $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ ， $b = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ，则 a 与 b 的关系是 ()

- A . $a-b=0$ B . $a+b=0$ C . $ab=1$ D . $a^2=b^2$

题型 07 比较二次根式的大小

【典例1】 . 比较大小： $-3\sqrt{5}$ _____ $-5\sqrt{2}$ (填“>”、“<”或“=”) .

【变式1】 . 比较大小： $-3\sqrt{2}$ _____ $-\sqrt{19}$.

【变式2】 . 比较大小： $-3\sqrt{\frac{1}{3}}$ _____ $-2\sqrt{\frac{1}{2}}$

【变式3】 . 比较大小： $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ _____ $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$

【变式4】 . 比较大小： $2+\sqrt{3}$ _____ $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$. (填“>”“<”或“=”)

题型 08 二次根式的应用——解不等式

【典例1】 . 不等式 $x-1 > \sqrt{3}x$ 的解集是_____ .

【变式1】 . 不等式 $2(x-1) < \sqrt{5}x$ 的解集为_____ .

【变式2】 . 解不等式： $\sqrt{3}x - \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{3} < \sqrt{\frac{1}{3}} + 2x$.

题型 09 二次根式的混合运算

【典例1】 . 计算： $4\sqrt{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{3} - (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + \frac{1}{\sqrt{3}-2}$.

【变式1】 . 计算： $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + (\sqrt{48} + 2\sqrt{6}) \div \sqrt{12}$.

【变式2】 . 计算：

$$(1) \sqrt{27} \div \sqrt{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{3}}(\sqrt{12} - \sqrt{6})$$

$$(2) (2\sqrt{3} + \sqrt{5})(2\sqrt{3} - \sqrt{5}) - (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2$$

题型 10 求值问题

【典例1】 . 已知 $x = \sqrt{5} - 1$, 则代数式 $x^2 + 3x + 2$ 的值为_____ .

【变式1】 . 若 $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ 的整数部分是 a , 小数部分是 b , 则 $a^2 + ab =$ _____ .

【变式2】 . 已知 $x = 2\sqrt{3} + 2$, $y = 2\sqrt{3} - 2$, 则 $x^2 + 2xy + y^2 =$ _____ .

【变式3】 . 已知 $a = 2\sqrt{3} - 1$, $b = 2\sqrt{3} + 1$, 求下列各式的值：

$$(1) ab ;$$

$$(2) a^2 - b^2 ;$$

$$(3) ab^2 - a^2b .$$

题型 11 二次根式与分式

【典例 1】. 先化简，再求值： $\left(\frac{x+1}{x}-1\right) \div \frac{x^2-1}{x^2-x}$ ，其中 $x = \sqrt{3}+1$.

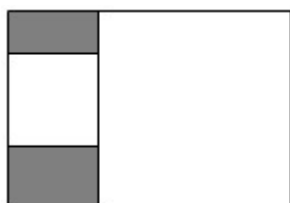
【变式 1】. 已知 $x = \sqrt{3}-1$ ，则 $\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right) \cdot \frac{x^2-4}{2(x-1)} =$ _____ .

题型 12 二次根式的几何应用；与数轴结合

【典例 1】. 若等腰三角形的两条边分别长 $3\sqrt{2}$ ， $5\sqrt{3}$ ，则此三角形周长为_____ .

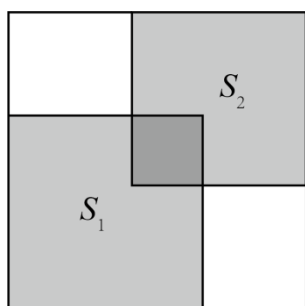
【变式 1】. 在数轴上，表示到 $\sqrt{5}$ 这个点的距离为 $3\sqrt{5}$ 的点对应的数是：_____ .

【变式 2】. 如图，长方形内有两个相邻的正方形，其面积分别为 6 和 24 ，则图中阴影部分面积为 ()



- A . 5 B . $5\sqrt{5}$ C . 6 D . $6\sqrt{6}$

【变式 3】. 如图，在大正方形纸片中放置两个小正方形，已知两个小正方形的面积分别为 $S_1=18$ ， $S_2=12$ ，重叠部分是一个正方形，其面积为 2 ，则空白部分的面积为 ()



- A . 6 B . 16 C . $8\sqrt{6}-16$ D . $8\sqrt{6}-8$

题型 13 二次根式的混合运算、分母有理化等综合应用

【典例 1】. 计算下列各式：

$$(1) \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right) \div \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) ;$$

$$(2) \frac{a-4b}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}} \div (a+4\sqrt{ab}+4b) ;$$

$$(3) \left(\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \div \sqrt{ab} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} .$$

【变式1】 . 计算：

$$(1) \sqrt{\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 2} - \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} ;$$

$$(2) \left(\sqrt{xy} - \frac{xy}{x+\sqrt{xy}} \right) \div \frac{\sqrt{xy}-y}{x-y} \quad (x>0, y>0) .$$

【变式2】 . 化简：
$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3 + 2x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{xy} - 3y}{x-y} .$$

【变式3】 . 先化简，再求值，已知 $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ， $y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ，求代数式 $x^2 - 2xy + y^2$ 的值；

【变式4】 . 先化简再求值：
$$\left[\frac{4}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{b}-\sqrt{a})} \right] \div \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$$
，其中 $a=3$ ， $b=4$.

【变式5】 . 观察下列式式子的化简过程：

$$\textcircled{1} \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1 ;$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \sqrt{3}-\sqrt{2} ;$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3} ; \dots$$

(1) 请直接写出第四个等式，并猜想第 n 个等式；

(2) 求 $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2023}}$ 的值 .

强化训练

一、单选题

1. 下列根式中，是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{6}$ B. $3\sqrt{5}$ 和 $\sqrt{15}$ C. $\sqrt{12}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ D. $\sqrt{8}$ 和 $\sqrt{\frac{2}{3}}$

2. 化简 $\sqrt{8} - \sqrt{2}(\sqrt{2}+2)$ 得 ()

- A . -2 B . $\sqrt{2}-2$ C . 2 D . $4\sqrt{2}-2$
- 3 . $\sqrt{x-y}$ 的有理化因式是 ()
- A . $\sqrt{x-y}$ B . $\sqrt{x+y}$ C . $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ D . $\sqrt{x}+\sqrt{y}$
- 4 . 计算 $\sqrt{48}-2\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{8}}\times\sqrt{27}$ 的结果是 ()
- A . $2\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{6}}{4}$ B . $2\sqrt{3}+\frac{3}{2}$ C . $6\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{6}}{4}$ D . $2\sqrt{3}+6\sqrt{6}$
- 5 . 已知 $m=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, 下列各式为负值的是 () .
- A . $\frac{1}{m}$ B . $2-(\sqrt{3}+m)$ C . $m-1$ D . $1-\sqrt{3}m$
- 6 . 化简 $\sqrt{-a^3}-a^2\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 的结果是 ()
- A . $-2a\sqrt{-a}$ B . $-2a\sqrt{a}$ C . 0 D . $2a\sqrt{-a}$
- 7 . 下列说法中, 正确的是 ()
- A . $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 互为倒数
- B . 若 $(\sqrt{2}-2)x>1$ 则 $x>\frac{1}{\sqrt{2}-2}$
- C . 若 $\sqrt{x+3}$ 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式, 则 $x+3$ 与 3 不一定相等
- D . 若 $a+b<0$, 则 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{1}{b}\sqrt{ab}$
- 8 . 对于任意的正数 x 、 y 的新定义运算 $\otimes$ 为: $x\otimes y=\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}(x>y) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}(x<y)\end{cases}$, 计算 $(18\otimes 12)+(27\otimes 32)$ 的结果为 ()
- A . $7\sqrt{2}$ B . $\sqrt{3}$ C . $7\sqrt{2}-\sqrt{3}$ D . $7\sqrt{2}+\sqrt{3}$

二、填空题

- 9 . 比较大小: $2\sqrt{5}$ _____ $3\sqrt{3}$
- 10 . $2\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ 的有理化因式是_____ .

11. 若 $\sqrt{5}$ 和最简二次根式 $3\sqrt{2m-1}$ 是同类二次根式，则 $m =$ _____ .

12. 不等式 $x - 3\sqrt{2} > \sqrt{2}x$ 的解集是_____ .

13. 计算： $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2023} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{2024} =$ _____ .

14. 定义：我们将 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ 与 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ 称为一对“对偶式”，因为

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$ ，可以有效地去掉根号，若 $\sqrt{18-x} - \sqrt{11-x} = 1$ ，则

$\sqrt{18-x} + \sqrt{11-x} =$ _____ .

三、解答题

15. 计算：

$$(1) \sqrt{18} + \sqrt{27} \div \sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{24} ;$$

$$(2) \sqrt{12} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{(2+\sqrt{3})^2}{2} .$$

16. 计算：

$$(1) \left(\sqrt{6} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) - \left(\sqrt{24} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

$$(2) \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$(3) (7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3}) - (\sqrt{3}-1)^2$$

$$(4) \sqrt{18} - \sqrt{\frac{9}{2}} - \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}} + (\sqrt{3}-2)^0$$

$$17. \text{ 计算： } 2\sqrt{12a} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3a}{4}} + a\sqrt{\frac{3}{a}} .$$

$$18. \text{ 计算： } \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

19. 已知： $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ， $y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ，求 $x^2 + xy + y^2$ 的平方根；

$$20. \text{ 当 } 0 < x < 1 \text{ 时，化简： } \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{1}{x} \right) .$$

21. 定义：若两个二次根式 m ， n 满足 $m \cdot n = p$ ，且 p 是有理数，则称 m 与 n 是关于 p 的美好二次根式。

(1) 若 m 与 $\sqrt{2}$ 是关于 6 的美好二次根式，求 m 的值：

(2) 若 $1 - \sqrt{3}$ 与 $4 + \sqrt{3}m$ 是关于 n 的美好二次根式，求 m 和 n 的值。

22. 阅读下面材料：

我们在学习二次根式时，熟悉的是分母有理化以及应用，其实，还有一个方法叫做“分子有理化”，与分母有理化类似，分母和分子都乘以分子的有理化因式，从而消掉分子中的根式比如：

$$\sqrt{7} - \sqrt{6} = \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{6})(\sqrt{7} + \sqrt{6})}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}, \text{ 分子有理化可以用来比较某些二次根式的大小，也可以用来处}$$

理一些二次根式的最值问题。例如：比较 $\sqrt{7} - \sqrt{6}$ 和 $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ 的大小可以先将它们分子有理化如下：

$$\sqrt{7} - \sqrt{6} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}, \quad \sqrt{6} - \sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}, \text{ 因为 } \sqrt{7} + \sqrt{6} > \sqrt{6} + \sqrt{5}, \text{ 所以 } \sqrt{7} - \sqrt{6} < \sqrt{6} - \sqrt{5}. \text{ 再例如：}$$

求 $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}$ 的最大值。做法如下：解：由 $x+2 \geq 0$ ， $x-2 \geq 0$ 可知 $x \geq 2$ ，而

$$y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = \frac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}, \text{ 当 } x=2 \text{ 时，分母 } \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} \text{ 有最小值 } 2, \text{ 所以 } y \text{ 的最大值是}$$

2。

解决下述问题：

$$(1) \text{ 由材料可知， } \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}};$$

(2) 比较 $3\sqrt{2} - 4$ 和 $2\sqrt{3} - \sqrt{10}$ 的大小；

(3) 式子 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$ 的最小值是_____。

23. 我国南宋时期数学家秦九韶曾提出利用三角形的三边求面积的公式，此公式与古希腊几何学家海伦提

出的公式如出一辙，即三角形的三边长分别为 a ， b ， c ，记 $p = \frac{a+b+c}{2}$ ，则其面积

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

这个公式也被称为海伦-秦九韶公式。

(1) 当三角形的三边 $a=3$ ， $b=5$ ， $c=6$ 时，请你利用公式计算出三角形的面积；

(2) 一个三角形的三边长依次为 $\sqrt{5}$ ， $\sqrt{6}$ ， $\sqrt{7}$ ，请求出三角形的面积；

(3) 若 $p=8$ ， $a=4$ ，求此时三角形面积的最大值。

