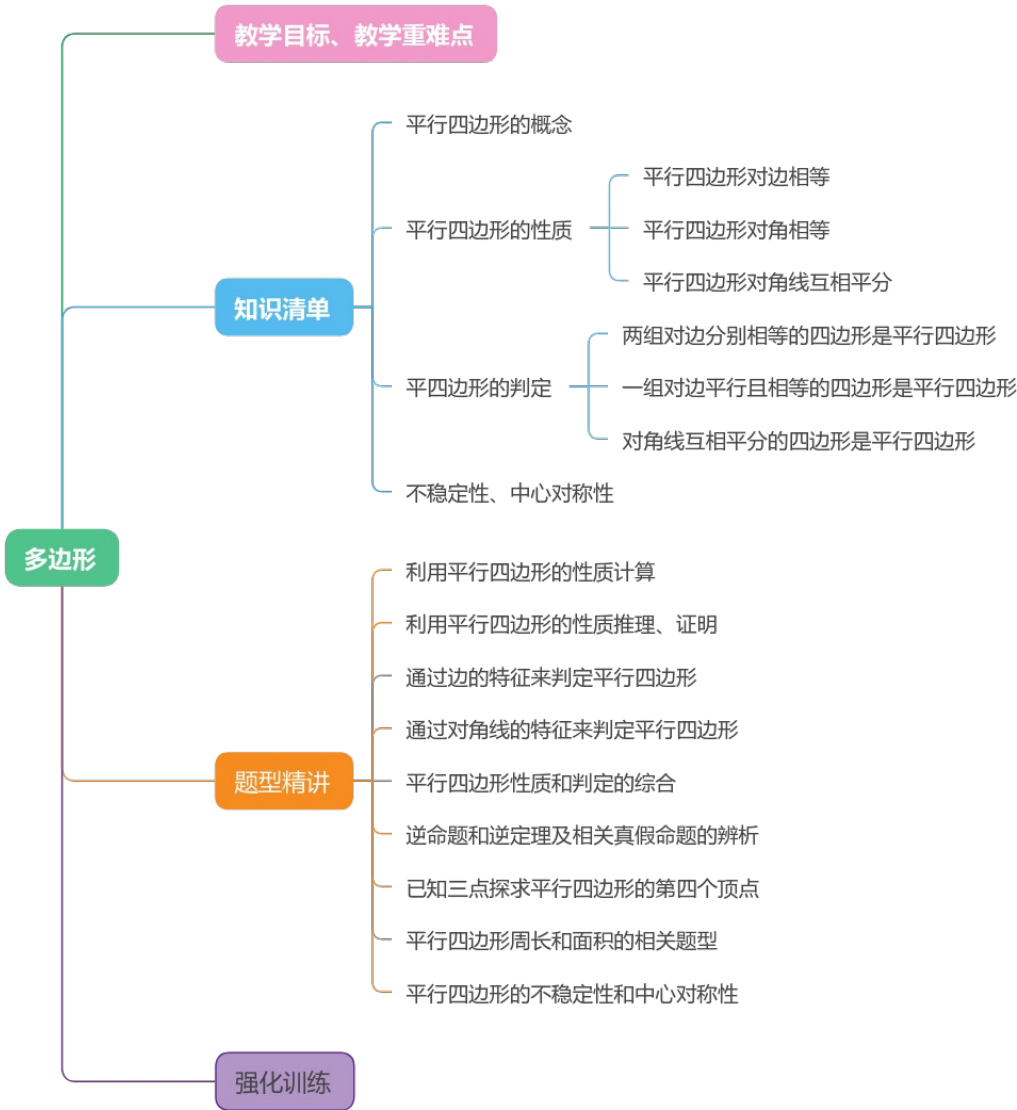


专题 23.2 平行四边形

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 理解平行四边形的定义，掌握平行四边形的性质：对边平行且相等、对角相等（邻角互补）、对角线互相平分、两条平行线间的平行线段相等； 2.掌握平行四边形的判定定理：两组对边分别平行/相等、一组对边平行且相等、两组对角分别相等、对角线互相平分的四边形是平行四边形； 3.能运用定义、性质、判定进行简单的计算（边长、角度、周长、面积）和几何证明；
------	---

	4.了解平行四边形的不稳定性、中心对称性，以及逆命题、逆定理等知识;
教学重难点	1.重点 (1) 平行四边形的定义及核心性质 (对边平行且相等、对角相等、对角线互相平分) 的推导与掌握; (2) 平行四边形判定定理的推导与应用 (尤其是“一组对边平行且相等”“对角线互相平分”的判定); (3) 运用定义、性质、判定解决实际问题 (计算、证明、图形识别); 2.难点 运用定义、性质、判定解决实际问题 (计算、证明、图形识别) .

知识清单

知识点 01 平行四边形的概念

- 1. 有一组对边_____的四边形叫作**梯形**;
- 2. 两组对边分别_____的四边形叫做**平行四边形** .

如图所示，四边形 $ABCD$ 是平行四边形 . 记作_____；

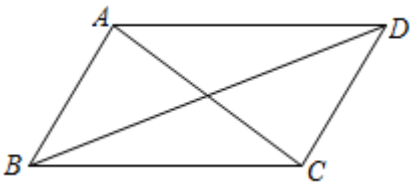
读作：_____；

线段 AC 、 BD 就是平行四边形 $ABCD$ 的**对角线**；

平行四边形相对的边，称为**对边**，相对的角称为**对角**；

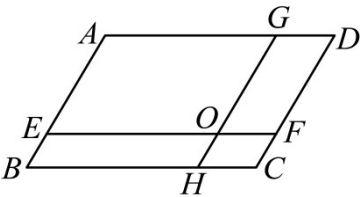
对边： **AB 与 CD ； BC 与 DA ；**

对角： **$\angle ABC$ 与 $\angle CDA$ ； $\angle BAD$ 与 $\angle DCB$.**



【即学即练】

- 1.如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $EF \parallel BC$ ， $GH \parallel AB$ ，且 EF ， GH 相交于点 O ，则图中的平行四边形有 ()



- A . 4 个 B . 5 个 C . 8 个 D . 9 个

知识点 02 平行四边形的性质

定理 1 平行四边形的**对边**_____；

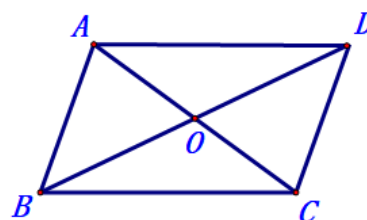
如右图所示， $\square ABCD$ 中， $AB=CD, AD=BC$

定理 2 平行四边形的**对角**_____；

如右图所示， $\square ABCD$ 中， $\angle A=\angle C, \angle B=\angle D$

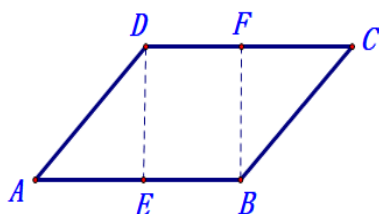
定理 3 平行四边形的**对角线**_____.

如右图所示， $\square ABCD$ 中， $AO=CO, BO=DO$



【即学即练】

1. 如图在 $\square ABCD$ 中，过点 D 作 $DE \perp AB$ ，过点 B 作 $BF \perp CD$ ，垂足分别为 E, F. 求证 $AE=CF$.



2. 在 $\square ABCD$ 中， $\angle A:\angle B:\angle C = 2:7:2$ ，则 $\angle D =$ _____.

3. 若平行四边形的一条边长是 10，一条对角线长为 8，则它的另一条对角线长 x 的取值范围是_____.

知识点 03 平行四边形的判定

1. 平行四边形的定义本身就是平行四边形的一种判定方法；

如右图所示： $\because$ _____

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形

2. 平行四边形的判定定理

定理 1：两组对边分别_____的四边形是平行四边形；

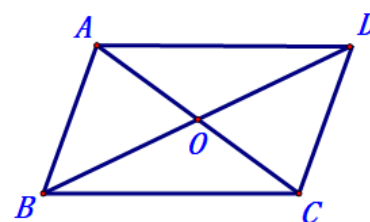
如右图所示： $\because$ _____

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形

定理 2：一组对边_____的四边形是平行四边形；

如右图所示： $\because$ _____

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形



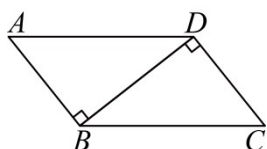
定理3：对角线_____的四边形是平行四边形；

如右图所示： $\therefore$ _____

$\therefore$ 四边形ABCD是平行四边形

【即学即练】

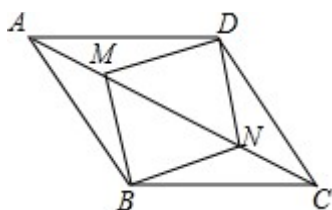
1. 已知如图， $AB \perp BD$ ， $CD \perp BD$ ， $AD = BC$ 求证：四边形ABCD是平行四边形。



2. 题1可以用“一组对边平行且相等的四边形是平行四边形”来证明吗？

3. 两组对角相等的四边形是平行四边形吗？

4. 如图，点M、N在 $\square ABCD$ 的对角线AC上，且 $AM = CN$ ，求证：四边形BMDN是平行四边形。



知识点04 平行四边形具有不稳定性 and 中心对称性

1. 因为四边形具有不稳定性,所以平行四边形也具有**不稳定性**;

平行四边形是常见的图形.小区的伸缩门、庭院的竹篱笆、载重汽车的防护栏等都有平行四边形的形象，就是应用_____的特性。



2. 平行四边形是_____ **对称图形**, _____ 是它的 **对称中心**;

【即学即练】

1. 平行四边形的不稳定性是指当平行四边形边长一定时，什么不确定?()

- A. 平行四边形的周长
B. 平行四边形的内角和
C. 平行四边形内角的大小
D. 平行四边形的外角和

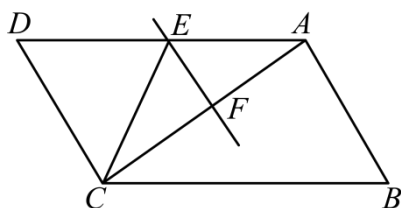
2. 下列关于平行四边形的说法正确的是 ()

- A. 平行四边形对角线相等
B. 平行四边形邻边相等
C. 平行四边形是中心对称图形
D. 平行四边形是轴对称图形

题型精讲

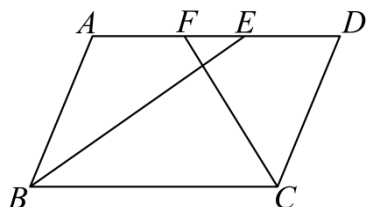
题型 01 利用平行四边形的性质计算

【典例 1】 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 10$ ， AC 的垂直平分线交 AD 于点 E ，则 $\triangle CDE$ 的周长是 ()



- A. 9
B. 10
C. 13
D. 14

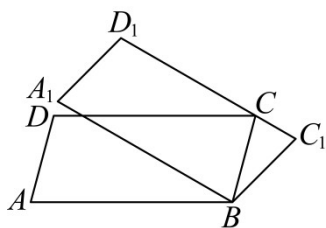
【变式 1】 如图，在 $\square ABCD$ 中， BE 平分 $\angle ABC$ 交 AD 于点 E ， CF 平分 $\angle BCD$ 交 AD 于点 F ， $AB = 3$ ， $AD = 5$ ，则 EF 的长为 ()



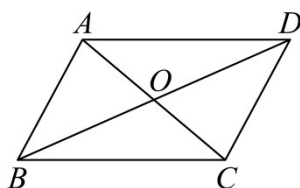
- A. 1
B. 1.5
C. 2
D. 2.5

【变式 2】 在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle A$ 是 $\angle B$ 的 2 倍，那么 $\angle C =$ _____.

【变式 3】 如图，在 $\square ABCD$ 中， $\angle A = 70^\circ$ ，将 $\square ABCD$ 绕顶点 B 顺时针旋转到 $\square A_1BC_1D_1$ ，当 C_1D_1 首次经过顶点 C 时，旋转角 $\angle ABA_1 =$ _____°.



【变式4】如图，在 $\square ABCD$ 中， $AB = 4\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$ ，对角线 AC, BD 相交于点 O ，则 OA 的取值范围是 ()



A. $2\text{cm} < OA < 6\text{cm}$

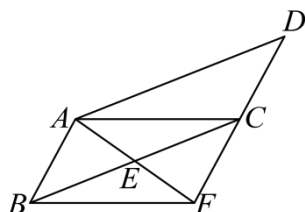
B. $2\text{cm} < OA < 10\text{cm}$

C. $1\text{cm} < OA < 5\text{cm}$

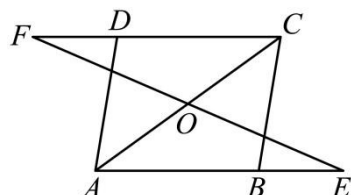
D. $4\text{cm} < OA < 10\text{cm}$

题型 02 利用平行四边形的性质进行推理证明

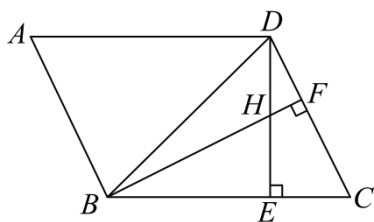
【典例1】如图，在 $\square ABCD$ 中，已知 E 为 BC 的中点，连接 AE 并延长交 DC 的延长线于点 F ，连接 BF ，求证： $CD = CF$ ；



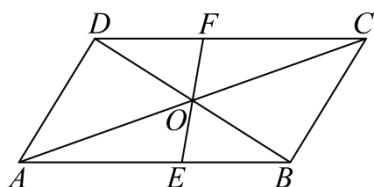
【变式1】已知：如图，点 O 是 $\square ABCD$ 对角线的交点，过点 O 作直线分别交 AB 、 CD 的延长线于点 E 、 F 。求证： $BE = DF$ 。



【变式2】如图，在 $\square ABCD$ 中，连接 BD ，作 $DE \perp BC$ 于点 E ， $BF \perp CD$ 于点 F ， DE 与 BF 相交于点 H ，求证： $\angle A = \angle BHE$ 。

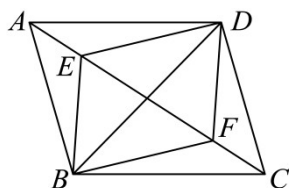


【变式3】 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，过点 O 任作一条直线分别交 AB ， CD 于点 E ， F 。



- (1) 求证： $\triangle AOE \cong \triangle COF$ ；
- (2) 若 $AB = 8$ ， $BC = 6$ ， $OE = 3$ ，求四边形 $BCFE$ 的周长。

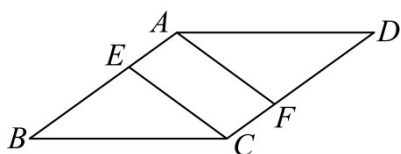
【变式4】 如图已知点 E 是平行四边形 $ABCD$ 对角线 AC 上的一点，连结 DE ，过点 B 作 $BF \parallel DE$ 交 AC 于点 F 。



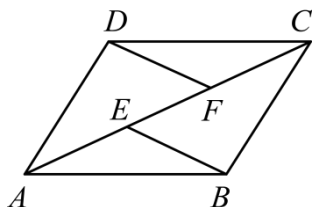
- (1) 求证： $AE = CF$ ；
- (2) 若 $AB = BC = 8$ ， $DE = 6$ ，当 $\angle ABF = 90^\circ$ ，求 AE 的长。

题型 03 通过对边平行或相等来判定平行四边形

【典例1】 如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E ， F 分别在 AB ， CD 上，且 $AF \parallel CE$ ，求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形。



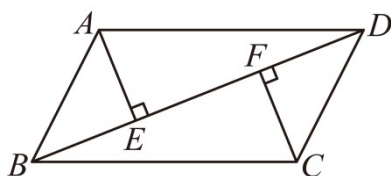
【变式1】 E, F 是四边形 $ABCD$ 对角线 AC 上的两点, $AD \parallel BC$, $DF \parallel BE$, $AE = CF$. 求证:



(1) $\triangle AFD \cong \triangle CEB$;

(2) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

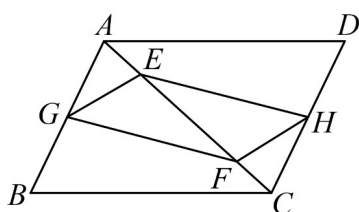
【变式2】 如图所示, 在四边形 $ABCD$ 中, $AE \perp BD$ 于点 E , $CF \perp BD$ 于点 F , $AE = CF$, $BE = DF$. 求证:



(1) $\triangle ABE \cong \triangle CDF$;

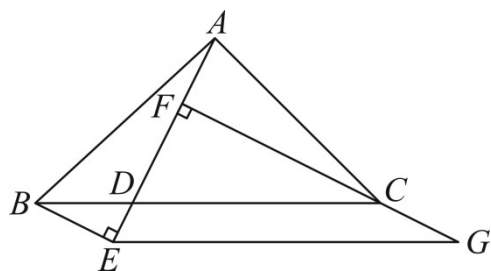
(2) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

【变式3】 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 G, H 分别是 AB, CD 的中点, 点 E, F 在对角线 AC 上, 且 $AE = CF$.



求证: 四边形 $EGFH$ 是平行四边形;

【变式4】 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 为 BC 边上一点 ($BD < CD$), 过点 B, C 分别作射线 AD 的垂线, 垂足分别为点 E, F . 点 G 在 FC 的延长线上, 且 $\angle G = \angle CBE$.

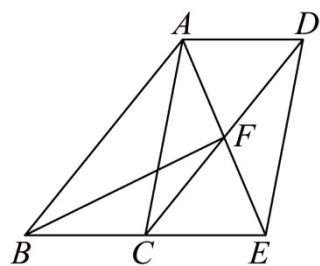


(1) 求证：四边形 $BCGE$ 为平行四边形；

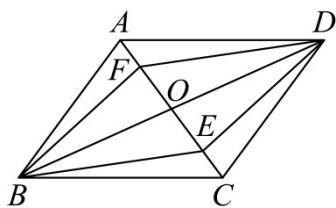
(2) 若 $AE = CF = 7$ ， $\triangle EFG$ 的周长为 24，求 CG 的长。

题型 04 通过对角线互相平分来判定平行四边形

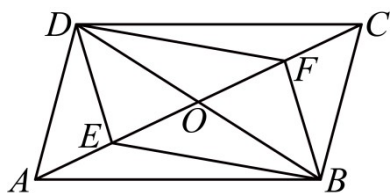
【典例 1】 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，延长 BC 至点 E ，使得 $BE = CD$ ，连接 AE 交 CD 于点 F ，连接 AC 、 BF 。且 BF 平分 $\angle ABE$ ，求证：四边形 $ACED$ 是平行四边形；



【变式 1】 如图， $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， E 、 F 是 AC 上的两点，并且 $AE = CF$ ，求证：四边形 $BFDE$ 是平行四边形。



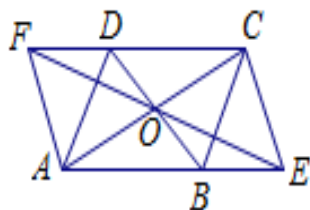
【变式 2】 如图，在 $\square ABCD$ 中， O 为对角线 AC 、 BD 的交点， E 、 F 分别是 OA 、 OC 的中点，顺次连接 D 、 E 、 B 、 F 。



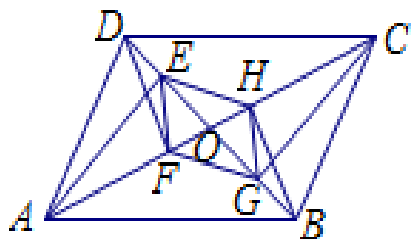
(1) 求证：四边形 $DEBF$ 是平行四边形。

(2)若 $\triangle ABE$ 的面积为 2，直接写出四边形 $DEBF$ 的面积。

【变式 3】 已知：如图， $\square ABCD$ 的对角线相交于点 O ，直线 EF 经过点 O ，分别与 AB 、 CD 的延长线交于点 E 、 F 。求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形。

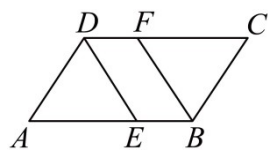


【变式 4】 已知：如图，过 $\square ABCD$ 的四个顶点，分别向两条对角线作垂线，垂足分别为点 E 、 H 、 G 、 F 。求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形。

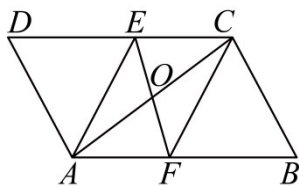


题型 05 平行四边形性质、判定的综合

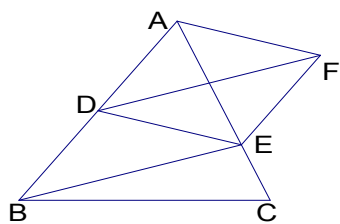
【典例 1】 如图在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在 AB 上，点 F 在 CD 上，且 $AE = CF$ ，求证 $DE = BF$ 。



【变式 1】 如图，已知，四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $OE = OF$ ， $OA = OC$ ，求证： $\angle B = \angle D$ 。

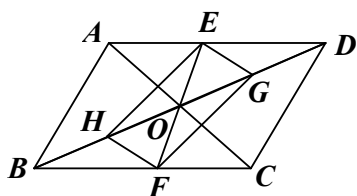


【变式 2】 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 的中点， E 是 AC 上的点，且 $EF \parallel AB$ ， $DF \parallel BE$ ，求证： AE 与 DF 互相平分。

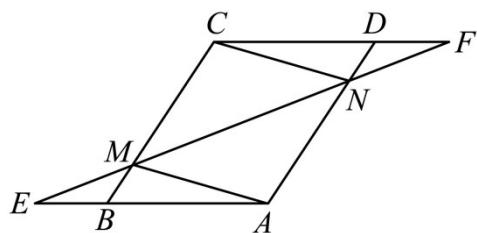


【变式3】 已知：如图，过 $\square ABCD$ 的对角线的交点 O 作直线 EF ，分别交 AD 于 E ，交 AD 于 F ， G 、 H 分别为 OD 、 OB 的中点．

求证： $EH \parallel FG$ ．



【变式4】 已知，如图，在 $\square ABCD$ 中，延长 AB 到点 E ，延长 CD 到点 F ，使得 $BE = DF$ ，连接 EF ，分别交 BC 、 AD 于点 M 、 N ，连接 AM 、 CN ．求证： $AM = CN$ ．



题型 06 命题的辨析

【典例1】 命题真假判断：两组对边分别平行的四边形是平行四边形．()

【变式1】 下列命题的逆命题错误的是 ()

- A．平行四边形是中心对称图形
- B．平行四边形的对角线互相平分
- C．平行四边形的两组对边相等
- D．平行四边形的两组对角相等

【变式2】 在下列条件中，不能判定四边形为平行四边形的是 ()

- A. 两组对边分别相等 B. 一组对边平行且另一组对边相等
- C. 两组对边分别平行 D. 一组对边平行且相等

【变式3】 一个四边形，对于下列条件：① 一组对边平行，一组对角相等；② 一组对边平行，一条对角线被另一条对角线平分；③ 一组对边相等，一条对角线被另一条对角线平分；④ 两组对角的平分线分别平行，其中能判定为平行四边形的有_____（填序号）。

【变式4】 下列命题：① 两组对角分别相等的四边形是平行四边形；② 一组对角相等且一组对边相等的四边形是平行四边形；③ 一组对边平行且一条对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形；④ 一组对边相等且一条对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形。其中所有真命题的序号是_____。

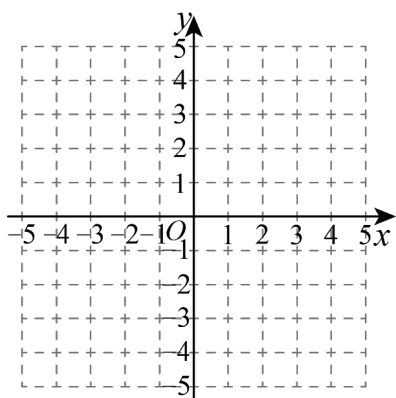
题型 07 已知平行四边形的三点坐标寻求第四点坐标

【典例1】 在平面直角坐标系中，已知以 A, B, C, D 四个点为顶点的四边形是平行四边形，其中 $A(0,0), B(2,0), C(3,1)$ ，则点 D 的坐标为_____。

【变式1】 在平面直角坐标系中，已知点 $O(0,0), A(2,2), B(3,0)$ ，若以点 O, A, B, C 为顶点的四边形是平行四边形，则点 C 的坐标不可能为（ ）

- A. $(-1,2)$ B. $(5,2)$ C. $(1,-2)$ D. $(2,-2)$

【变式2】 如图所示，在平面直角坐标系中，已知 $A(0,1), B(2,0), C(-2,-1)$ ，

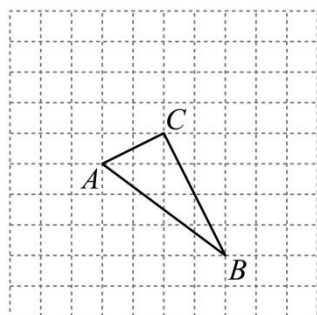


(1) 在平面直角坐标系中画出 $\triangle ABC$ ；

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积；

(3) 找一点 P ，使得以 P, A, B, C 为顶点的四边形是平行四边形，则点 P 的坐标是_____。

【变式3】如图是由边长为1的正方形单元格组成的网格， $\triangle ABC$ 的三个顶点都在网格中的格点上。



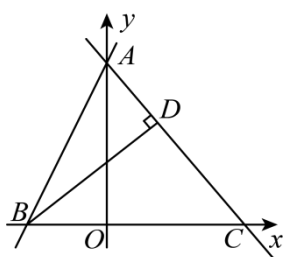
(1)判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由；

(2)若以点 A, B, C, D 为顶点画平行四边形，请在网格中标出所有 D 点的位置。

【变式4】综合与探究

如图，在平面直角坐标系中， A 是 y 轴的正半轴上一点，点 B, C 分别在 x 轴的负半轴上和正半轴上，

OB, OC, OA 的长满足 $|OC-6|+\sqrt{OB^2-16}+(OA-8)^2=0$ ，过点 B 作直线 AC 的垂线，交 AC 于点 D 。



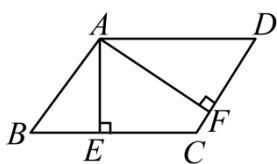
(1)求点 A 、点 B 、点 C 的坐标；

(2)求线段 BD 的长；

(3)在平面内是否存在一点 P ，使以 A, B, C, P 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

题型08 平行四边形的周长和面积

【典例1】如图，在 $\square ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于点 E ， $AF \perp CD$ 于点 F 。若 $AE=4, AF=6$ ，且 $\square ABCD$ 的周长为40，则 $\square ABCD$ 的面积为（ ）



A. 48

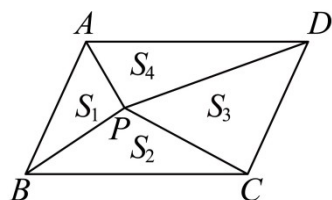
B. 36

C. 40

D. 24

【分析】 本题主要考查了平行四边形的性质．根据平行四边形的性质可得 $BC + CD = 20$ ，再由平行四边形的面积公式可得 $BC = 1.5CD$ ，可求出 $CD = 8$ ，即可求解．

【变式1】 如图，点 P 为平行四边形 $ABCD$ 内任意一点，连接 PA 、 PB 、 PC 、 PD ，如果将 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PDC$ 、 $\triangle PDA$ 的面积分别记为 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 ．那么以下结论正确的是 ()



A. $S_1 = S_4$

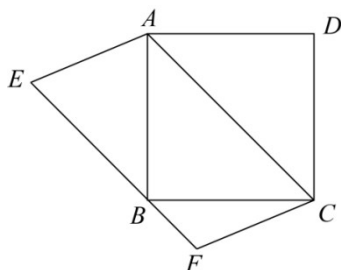
B. $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$

C. $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$

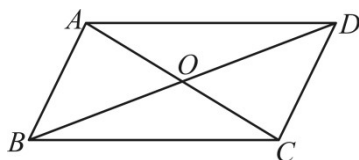
D. $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

【分析】 本题考查了平行四边形的性质，三角形的面积，根据平行四边形的对边相等可得 $AB = CD$ ， $AD = BC$ ，设点 P 到 AB 、 BC 、 CD 、 DA 的距离分别为 h_1 、 h_2 、 h_3 、 h_4 ，然后利用三角形的面积公式列式整理即可得出结论．

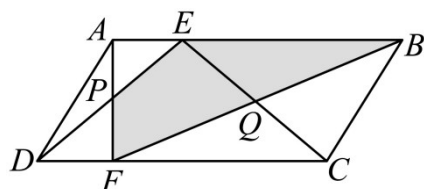
【变式2】 如图，正方形 $ABCD$ 和 $\square AEFC$ ，点 B 在 EF 边上，若正方形 $ABCD$ 和 $\square AEFC$ 的面积分别是 S_1 、 S_2 的大小关系是 S_1 _____ S_2 ．



【变式3】 如图，已知 $\square ABCD$ 的对角线相交于点 O ，它的周长为 28cm ， $\triangle BCO$ 的周长比 $\triangle ABO$ 的周长多 4cm ，则 $CD =$ _____ cm ．



【变式4】 如图， E 是 $\square ABCD$ 的边 AB 上的点， Q 是 CE 中点，连接 BQ 并延长交 CD 于点 F ，连接 AF 与 DE 相交于点 P ，若 $S_{\triangle APD} = 2\text{cm}^2$ ， $S_{\triangle BQC} = 5\text{cm}^2$ ，则阴影部分的面积为 _____ cm^2 ．

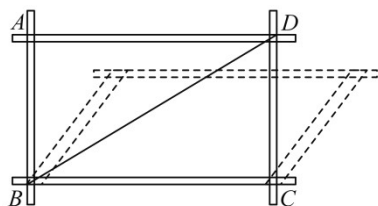


题型 09 平行四边形的不稳定性 and 中心对称性

【典例 1】 如图，在教学过程中，王老师为了更加直观地让学生体验四边形不具有稳定性，将四根木条用钉子钉成一个矩形框架 $ABCD$ ，向右拉动框架，给出了如下结论：

- ① 拉动后的四边形为平行四边形；
- ② 拉动前后四边形对角线的长度不变；
- ③ 拉动前后四边形的面积不变；
- ④ 拉动前后四边形的周长不变。

其中正确的结论是 ()



A . ①②

B . ①④

C . ①②④

D . ①③④

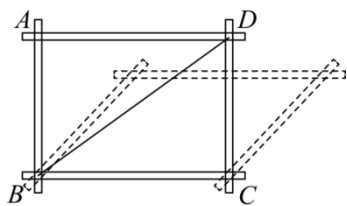
【典例 2】 (平行四边形是中心对称图形)

关于平行四边形，下列说法正确的是 ()

- A . 既是轴对称图形，又是中心对称图形
- B . 是轴对称图形，但不是中心对称图形
- C . 不是轴对称图形，但是中心对称图形
- D . 不是轴对称图形，也不是中心对称图形

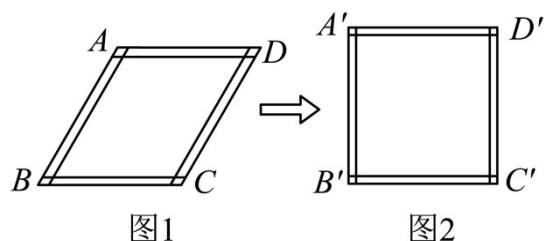
【变式 1】 如图，为了体验四边形的不稳定性，将四根木条用钉子钉成一个矩形框架 $ABCD$ ，然后向右拉动框架，给出如下的判断：① 四边形 $ABCD$ 为平行四边形；② 对角线 BD 的长度不变；③ 四边形 $ABCD$ 的

面积不变；④四边形 $ABCD$ 的周长不变，其中正确的结论是 ()



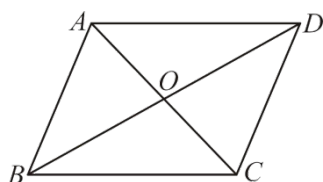
- A . ①② B . ①③ C . ①④ D . ①②④

【变式 2】 小智根据四边形的 **不稳定性** 制作了一个探究特殊四边形的学具，他用四根长度相同的木条在两端用螺栓两两连接，构成一个可以活动的四边形．他先将学具成为图 1 所示的四边形 $ABCD$ ，并测得 $\angle B = 60^\circ$ ，对角线 $AC = 20\text{cm}$ ，再将学具成为图 2 所示四边形 $A'B'C'D'$ ，并测得 $\angle B' = 90^\circ$ ，则图 2 中对角线 $A'C'$ 的长为 ()



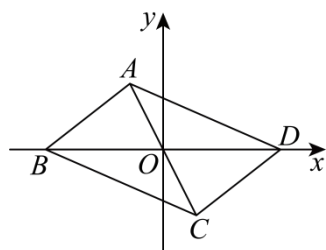
- A . 20cm B . 40cm C . $20\sqrt{2}\text{cm}$ D . $20\sqrt{3}\text{cm}$

【变式 3】 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，下列说法错误的是 ()



- A . 平行四边形 $ABCD$ 是中心对称图形
B . $\angle ABC = \angle ADC$
C . $\triangle AOB$ 和 $\triangle AOD$ 面积相等
D . $\triangle BOC \cong \triangle DOC$

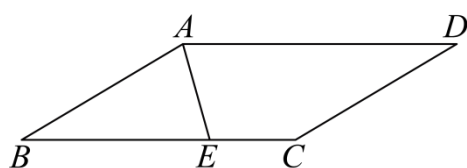
【变式 4】 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线交点在原点．若 $A(-2, 4)$ ，则点 C 的坐标是 ()．



- A. (2, 4) B. (-2, -4) C. (2, -4) D. (-4, -2)

强化训练

1. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， AE 是 $\angle BAD$ 的角平分线， $\angle BEA = 75^\circ$ ，则 $\angle D = (\quad)$

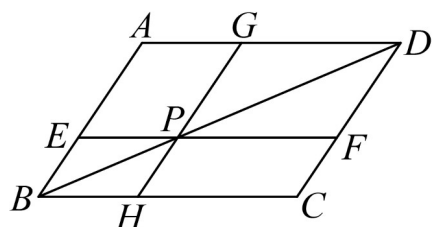


- A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°

2. 平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的度数之比有可能是 ()

- A. 1:2:3:4 B. 2:2:3:3 C. 2:3:2:3 D. 2:3:3:2

3. 如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中， $EF \parallel BC$ ， $GH \parallel AB$ ， EF 、 GH 的交点 P 在 BD 上，则图中面积相等的平行四边形有 ()

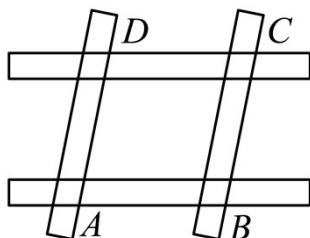


- A. 平行四边形 $AEPG$ 和平行四边形 $ABHG$
 B. 平行四边形 $AEPG$ 和平行四边形 $PHCF$
 C. 平行四边形 $ABHG$ 和平行四边形 $GPFD$
 D. 平行四边形 $GPFD$ 和平行四边形 $AEPG$

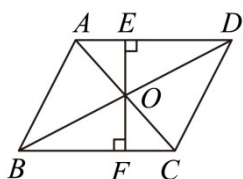
4. 下列关于平行四边形性质的描述中，错误的是 ()

- A. 平行四边形对边相等 B. 平行四边形对角相等
 C. 平行四边形一定是轴对称图形 D. 平行四边形对角线互相平分

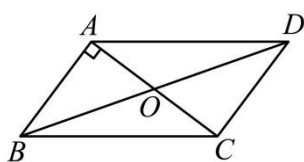
5. 如图，王老师用四根木棒搭成了平行四边形的框架，量得 $AB = 10\text{cm}$ ， $AD = 8\text{cm}$ ，固定 AB ，逆时针转动 AD ，在转动过程中，关于平行四边形 $ABCD$ 的面积变化情况：甲认为：先变大，后变小；乙认为：在转动过程中，平行四边形 $ABCD$ 的面积有最大值，最大值是 80cm^2 ，则 ()



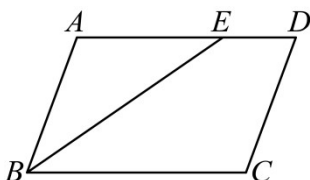
- A. 甲说的对 B. 乙说的对 C. 甲、乙说的都对 D. 甲、乙说的都不对
6. 已知平行四边形的一条边长为 14，下列各组数中，能分别作它的两条对角线长的是 ()
- A. 10 与 16 B. 12 与 16 C. 20 与 22 D. 10 与 18
7. 如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 交 BD 于点 O ，过点 O 作 $EF \perp AD$ 于点 E ， EF 交 BC 于点 F ，若 $\square ABCD$ 面积是 80， $OE = 4$ ，则 AD 的长为_____。



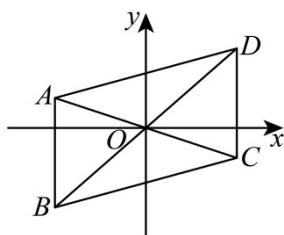
8. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 45^\circ$ ， $BC = 2$ ，则 AB 与 CD 之间的距离为_____
9. 如图， $\square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AB \perp AC$ ，若 $AB = 3$ ， $AC = 4$ ，则 BD 的长是_____



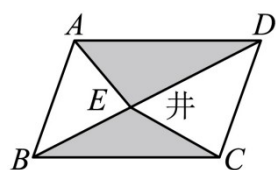
10. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $\angle C = 108^\circ$ ， BE 平分 $\angle ABC$ ，则 $\angle AEB =$ _____



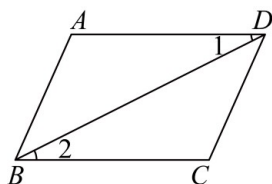
11. 如图，在直角坐标系中， $\square ABCD$ 的对角线的交点在原点 O ，若顶点 A 的坐标为 $(-3, 1)$ ，则顶点 C 的坐标是_____



12. 如图所示，有位农场主有一大片田地，其形状恰好是一个平行四边形，并且在对角线 BD 上有一口水井 E 。农场主临死前留下遗嘱，把两块三角形的田地(即图中阴影部分)给小儿子，剩下的全部给大儿子，至于水井 E ，正好两儿子共用，由于平行四边形两边长不同，所以遗嘱公布之后，亲友们七嘴八舌，议论纷纷，认为这个分配不公平，那么你认为_____。(填“公平”或“不公平”)理由是_____。

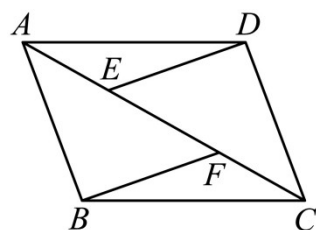


13. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，连接 BD ， $\angle A = \angle C$ ， $\angle 1 = \angle 2$ 。求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

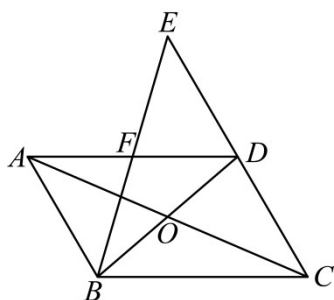


14. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E, F 在对角线 AC 上，且 $AE = CF$ ，连接 DE, BF 。求证：

$$DE = BF$$



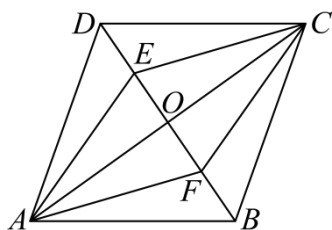
15. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 交于点 O ，延长 CD 到点 E ，使 $DE = CD$ ，连接 BE 交 AD 于点 F 。



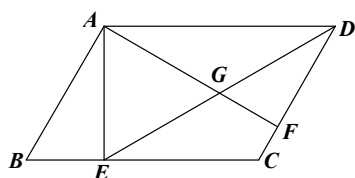
(1)求证： $AF = DF$ ；

(2)若 $AB = BD = 4$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ，求 BF 的长。

16. 如图， $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， E 、 F 是 $\square ABCD$ 的对角线 BD 上的两点，且 $DE = BF$ ，连接 AE 、 AF 、 CE 、 CF 。求证： $\angle ECF = \angle FAE$ 。

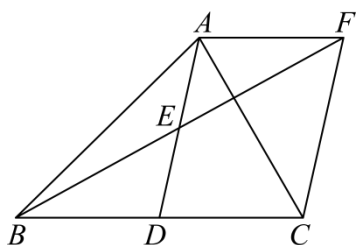


17. 如图， $\square ABCD$ 中， $AE \perp BC$ ， $AF \perp CD$ ， $\angle ADC = 60^\circ$ ， $AD = 6$ ， $BE = 2$ ，求 $\triangle DEC$ 的面积。



18. 在平面直角坐标系中，已知 $A(1,0)$ ， $B(-1,-2)$ ， $C(2,-2)$ ，若以 A ， B ， C ， D 为顶点的四边形是平行四边形，求点 D 的坐标。

19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线， E 是 AD 的中点，过点 A 作 $AF \parallel BC$ ，交 BE 的延长线于点 F ，连接 CF 。求证：

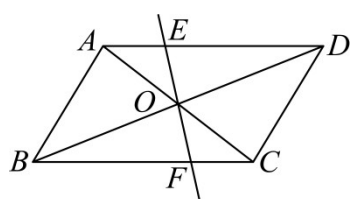


(1) $\triangle AEF \cong \triangle DEB$ ；

(2)四边形 $ADCF$ 是平行四边形；

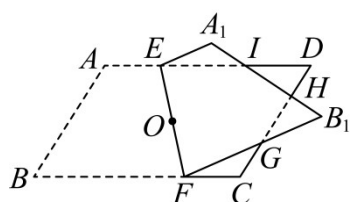
20. (1) 如图①， $\square ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ，直线 EF 过点 O ，与 AD ， BC 分别交于点 E ，

F . 求证： $AE = CF$.



图①

(2) 如图②，将 $\square ABCD$ 沿过对角线交点 O 的直线 EF 折叠，使点 A 落在点 A_1 处，点 B 落在点 B_1 处， FB_1 交 CD 于点 G ， A_1B_1 与 CD ， DE 分别交于点 H ， I . 求证： $EI = FG$.



图②