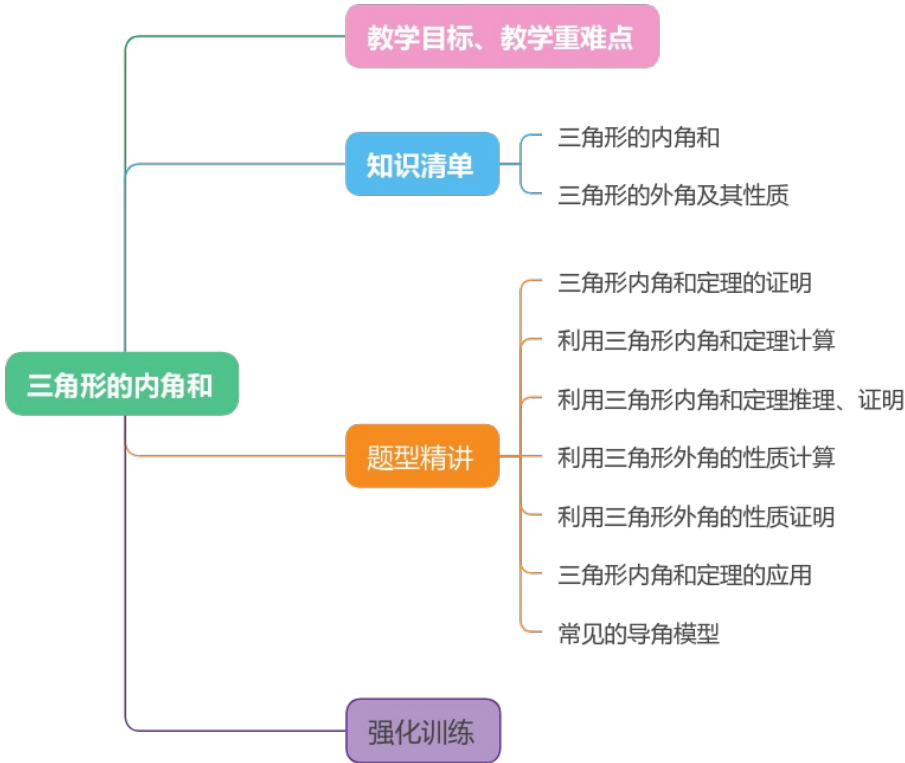


专题 17.2 三角形的内角和

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1.掌握三角形内角和为 180° 定理及直角三角形两锐角互余的推论，能熟练计算内角角度； 2. 理解三角形外角的定义、外角的两个性质，能区分内角与外角并运用性质求解角度； 3. 会用平行线性质、平角定义证明内角和定理，能规范书写简单的几何推理过程; 4.掌握常见的导角模型，熟练地运用三角形内角和定理及三角形外角性质解题.
教学重难点	1.重点 三角形内角和定理的推导证明及简单角度计算；内角和与外角性质的综合运用，解决基础几何推理和计算问题。

2.难点

综合运用内角和、外角性质解决复杂的多角计算问题。

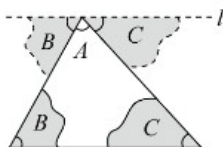
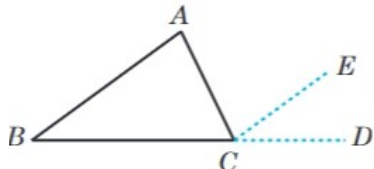
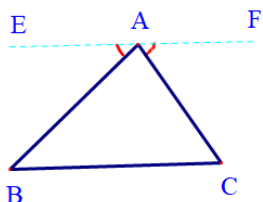
知识清单

知识点 01 三角形的有关概念

1.三角形的内角和

(1) 三角形内角和定理：三角形内角和等于_____。

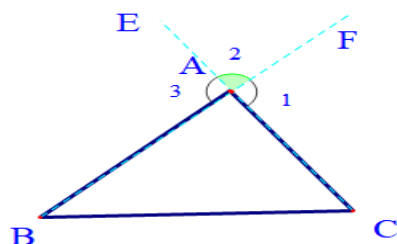
(2) 三角形内角和定理的证明

剪拼法	平行线+内错角+同位角	平行线+内错角
		

2.三角形的外角及其性质

(1) 三角形外角的定义

三角形一个内角的**一边**与**另一边的反向延长线**所组成的角叫作三角形(与此内角相邻)的_____。

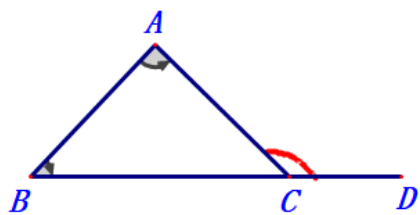


$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 都是 $\triangle ABC$ 的外角，
但 $\angle 2$ 不是 $\triangle ABC$ 的外角。

(2) 三角形外角的性质

① 三角形的外角等于_____。

② 三角形的外角大于_____。

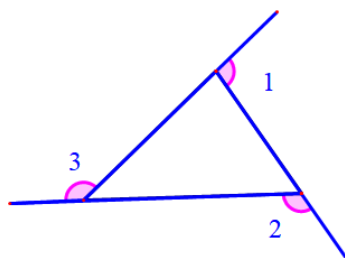


$$\angle ACD = \angle A + \angle B$$

$$\angle ACD > \angle A, \angle ACD > \angle B$$

(3) 三角形的外角和：三角形的外角和等于_____。

注意：在三角形的每个顶点处只能取一个外角。



$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$$

3.常见的导角模型

(1) 常见的三种基本模型

	8 字型	A 字型	燕尾型
图形			
结论	$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$	$\angle B + \angle C = \angle ADE + \angle AED$	$\angle BOC = \angle A + \angle B + \angle C$

(2) 三角形中的叠角模型

	不压边求角	压一边求角	压两边求角
图形			
结论	$\angle 1 + \angle 2 = 2\angle A$	$\angle 1 - \angle 2 = 2\angle A$	$\angle 1 + \angle 2 = 2\angle A$

(3) 双角平分线的夹角模型

	模型一 (双内角平分线)	模型二 (双外角平分线)	模型三 (内外角平分线)
图形			
结论	$\angle D = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$	$\angle D = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$	$\angle D = \frac{1}{2}\angle A$

题型精讲

题型 01 三角形内角和的证明

【典例 1】我们在解决“三角形内角和”问题时，将三角形的三个内角顺次标上 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ ，如图 1，再将 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 剪下，将它们与 $\angle 3$ 拼在一起，如图 2。

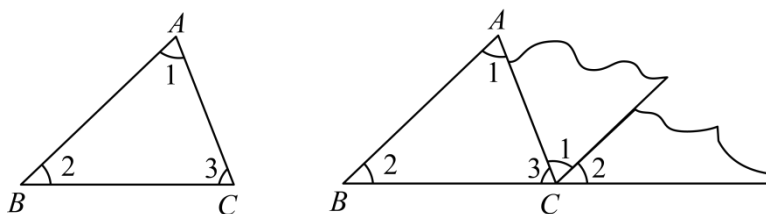


图1

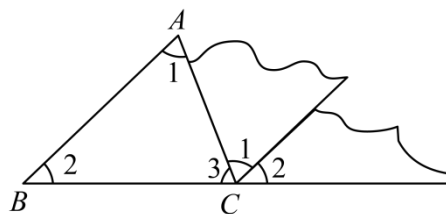


图2

- (1) 在图 2 中，通过 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 的拼接，你发现了什么？
- (2) 通过图 2 中的发现，你能得出什么猜想？
- (3) 通过图 2 的拼接过程，找到一种作辅助线的方法来证明你的猜想。

【变式1】 在学习三角形的内角时，老师引导同学们根据拼合过程得到启发，如图¹，过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 作直线 l 平行于 $\triangle ABC$ 的边 BC ，由平行线的性质与平角的定义就能证明“三角形的内角和等于 180° ”这个结论。

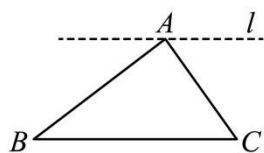


图1

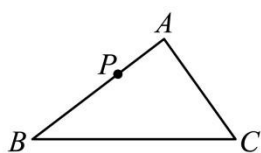


图2

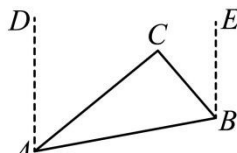
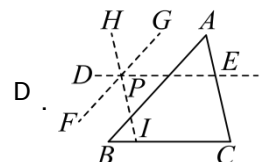
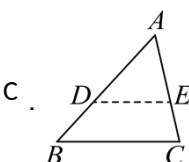
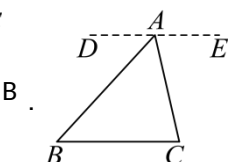
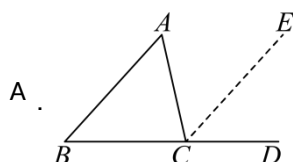


图3

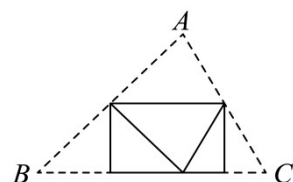
如果将“顶点 A ”这个特殊的位置换成“边 AB 上的任意一点 P ”，过点 P 分别作 $\triangle ABC$ 另外两边的平行线，那么由平行线的性质与平角的定义也能证明“三角形的内角和等于 180° ”这个结论。请你先作出辅助线，再完成这个证明过程。

已知，如图²，在 $\triangle ABC$ 中，点 P 是边 AB 上的任意一点。求证： $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ 。

【变式2】 在探究证明“三角形的内角和等于 180° ”时，飞翔班的同学作了如下四种辅助线，其中不能证明“三角形的内角和等于 180° ”的是（ ）



【变式3】 “生活中处处有数学”，如图，折叠一张三角形纸片，把三角形的三个角拼在一起，就可以得到一个著名的常用的几何结论，这一结论是（ ）



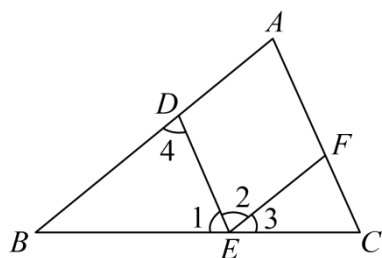
A. 三角形的内角和等于 180°

B. 三角形的内角和等于 360°

C. 直角三角形的两个锐角互余

D. 三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和

【变式4】 如图，点 D 、 E 、 F 分别在 AB 、 BC 、 AC 上，且 $DE \parallel AC$ ， $EF \parallel AB$ ，



下面写出了说明“ $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ”的过程，请填空：

解： $\because DE \parallel AC, AB \parallel EF$ ，()

$\therefore \angle 1 = \angle _$ ， $\angle 3 = \angle _$ 。()

$\because AB \parallel EF$ (已知)，

$\therefore \angle 2 = \angle _$ 。()

$DE \parallel AC$ (已知)，

$\angle 4 = \angle _$ 。(两直线平行，同位角相等)

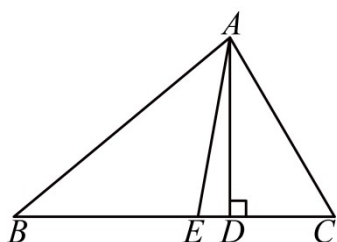
$\therefore \angle 2 = \angle A$ ()

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (平角的定义)

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (等量代换)

题型 02 利用三角形内角和定理计算

【典例 1】 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 40^\circ$ ， $\angle C = 60^\circ$ ， AD 和 AE 分别为 $\triangle ABC$ 的高线和角平分线，那么 $\angle DAE$ 的度数为 ()



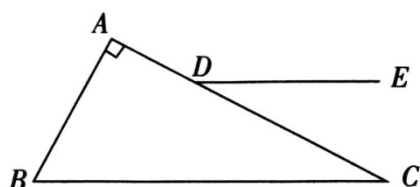
A. 40°

B. 30°

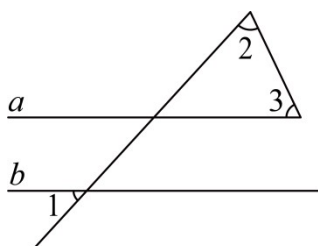
C. 20°

D. 10°

【变式 1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，点 D 在 AC 边上， $DE \parallel BC$ ，若 $\angle ADE = 155^\circ$ ，求 $\angle B$ 的度数。

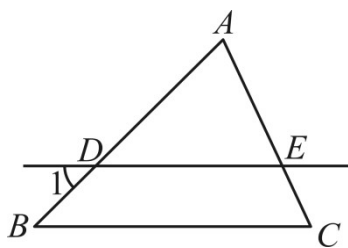


【变式2】如图，直线 $a \parallel b$ ，若 $\angle 1 = 40^\circ$ ， $\angle 2 = 70^\circ$ ，则 $\angle 3$ 等于 ()



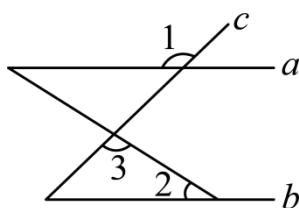
- A. 30° B. 40° C. 50° D. 70°

【变式3】如图，直线 $DE \parallel BC$ ，若 $\angle A = 70^\circ$ ， $\angle 1 = 45^\circ$ ，则 $\angle C$ 的度数为 ()



- A. 45° B. 65° C. 70° D. 110°

【变式4】如图，直线 $a \parallel b$ ， $\angle 1 = 135^\circ$ ， $\angle 2 = 33^\circ$ ，则 $\angle 3$ 的度数为_____。



题型 03 利用方程思想求角的度数

【典例1】在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B - \angle C = 60^\circ$ ，且 $\angle B$ 是 $\angle C$ 的 5 倍，那么该三角形是 ()

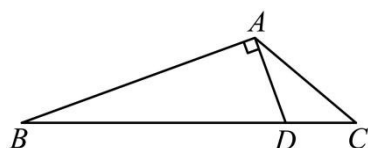
- A. 直角三角形 B. 钝角三角形
C. 面积相等的两个三角形全等 D. 成轴对称的两个三角形全等

【变式1】在 $\triangle ABC$ 中， $3\angle A = \frac{3}{2}\angle B = \angle C$ ，则 $\triangle ABC$ 是 ()

- A. 锐角三角形
B. 直角三角形
C. 钝角三角形
D. 等腰直角三角形

【变式2】在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \frac{1}{4}\angle B = \frac{1}{7}\angle C$ ，则这个三角形是_____三角形。（填“锐角”、“直角”或“钝角”）

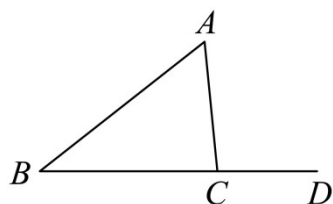
【变式3】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B:\angle C:\angle BAC = 1:2:6$ ，过点A作AB的垂线，交BC于点D，则 $\angle ADC =$ _____°。



【变式4】在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\angle A:\angle B:\angle C = 2:m:4$ ，则m的值是_____。

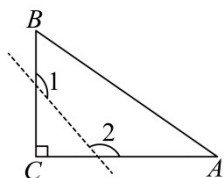
题型04 利用三角形外角的性质计算

【典例1】如图，点D是线段BC延长线上的点， $\angle ACD = 108^\circ$ ， $\angle B = \frac{1}{2}\angle A$ ，则 $\angle A$ 的度数为（ ）



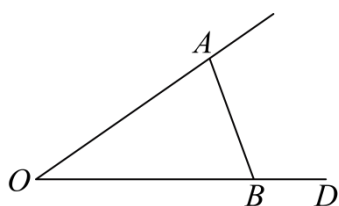
- A. 36° B. 70° C. 82° D. 72°

【变式1】已知如图， $\triangle ABC$ 为直角三角形， $\angle C = 90^\circ$ ，若沿图中虚线剪去 $\angle C$ ，则 $\angle 1 + \angle 2$ 等于（ ）



- A. 315° B. 270° C. 180° D. 135°

【变式2】如图， $\angle AOB = 35^\circ$ ， $\angle ABD = 110^\circ$ ，则 $\angle OAB$ 度数为（ ）



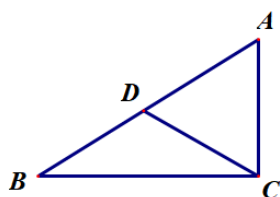
A. 65°

B. 70°

C. 75°

D. 80°

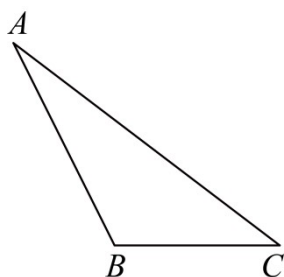
【变式3】 已知：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 分别是斜边 AB 上中线，且测得 $AC=8$ ， $BC=6$ ， $AB=10$ ，



(1) 画出 $\triangle BDC$ 中 BD 、 BC 边的高；

(2) 求证： $\triangle ADC$ 的 AC 边上的高等于 BC 的一半。

【变式4】 如图，已知 $\triangle ABC$ ，根据下列要求画出图形并回答问题：



(1) 作边 AB 上的高 CD ；

(2) 过点 B 画 AC 的垂线 BE ，垂足为 E ；

(3) 过点 E 画 CD 的平行线 EF ，交 AB 于点 F ；

(4) 点 E 到直线 AB 的距离是线段_____的长度。

题型 05 利用三角形外角性质进行推理、证明

【典例1】 【课本再现】 已知：如图¹， P 是三角形 ABC 内一点，连接 PB ， PC 。

求证： $\angle BPC > \angle A$ 。

证明：如图²，延长 BP ，交 AC 于点 D 。

$\therefore \angle BPC$ 是 $\triangle PCD$ 的一个外角，

$\therefore \angle BPC > \angle PDC$ 。

$\therefore \angle PDC$ 是 $\triangle ABD$ 的一个外角，

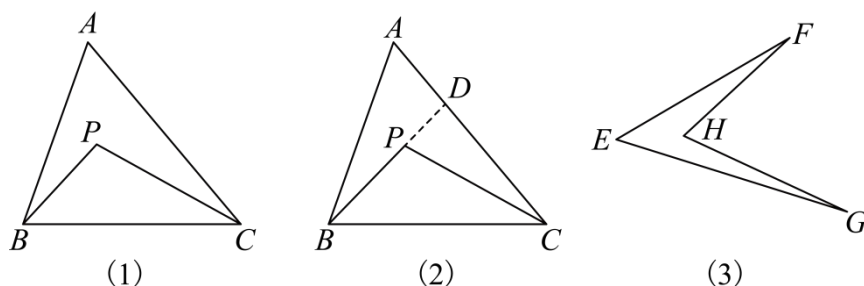
$\therefore \angle PDC > \angle A$ 。

$\therefore \angle BPC > \angle A$ 。

【知识迁移】如图³，求证：

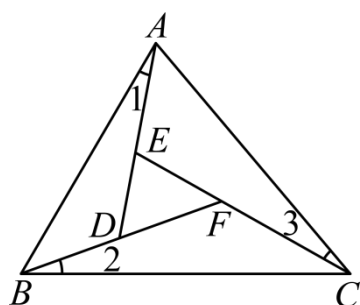
(1) $\angle FHG > \angle E$ ；

(2) $\angle FHG = \angle E + \angle F + \angle G$ 。



【变式1】我们知道，三角形一个外角等于与它不相邻的两个内角的和。

请利用这条定理解决下列问题：如图， $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ 。

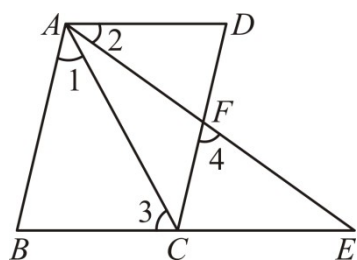


(1) 求证： $\angle BAC = \angle DEF$ 。

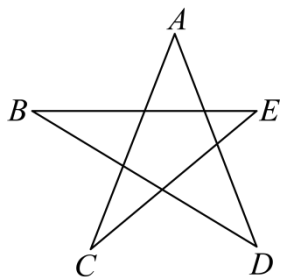
(2) 若 $\angle BAC = 70^\circ$ ， $\angle DFE = 50^\circ$ ，求 $\angle ABC$ 的度数。

【变式2】已知，如图， B 、 C 、 E 三点共线， A 、 F 、 E 三点共线， $AB \parallel CD$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，求证：

$AD \parallel BE$ 。



【变式3】 如图，连接 AC, AD, BD, BE, CE ，求证： $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ$



【变式4】 如图¹，在三角形 ABC 中，外角平分线 BN 和 CN 相交于 N 。

求证： $\angle BNC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ 。

下面是嘉琪的证明过程：

解： $\because \angle BCD = \angle A + \angle ABC$ ， $\angle CBE = \angle A + \angle ACB$ （根据①——），

$$\therefore \angle BCD + \angle CBE = 2\angle A + \angle ABC + \angle ACB，$$

又 CN 平分 $\angle BCD$ ， BN 平分 $\angle CBE$ ，

$$\therefore \angle BCN = \frac{1}{2}\angle BCD，\angle CBN = \frac{1}{2}\angle CBE，$$

$$\therefore \angle BCN + \angle CBN = \frac{1}{2}(2\angle A + \angle ABC + \angle ACB) = \frac{1}{2}(180^\circ + \angle A)，$$

$$\text{在 } \triangle CBN \text{ 中，} \angle N = 180^\circ - (\angle BCN + \angle CBN) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ + \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A，$$

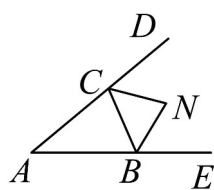


图1

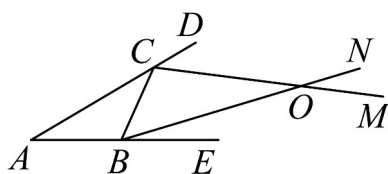


图3

(1) 嘉琪的证明中，根据①的内容是：_____；

(2) 如图 3，在三角形 ABC 中， $\angle A = \alpha (0^\circ < \alpha < 60^\circ)$ ，若 $\angle CBN = \frac{3}{4} \angle CBE$ ， $\angle BCM = \frac{3}{4} \angle BCD$ ，射线 BN 与 CM 交于点 O ，直接写出 $\angle BOC$ 的度数（用含 α 的代数式表示）。

题型 06 常见的导角模型

【典例 1】在 $\triangle ABC$ 的 CA 、 BA 的延长线上任取两点 D 、 E ，连接 DE 。

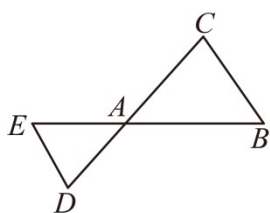


图1

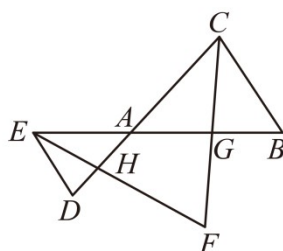
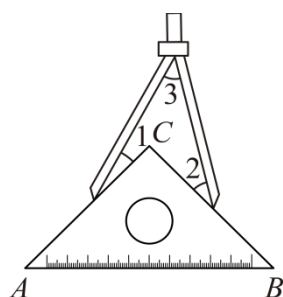


图2

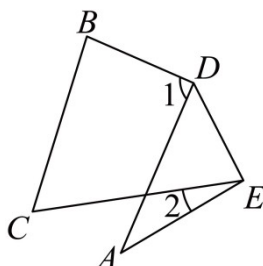
(1) 如图 1，求证： $\angle B + \angle C = \angle D + \angle E$ ；

(2) 如图 2， $\angle AED$ 和 $\angle ACB$ 的平分线交于点 F ，求证， $\angle F = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D)$ 。（提示：可直接利用 (1) 的结论）

【变式 1】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·吉林长春·期末）将一个三角板 ABC 和圆规按如图方式摆放在同一水平桌面上，圆规的两脚恰好接触三角板的一组邻直角边。已知 $\angle 1 = 16^\circ$ ， $\angle 2 = 31^\circ$ ，则 $\angle 3 =$ _____ 度。

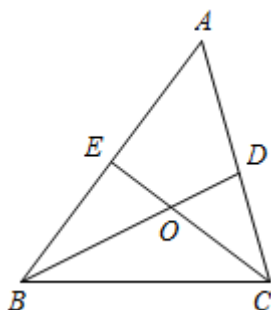


【变式2】如图，将 $\triangle ABC$ 纸片沿 DE 折叠，则 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 和 $\angle A$ 这三个角有什么数量关系（ ）



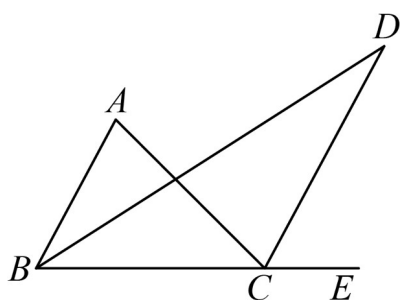
- A. $\angle 1 - \angle 2 = \angle A$ B. $\angle 1 + \angle 2 = \angle A$ C. $\angle 1 - \angle 2 = 2\angle A$ D. $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle A$

【变式3】如图，已知 $\triangle ABC$ 中， BD 、 CE 分别是 $\triangle ABC$ 的角平分线， BD 与 CE 交于点 O ，如果设 $\angle A = n^\circ$ ($0 < n < 180$)，那么 $\angle COD$ 的度数是（ ）



- A. $45^\circ + n^\circ$ B. $90^\circ + \frac{1}{2}n^\circ$ C. $90^\circ - \frac{1}{2}n^\circ$ D. $180^\circ - n^\circ$

【变式4】如图， BD 、 CD 分别是 $\triangle ABC$ 的一条内角平分线与一条外角平分线， $\angle D = 30^\circ$ ，那么 $\angle A$ 的度数（ ）



- A. 60° B. 45° C. 30° D. 无法确定

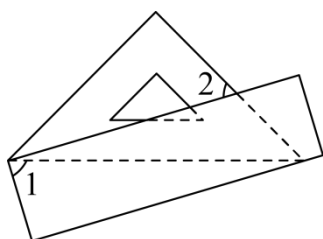
强化训练

一、单选题

1. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 80^\circ$ ， $\angle B = 50^\circ$ ，则 $\angle C$ 的度数为（ ）

- A . 35° B . 40° C . 45° D . 50°

2. 将一把直尺和一把等腰三角尺按如图方式摆放. 若 $\angle 1 = 75^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为 ()



- A . 50° B . 55° C . 60° D . 65°

3. 马扎 (图1) 是中国传统手工艺制品, 可以合拢, 方便携带. 图2为其侧面示意图. $AB \parallel CD$, AD 与 BC 交于点 O . 若 $AO = BO$, $\angle ABO = 53^\circ$, 则 $\angle COD$ 的度数为 ()



图1

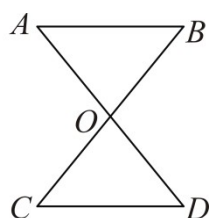


图2

- A . 50° B . 53° C . 78° D . 74°

4. “三等分角”大约是在公元前五世纪由古希腊人提出来的, 借助如图所示的“三等分角仪”能三等分一角. 这个三等分角仪由两根有槽的棒 OA, OB 组成, $OC = CD = DE$, 点 D, E 可在槽中滑动. 若 $\angle BDE = 78^\circ$, 则 $\angle CDE$ 的度数是 ()

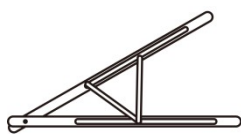


图1

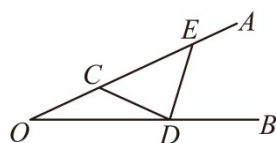


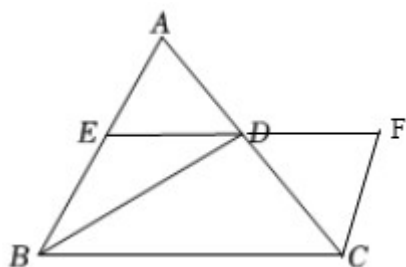
图2

- A . 26° B . 52° C . 75° D . 76°

5. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 3 : 5$, 则这个三角形是 ()

- A . 锐角三角形 B . 直角三角形
C . 钝角三角形 D . 等腰三角形

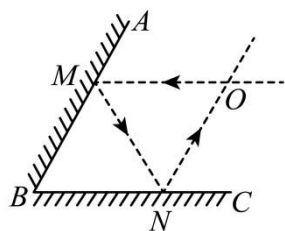
6. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， E 、 D 分别在 AB 和 AC 上，点 F 在 ED 的延长线上， BD 平分 $\angle ABC$ ， $EF \parallel BC$ ， $CF \parallel AB$ ， $\angle F = 50^\circ$ ，则 $\angle BDC$ 的度数为 ()



- A. 105° B. 95° C. 90° D. 85°

二、填空题

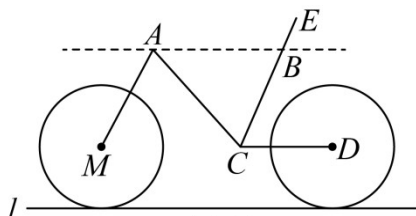
7. 若 $\triangle ABC$ 三个角的大小满足 $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$ ，则 $\angle A$ 的度数为_____。
8. 两面镜子 AB, BC 按如图所示的位置摆放，入射光线 OM 经过镜子两次反射后的反射光线 NO 平行于 AB ，若 $OM \parallel BC$ ，则 $\angle B$ 的度数是_____。



9. 为了方便市民绿色出行和锻炼身体，政府倡导大家使用共享单车。图①是一辆共享单车放在水平地面上的实物图，图②是其示意图，其中 AB, CD 都与地面 l 平行， $\angle MAC = 56^\circ$ ， $\angle BAC = 53^\circ$ 。当 $AM \parallel BC$ 时， $\angle BCD$ 的度数为_____。

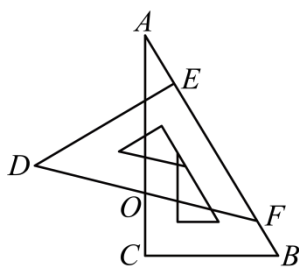


图①

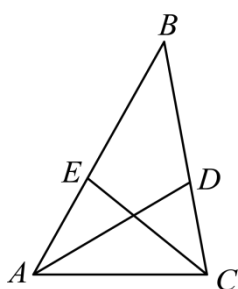


图②

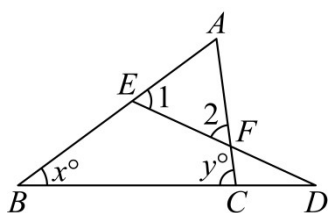
10. 将一副标准三角板按如图位置放置。其中 A, E, F, B 四点在一直线上，则 $\angle COD$ 的度数是_____。



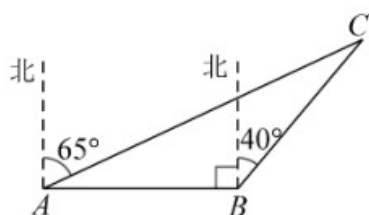
11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ACE = 40^\circ$ ， AD, CE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，则 $\angle DAC = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 $\angle BCE = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\angle ACB = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



12. 当三角形中一个内角 β 是另外一个内角 α 的 $\frac{1}{2}$ 时，我们称此三角形为“友好三角形”。如果一个“友好三角形”中有一个内角为 48° ，那么这个“友好三角形”的“友好角” α 的度数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB > AC$, D 是 BC 延长线上一点，过点 D 的直线分别交 AB 、 AC 于点 E 、 F ，若 $\angle B = x^\circ$, $\angle ACB = y^\circ$, $\angle 1 = \angle 2$ ，则 $\angle D = \underline{\hspace{2cm}}$ 度（用含 x 、 y 的代数式表示）。



14. 如图，一轮船在海上向正东方向行驶，在 A 处测得灯塔 C 位于北偏东 65° ，在 B 处测得灯塔 C 位于北偏东 40° ，则 $\angle ACB$ 的度数是 ()



A. 25°

B. 35°

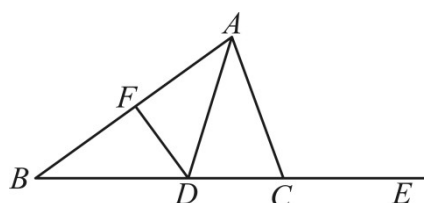
C. 40°

D. 65°

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A - \angle B = 30^\circ$ ， $\angle C = 4\angle B$ ，求 $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 的度数。

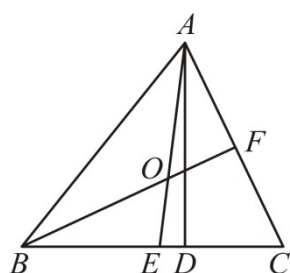
16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 36^\circ$ ， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，延长 BC 至点 E ， $\angle ACE = 110^\circ$ 。



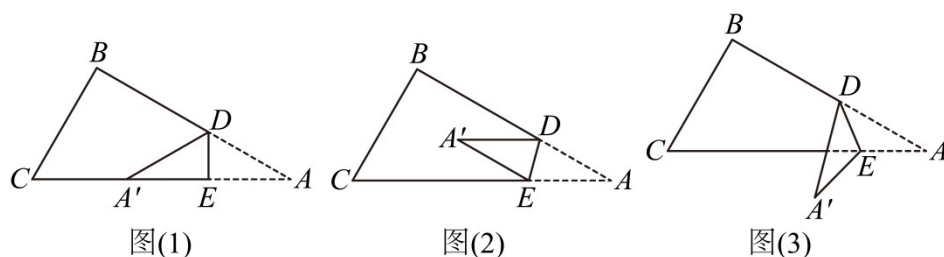
(1) 求 $\angle CAD$ 的度数。

(2) 若 F 是 AB 边上一点， $\angle ADF = 53^\circ$ ，求证： $\triangle ADF$ 是直角三角形。

17. 在 $\triangle ABC$ 中， AD 是高， AE 、 BF 是角平分线，它们相交于点 O ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle C = 70^\circ$ ，求 $\angle DAE$ 和 $\angle AOB$ 的度数。



18. 如图， $\triangle ABC$ 是一个三角形的纸片，点 D, E 分别是 $\triangle ABC$ 边 AB, AC 上的两点。



(1) 如图(1)，如果沿直线 DE 折叠，且 $DE \perp AC$ ，若 $\angle A = 30^\circ$ ，求 $\angle BDA' =$ _____。

(2) 如图(2)，如果沿直线 DE 折叠后 A 落在四边形 $BCED$ 内部，探究 $\angle BDA'$ ， $\angle CEA'$ 和 $\angle DAE$ 的关系，并说明理由。

(3) 如果折成图(3)的形状，直接写出 $\angle BDA'$ ， $\angle CEA'$ 和 $\angle A$ 的关系。