

专题 04 一次函数与几何综合

题型归纳

题型一：点的坐标与距离的关系

题型二：图形的面积问题

题型三：特殊图形的存在性问题

题型四：常见的图形关系：平行（平移）、垂直（旋转）、平分角（翻折）、全等

题型专练

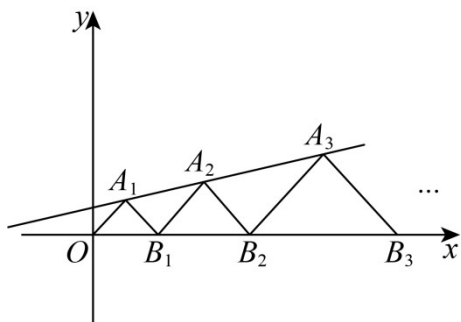
题型 01 点的坐标与距离的关系

点的坐标与距离的关系是函数与几何综合的核心，点的横坐标的绝对值等于点到 y 轴距离，点的纵坐标的绝对值是点到 x 轴距离。函数与几何的综合题，关键就要能进行坐标与距离的等价转换。

1. (24-25 八年级上·广东深圳·期中) 如图，在平面直角坐标系中，点 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 和 $B_1, B_2, B_3, \dots$

... 分别在直线 $y = \frac{1}{4}x + b$ 和 x 轴上， $\triangle OA_1B_1, \triangle B_1A_2B_2, \triangle B_2A_3B_3, \dots$ 都是等腰直角三角形，其中 $A_1, A_2, \dots$

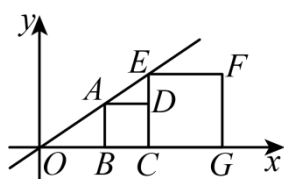
A_n 为其直角顶点，如果点 $A_1(1, 1)$ ，那么 A_{2024} 的纵坐标是 ()



- A. $\left(\frac{5}{3}\right)^{2023}$ B. $\left(\frac{5}{3}\right)^{2024}$ C. $\left(\frac{4}{3}\right)^{2023}$ D. $\left(\frac{4}{3}\right)^{2024}$

2. (24-25 八年级上·上海静安·期末) 如图, 正方形 $ABCD, CEFG$ 的一边在 x 轴的正半轴上, 顶点 A, E 在

直线 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ 上, 如果正方形 $ABCD$ 边长是 $\sqrt{2}$, 那么点 F 的坐标是_____.



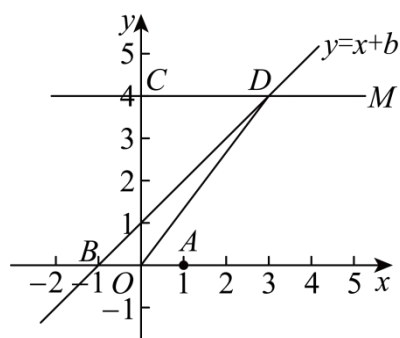
3. (24-25 八年级下·上海·期中) 已知点 P 在直线 $y = x$ 上, 点 P 到点 $(0,1)$ 的距离和到直线 $y = -1$ 的距离相等, 则点 P 的坐标为_____.

4. (24-25 八年级上·上海浦东新·期末) 在平面直角坐标系 xOy 内, $A(1,a)$ 在函数 $y = 2x$ 上, $B(b,2)$ 在函数 $y = \frac{4}{x}$ 上, P 为 x 轴上一动点, $AP + BP$ 值最小时, 点 P 的坐标为_____.

题型 02 图形的面积问题

在坐标系中求图形的面积核心是把问题转化成横平线与竖直线上线段长的问题, 所以本质上还是转化为点的坐标问题.

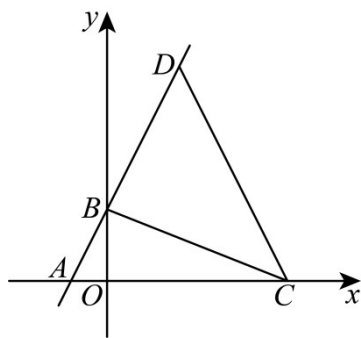
1. (25-26 八年级上·上海·期末) 如图在直角坐标平面内, O 为原点, 点 A 的坐标为 $(1,0)$, 点 C 的坐标为 $(0,4)$, 直线 $CM \parallel x$ 轴. 点 B 与点 A 关于原点对称, 直线 $y = x + b$ (b 为常数) 经过点 B , 且与直线 CM 相交于点 D .



- (1) 求 b 的值和点 D 的坐标；
- (2) 在 x 轴上有一点 Q ，使 $\triangle BQD$ 的面积为 8，求 Q 点的坐标。

2. (24-25 八年级下·上海浦东新·月考) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过

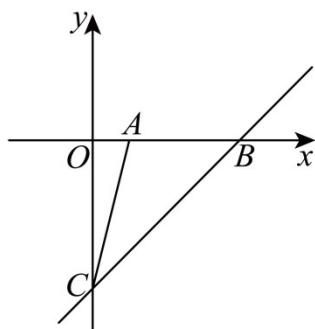
点 $A(-1, 0)$ 、 $B(0, 2)$ ，点 C 在 x 轴的正半轴上，且 $OC = 5OA$ 。



- (1) 求直线 AB 的表达式；
- (2) 点 D 在第一象限且在直线 AB 上，当 $S_{\triangle BCD} = 2S_{\triangle ABC}$ 时，求点 D 的坐标；
- (3) 在 (2) 的条件下，分别在线段 AD 、 CD 上取点 M 、 N ，在 x 轴上取点 P ，且满足 $MN \parallel x$ 轴， $\triangle PMN$ 是等腰直角三角形。求点 M 的坐标。

3. (24-25 八年级下·上海宝山·月考) 如图, 已知点 $A(1,0)$, 点 $B(4,0)$, 点 C 在 y 轴负半轴上, 且 $S_{\triangle ABC} = 6$,

点 P 为直线 BC 上一点.

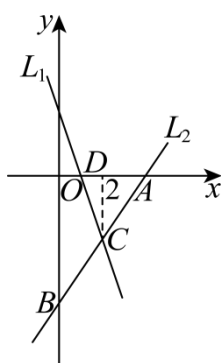


(1) 求直线 BC 的解析式;

(2) 若 $\triangle OBP$ 的面积为 5, 求点 P 的坐标.

4. (24-25 八年级下·上海闵行·月考) 如图, 直线 L_1 的解析表达式为: $y = -3x + 3$, 且 L_1 与 x 轴交于点 D ,

直线 L_2 经过点 A 、 $B(0,-6)$, 直线 L_1 , L_2 交于点 C , 点 C 的横坐标为 2.

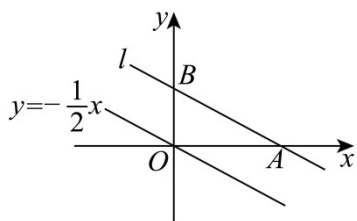


(1) 点 D 的坐标为_____ ; 直线 L_2 的解析式为_____ .

(2) 在直线 L_1 上有一点 P , 使得 $\triangle ACP$ 与 $\triangle AOB$ 的面积相等, 求出点 P 的坐标.

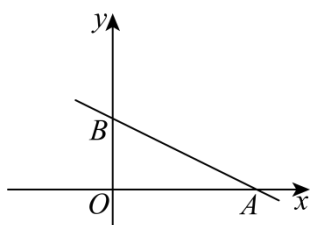
(3) 点 M 在直线 L_1 , 点 N 在 y 轴上, 若点 M 、 N 、 A 、 C 构成平行四边形, 直接写出点 M 的坐标.

5. (24-25 八年级下·上海嘉定·期末) 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $l: y = kx + b$ 与直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 平行, 且截距为 3, 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 和点 B .



- (1) 求直线 l 的解析式和点 A 的坐标;
- (2) 如果点 C 是线段 AB 上的点, 且 $\triangle AOC$ 的面积为 6, 求点 C 的坐标;
- (3) 在 (2) 条件下, 点 P 是直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 上的点, 在坐标平面内是否存在点 Q , 使以 O 、 C 、 P 、 Q 为顶点的四边形是菱形? 若存在, 请直接写出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

6. (24-25 八年级下·上海奉贤·期末) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = kx + 2$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于点 $A(4, 0)$ 和点 B , 点 C 和点 E 分别在线段 AB 和 x 轴正半轴上, 点 D 在第一象限内, 且四边形 $OCDE$ 是菱形.



- (1) 求 k 的值和点 B 坐标;

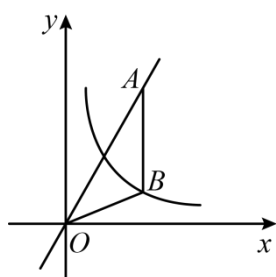
(2) 设直线 $y = kx + 2$ 与菱形 $OCDE$ 的边 DE 交于点 F .

① 当 F 是 AC 的中点时，判断 $\triangle OBC$ 的形状，并说明理由；

② 如果四边形 $OCFE$ 是直角梯形，求菱形 $OCDE$ 的边长 .

7 . (24-25 八年级上·上海奉贤·期末) 如图，已知正比例函数 $y = \sqrt{3}x$ 经过点 $A(m, 6\sqrt{3}) (m > 0)$ ，过点 A 作

$AB \parallel y$ 轴，交反比例函数于点 B (点 B 在点 A 下方)，连接 OB 得 $\triangle AOB$ 的面积为 $12\sqrt{3}$.

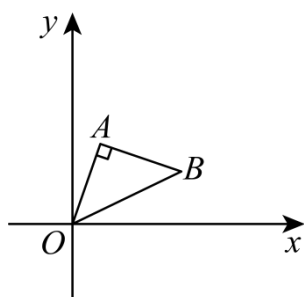


(1) 求 m 的值；

(2) 求反比例函数解析式；

(3) 在直线 OA 上是否存在一点 C ，使得 $\triangle ABC$ 是直角三角形？若有，请求出点 C 的坐标；若没有，请说明理由 .

8 . (24-25 八年级上·上海浦东新·期末) 如图，在平面直角坐标系中，有反比例函数的图像上有一点 A 坐标为 $(1, 3)$ ，点 B 也在第一象限，已知 $\angle OAB = 90^\circ, OA = AB$.



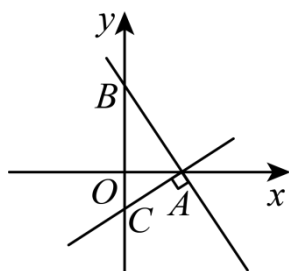
- (1) 求反比例函数解析式；
- (2) 求 $\triangle AOB$ 的面积；
- (3) 求直线 OB 的函数解析式。

题型 03 特殊图形的存在性问题

当特殊图形的存在性主要包括等腰三角形、直角三角形、（特殊）平行四边形的存在性问题，本质上是把问题先转化成距离的问题再转化成点的坐标的问题。

1. (24-25 八年级下·上海闵行·月考) 已知直线 l_1 的解析式为 $y = -\sqrt{3}x + 3$ 与 x 轴交于点 A 与 y 轴交于点 B ,

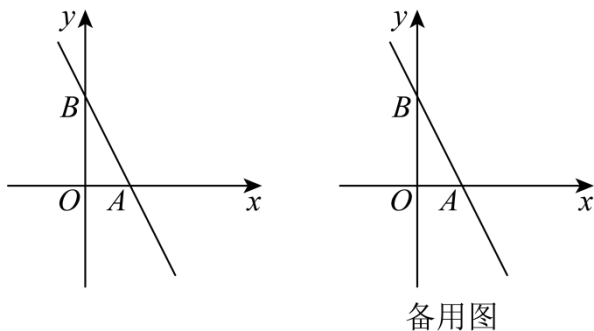
直线 l_2 过点 A 且与 l_1 垂直交 y 轴于点 C 。



- (1) 求出直线 l_2 的解析式。
- (2) 点 D 在直线 l_2 上，平面内是否存在点 E 使四边形 $CDBE$ 是菱形，若存在求出点 E 的坐标，若不存在，请

说明理由．

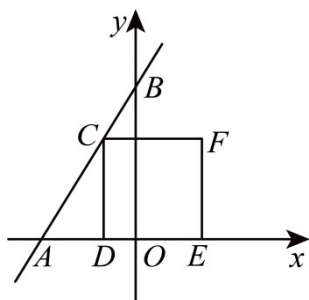
2. (24-25 八年级下·上海·期中) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = -2x + 4$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ．



- (1) 填空：如果点 C 在 x 轴上， $\triangle ABC$ 是以 BC 为腰的等腰三角形，那么点 C 的坐标是——；

- (2) 已知点 D 在双曲线 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 上，联结 BD ，如果 $\angle DBA = 45^\circ$ ，求点 D 的坐标．

3. (24-25 八年级下·上海宝山·期末) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $y = \frac{3}{2}x + 6$ 与 x 轴交于点 A ， y 轴交于点 B ，点 C 在射线 AB 上（不与点 A 重合），点 D 、 E 在 x 轴上（点 D 在点 E 左侧），四边形 $CDEF$ 是正方形．

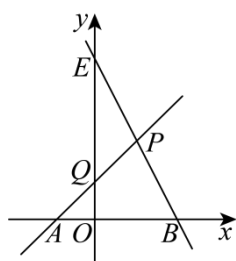


- (1) 当点 C 的横坐标为 -2 时，求直线 AF 的表达式；

(2) 当点 C 在射线 AB 上运动时，设点 C 的横坐标为 t ，用 t 表示点 F 的坐标，判断点 F 是否始终在 (1) 中的直线 AF 上？并说明理由；

(3) 点 G 在 x 轴上，如果四边形 $ABFG$ 是等腰梯形，求点 G 的坐标。

4. (24-25 八年级下·上海宝山·月考) 如图，已知直线 AQ 与 x 轴负半轴交于点 A ，与 y 轴正半轴交于点 Q ， $\angle QAO = 45^\circ$ ，直线 AQ 在 y 轴上的截距为 2，直线 $BE: y = -2x + 8$ 与直线 AQ 交于点 P 。

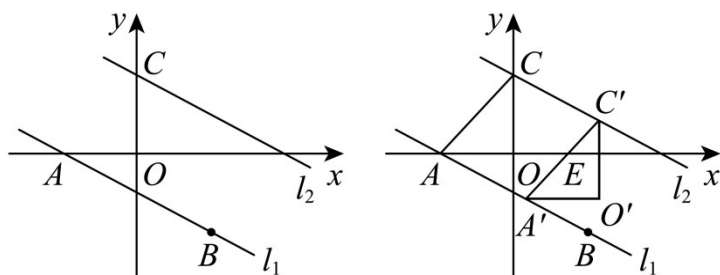


(1) 求直线 AQ 的解析式；

(2) 在平面直角坐标系中，有一点 F ，使得四边形 $BPFO$ 是直角梯形，求点 F 的坐标。

(3) 若点 C 在 y 轴负半轴上，点 M 在直线 PA 上，点 N 在直线 PB 上，是否存在以 Q 、 C 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形，若存在请求出点 C 的坐标；若不存在请说明理由。

5. (24-25 八年级下·上海虹口·期末) 如图，直线 l_1 经过点 $A(-4, 0)$ 和点 $B(4, -4)$ ，将 l_1 向上平移 m 个单位得到 l_2 ，且 l_2 经过点 $C(0, 4)$ 。



(1) 求直线 l_1 的表达式和 m 的值；

(2) 连接 AC ，将 $\triangle AOC$ 沿直线 l_1 平移到 $\triangle A'O'C'$ ，边 $A'C'$ 与 x 轴相交于点 E （如图），小明说：“我发现边

AC 上存在点 F ，在平移的过程中可以使得四边形 $A'BEF$ 为菱形”。你觉得小明的发现是否正确？如果正确，

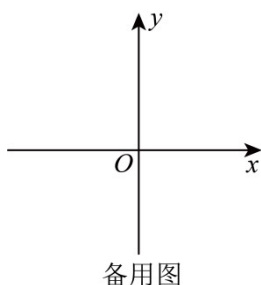
求点 F 的坐标；如果不正确，请说明理由。

6. (23-24 八年级下·上海虹口·期末) 已知直线 $y = kx + b$ (其中 $kb \neq 0$)，我们把直线 $y = bx + k$ 称为直线

$y = kx + b$ 的“轮换直线”。例如：直线 $y = 3x + 2$ 的“轮换直线”是直线 $y = 2x + 3$ 。

在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $l_1: y = x + m (m \neq 1)$ 的“轮换直线”是直线 l_2 ， l_1 交 y 轴于点 A ， l_2 交 y

轴于点 B ， l_1 和 l_2 相交于点 M 。

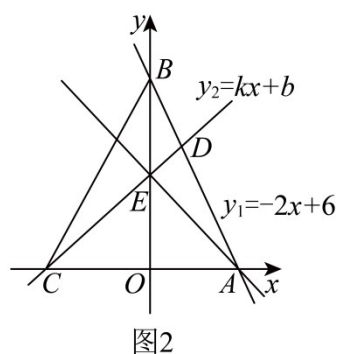
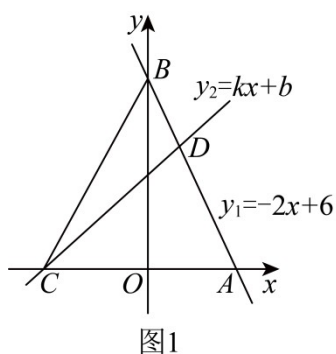


(1) 如果直线 l_1 经过点 $(-1, -3)$ 。

① 求直线 l_1 、 l_2 的表达式和点 M 的坐标；

y 轴分别交于点 A 和点 B ，点 C 在 x 轴上， $OB = 2OC$ ，一次函数 $y_2 = kx + b (k \neq 0)$ 的图象经过点 C ，且与

$y_1 = -2x + 6$ 的图象交于点 $D(m, 4)$ ，连接 BC 。



(1) 求 y_2 的解析式；

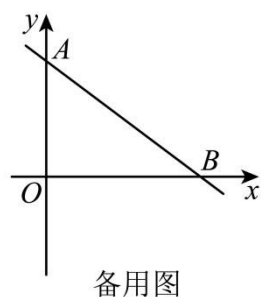
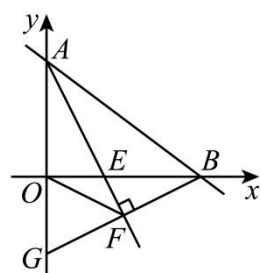
(2) 求 $\triangle BCD$ 的面积；

(3) 如图 2，直线 CD 交 y 轴于点 E ，作直线 AE ，点 P 为直线 AE 上一动点，当 $\angle ECP + \angle ABE = \angle BED$ 时，

请直接写出所有符合条件的点 P 的坐标。

3. (24-25 八年级下·上海松江·月考) 已知一次函数 $y = -\frac{3}{4}x + 6$ 的图象与坐标轴交于 A 、 B 两点 (如图)，

AE 平分 $\angle BAO$ ，交 x 轴于点 E 。



(1)求 $\triangle AOB$ 的周长；

(2)求点 E 的坐标和直线 AE 的表达式；

(3)过点 B 作 $BF \perp AE$ ，垂足为 F ，交 y 轴于点 G ，连接 OF ，试判断 $\triangle OFB$ 的形状并证明你的结论．

(4)若将已知条件“ AE 平分 $\angle BAO$ ，交 x 轴于点 E ”改变为“点 E 是线段 OB 上的一个动点（点 E 不与点 O 、 B

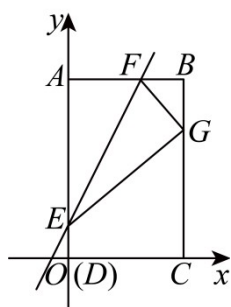
重合）”，过点 B 作 $BF \perp AE$ ，垂足为 F ．设 $OE = x$ ， $BF = y$ ，试求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出函

数的定义域．

4．（24-25 八年级下·上海·期中）如图，四边形 $ABCD$ 为矩形， C 点在 x 轴上， A 点在 y 轴上， D 点坐标是

$(0,0)$ ， B 点坐标是 $(3\sqrt{3},8)$ ，矩形 $ABCD$ 沿直线 EF 翻折点 A 落在 BC 边上的 G 处， E 、 F 分别在 AD 、

AB 上，且 F 点的坐标是 $(2\sqrt{3},8)$ ．



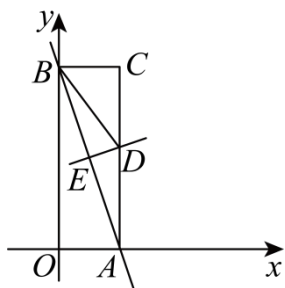
(1)求 G 点坐标；

(2)求直线 EF 的解析式；

(3)点 M 在直线 EF 上， x 轴上是否存在点 N ，使以 M 、 N 、 F 、 G 为顶点的四边形是平行四边形？若存在请

求出 N 点的坐标；若不存在，请说明理由．

5. (24-25 八年级下·上海长宁·期末) 如图，在直角坐标平面内，点 O 是坐标原点，直线 $y = -3x + 6$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ，过点 A 作 $CA \perp x$ 轴，垂足为 A ，过点 B 作 $CB \perp y$ 轴，垂足为 B ，两条垂线交于点 C ．



(1) 填空：线段 AC, BC, AB 的长分别是 $AC = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $BC = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 折叠 $\triangle ABC$ ，使点 A 与点 B 重合，折痕 DE 交 AC 于点 D ，交 AB 于点 E ．

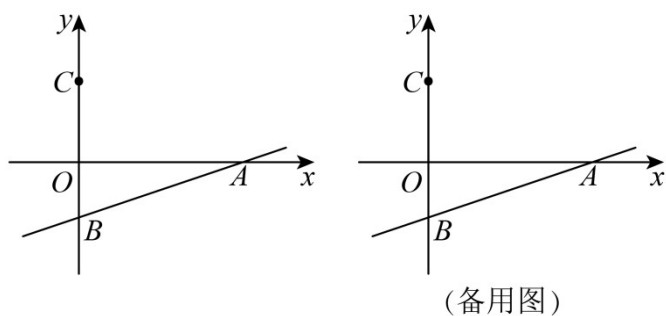
① 求点 D 的坐标；

② 若经过点 D 的双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 与线段 BC 交于点 F ，那么在坐标平面内是否存在点 P ，使得四边形

$ADFP$ 是以 DF 为底的等腰梯形？如存在，请直接写出符合条件的点 P 坐标；如不存在，请说明理由．

6. (24-25 八年级下·上海闵行·期末) 已知，一次函数 $y = \frac{1}{3}x + b$ 的图像与 x 轴相交于点 $A(6, 0)$ ，与 y 轴相

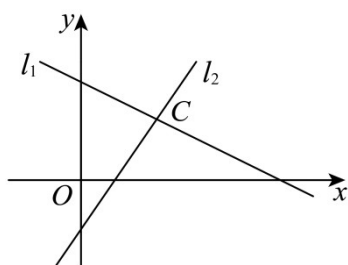
交于点 B ，点 C 在 y 轴的正半轴上， $BC = 5$ ．



- (1) 求一次函数的解析式及点 B 与点 C 的坐标；
- (2) 如果四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，请直接写出点 D 的坐标；
- (3) 将直线 AB 绕着点 B 逆时针旋转 45° 后与 x 轴交于点 P ，求点 P 坐标。

7. (24-25 八年级下·上海崇明·期末) 如图，已知在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l_1: y = -\frac{1}{2}x + 4$ 与直线

$l_2: y = kx - 2$ 相交于点 $C(3, t)$ 。



- (1) 求 t 的值及直线 l_2 的表达式；
- (2) 已知点 P 是直线 l_1 上的一个动点，过点 P 作 x 轴的垂线，与直线 l_2 交于点 Q ，设点 P 的横坐标为 m 。
 - ① 当 $PQ = 3$ 时，求 m 的值；
 - ② 以 PQ 为对角线作菱形 $PEQF$ ，当点 E 在直线 l_2 上且菱形 $PEQF$ 的面积为 8 时，求 m 的值。

