

专题 02 期末压轴题—勾股定理的综合应用

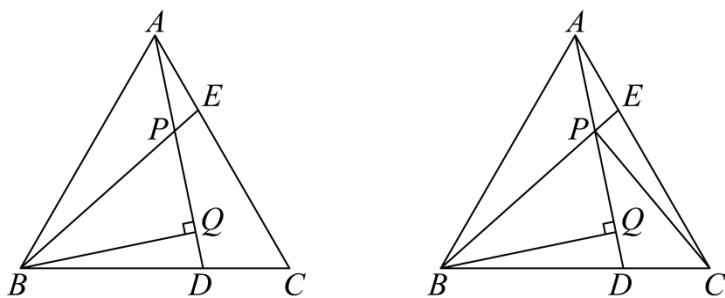
考点归纳

- 考点 01 勾股定理与直角三角形的性质
- 考点 02 勾股定理与垂直平分线
- 考点 03 勾股定理与角平分线
- 考点 04 勾股定理与角平分线、垂直平分线
- 考点 05 勾股定理与特殊三角形
- 考点 06 根据数量关系求解（分类讨论）
- 考点 07 勾股定理与倍长中线模型
- 考点 08 最值问题
- 考点 09 新定义题
- 考点 10 勾股定理的几何、代数综合应用
- 考点 11 多线延长交于一点，巧妙形成多种构造

考点精练

考点 01 勾股定理与直角三角形的性质

1. 如图1，在等边 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别在 BC, AC 上， $BD = CE$ ， AD, BE 相交于点 P ， $BQ \perp AD$ 于点 Q ，连接 PC 。

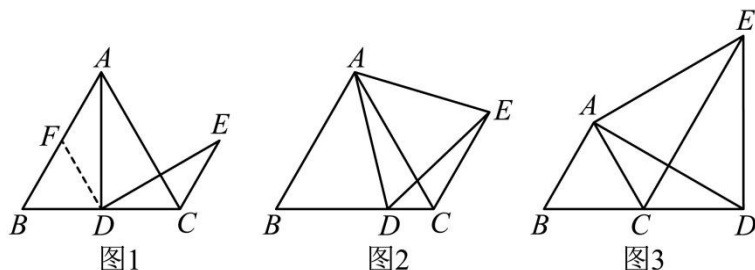


(1) 求证： $AD = BE$ ；

(2)若 $AD = 6$, $PE = 1$, 求 PQ 的长;

(3)如图 2, 若 $PB \perp PC$, 探究线段 AP 与 PQ 的数量关系, 并说明理由.

2. 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 点 D 是直线 BC 上一点, 以点 D 为顶点作 $\angle ADE = 60^\circ$. 过点 C 作 $CE \parallel BA$, 交射线 DE 于点 E .



(1)如图 1, 当点 D 为 BC 的中点时, 求证: $AD = DE$.

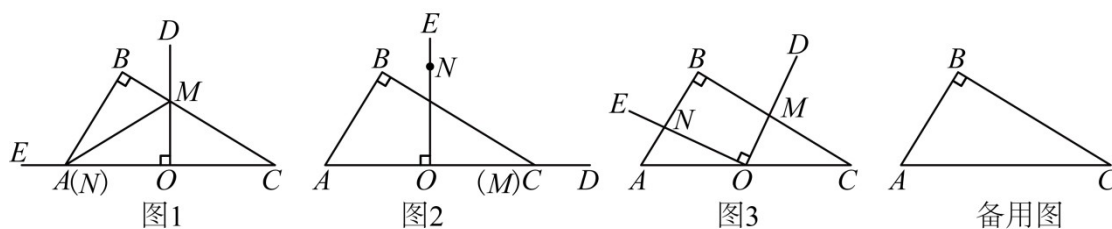
小明同学的思路是: 取 AB 的中点 F , 连接 DF , 然后证明 $\triangle AFD \cong \triangle DCE$, 从而得到 $AD = DE$. 请你按照小明同学的思路完成证明过程;

(2)如图 2, 当点 D 为线段 BC 上的任意一点时, 求证: $AD = DE$;

(3)如图 3, 当点 D 在 BC 的延长线上, 且满足 $CD = BC$ 时, 若 $AB = 2$, $AD = 2\sqrt{3}$, 请直接写出四边形 $ACDE$ 的面积.

考点 02 勾股定理与垂直平分线

3. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, O 为 AC 中点, $\angle DOE = 90^\circ$, 射线 OD 、 OE 分别交直线 BC 、 AB 于 M 、 N .



(1)如图 1, OA 在射线 OE 上, 连接 MN , 试判断 CM 、 BM 、 BN 之间的数量关系并证明;

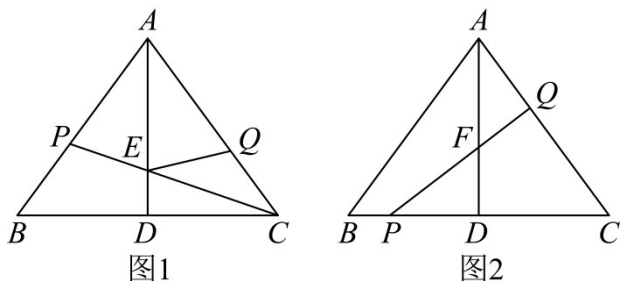
(2)如图 2, OC 在射线 OD 上, 将 $\angle DOE$ 绕点 O 逆时针旋转 α° .

①如图 3, 当射线 OE 交线段 AB 于点 N 时, 求证: $BM^2 + BN^2 = CM^2 + AN^2$;

②当 $0 < \alpha < 180$ 时, 若 $AB = 3$, $BC = 4$, 当 $BM = 1$ 时, 求 AN 的长度.

考点 03 勾股定理与角平分线

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 10\text{cm}$ ， $BC = 12\text{cm}$ ， $S_{\triangle ABC} = 48\text{cm}^2$ ， $AD \perp BC$ ，垂足为 D 。动点 P 以 2cm/s 的速度从点 A 出发沿三角形的顶点 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 匀速运动，同时动点 Q 以 1cm/s 的速度从点 C 出发沿 CA 向点 A 方向匀速运动。当点 Q 停止运动时，点 P 也随之停止。设点 P 运动的时间为 $t\text{s}$ 。

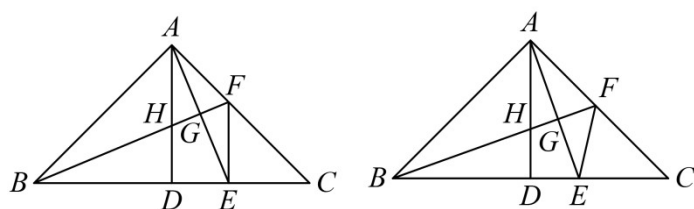


(1) 如图1，若点 P 在线段 AB 上运动，连接 CP ，交 AD 于点 E ，连接 EQ 。当 $t = \underline{\hspace{2cm}}\text{s}$ 时， $\angle APE = \angle AQE$ ；

(2) 如图1，当 $t = \underline{\hspace{2cm}}\text{s}$ 时，点 P 恰好落在 $\triangle ABC$ 的角平分线上。

(3) 如图2，当 $t = 6\text{s}$ 时，连接 PQ ，交 AD 于点 F ，求 $\frac{S_{\triangle AFQ}}{S_{\triangle CPQ}}$ 的值。

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， AD 为 $\triangle ABC$ 的中线， F 为 AC 上一点，连结 BF ，交 AD 于点 H ，作 $AE \perp BF$ ，垂足为点 G ， AE 交 BC 于点 E ，连结 EF 。



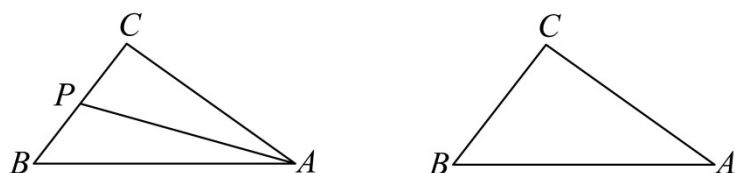
(1) 求证： $\triangle ABH \cong \triangle CAE$ ；

(2) 若 AE 平分 $\angle DAC$ ，求 $\frac{AH}{DH}$ 的值；

(3) 若 F 是 AC 中点，求证： $EF + AE = \sqrt{5}FC$ 。

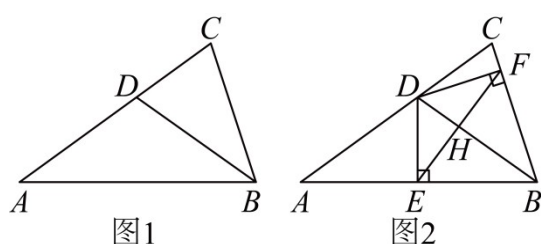
考点 04 勾股定理与角平分线、垂直平分线

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $BC = 6$ ，若点 P 从点 A 出发，以每秒1个单位的速度沿折线 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ 运动，设运动时间为 t 秒($t > 0$)。



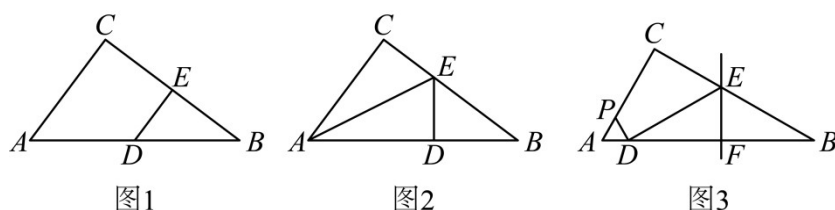
- (1) AC 的长为_____；
- (2) 当点 P 在线段 AC 、 CB 上运动时，用 t 的代数式表示 CP 的长度；
- (3) 当点 P 恰好在 $\angle BAC$ 的角平分线上（点 A 除外），求 t 的值；
- (4) 点 P 运动的过程中，当 $\triangle BPC$ 为等腰三角形时，请直接写出 t 的值。

7. 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 在 AC 上，且 $BD = BC = AD$ 。



- (1) 求 $\angle A$ 的度数；
 - (2) 如图 2， $DE \perp AB$ 于点 E ， $DF \perp BC$ 于点 F ，连接 EF 交 BD 于点 H 。
- ① 求证： BD 垂直平分 EF ；
 - ② 若 $AE = m$ ， $CD = n$ ，且 $m > n$ ，求 CF 的长（用含 m ， n 的式子表示）。

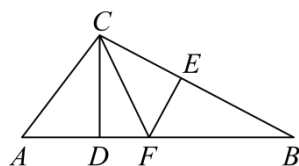
8. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D ， E 分别是 AB ， BC 上的点，连接 DE 。



- (1) 【基础考察】如图 1，若点 E 为 BC 的中点， $BC = 8$ ， $DE = 3$ ， $BD = 5$ ，则 $\triangle BDE$ 是_____三角形；
（填“锐角”，“直角”或“钝角”）
- (2) 【能力巩固】如图 2，连接 AE ，若 AE 平分 $\angle BAC$ ， $ED \perp AB$ ， $BD = 4$ ， $BC = 8$ ，求 BE 的长；
- (3) 【素养提升】如图 3，点 P 在线段 AC 上运动，始终保持 $PA = PD$ ， EF 是 BD 的垂直平分线，交 BD 于点 F 。若 $AC = 4$ ， $BC = 7$ ， $PA = 1$ ，求线段 DE 的长。

考点 05 勾股定理与特殊三角形

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， CD 是 AB 边上的高， $AD=6$ ， $BD=15$ ， $CD=8$ ， E 是 BC 边上的一点，过点 E 作 $EF \perp BC$ ， EF 与 AB 交于点 F ，连结 CF 。



- (1) 求 AC 和 BC 的长。
- (2) 当点 E 是 BC 的中点时，求 $\triangle BCF$ 的面积。
- (3) 当 $\triangle ACF$ 是等腰三角形时，求此时 CE 的长。

考点 06 根据数量关系求解 (分类讨论)

10. 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 均为等腰直角三角形， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ，点 D 是等腰直角三角形 ABC 斜边 AB 所在直线上一点 (不与点 B 重合)。

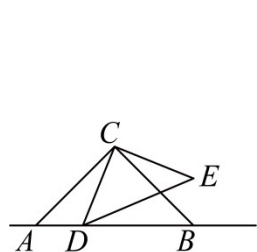


图1

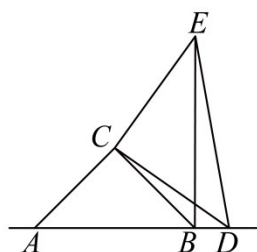
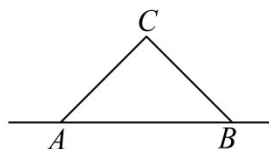


图2



(备用图)

- (1) 如图1，当点 D 在线段 AB 上时，直接写出 DA^2 ， DB^2 ， DE^2 三者之间的数量关系：_____；
- (2) 如图2，当点 D 在线段 AB 的延长线上时，(1) 中的结论仍然成立吗？若成立，请你利用图2给出证明过程。若不成立，请说明理由。
- (3) 若 $AB=3AD$ ，点 M 是 DE 中点，请直接写出 $\frac{CM}{BC}$ 的值。

11. 如图1， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $BD \perp AC$ 于点 D ， $AD=4$ ， $CD=1$ 。

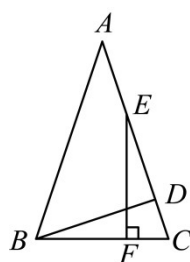
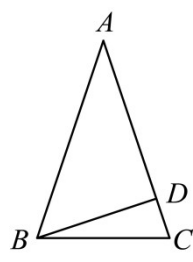


图1



备用图

- (1) 求 AB ， BC 的长；

(2)若点 E 是射线 DA 上的一个动点，作 $EF \perp BC$ 于点 F ，连结 FD 。

①当 $CF = CD$ 时，求 DE 的长。

②设直线 EF 交直线 AB 于点 P ，若 $AP:BP = 3:7$ ，求 BE 的长。

考点 07 勾股定理与倍长中线模型

12. 数学兴趣小组在活动时，老师提出了这样一个问题：

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 10$ ， $AC = 6$ ， D 是 BC 点，求 BC 边上的中线 AD 的取值范围。

【阅读理解】小明在组内经过合作交流，得到了如下的解决方法：

延长 AD 至点 E ，使 $DE = AD$ ，连接 CE 。根据 SAS，可以判定 $\triangle ADB \cong \triangle EDC$ ；得出 $AB = EC$ 。这样就能把线段 AB 、 AC 、 $2AD$ 集中在 $\triangle ACE$ 中，利用三角形三边的关系，即可得出中线 AD 的取值范围。

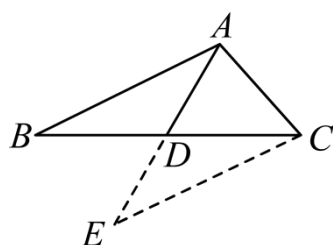


图1

【方法提炼】当条件中出现“中点”、“中线”等条件时，可以通过作“辅助线”，构造以中点所分成两线段为对应边的全等三角形，从而寻求解决问题的方法。

【解决问题】(1) 图 1 中 AD 的取值范围是_____；

(2) 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $AC = 5$ ， AD 是边 BC 上的中线， $AD = 2$ ，求 $\triangle ACB$ 的面积；

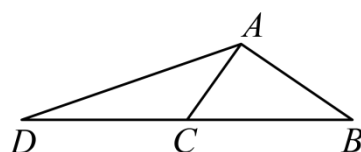


图2

(3) 如图 3，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 边的中点， $DE \perp DF$ 于点 D ， DE 交 AB 于点 E ， DF 交 AC 于点 F ，连接 EF ，说明： $BE + CF > EF$ 。

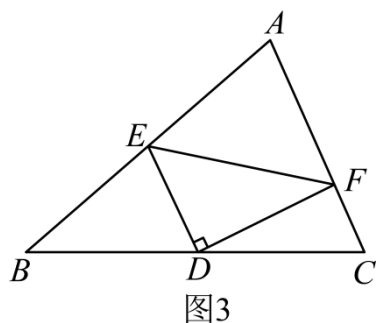


图3

考点 08 最值问题

13. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AB = 3\sqrt{3}$, 点 D 为边 AB 上一点, 在 BC 的延长线上取一点 E , 使得 $\angle DEB = 30^\circ$, 线段 DE 交边 AC 于点 F .

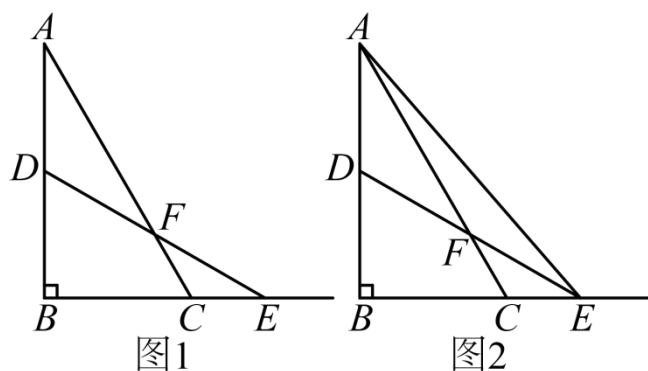


图1

图2

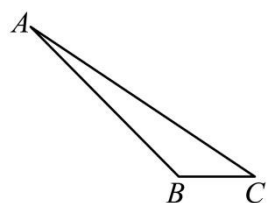
(1) 求证: $CE = CF$.

(2) 若点 F 为 DE 的中点, 求 AD 的长度.

(3) 如图 2, 连结 AE , 当 BD 的长为何值时, $AE + AF$ 的值最小, 请说明理由. 并求此时 $\triangle FCE$ 的面积.

考点 09 新定义题

14. 定义: 若三角形一条边上的高的长度等于这条边长度的 2 倍, 则这个三角形叫做“高倍底”三角形, 这条边叫做这个三角形的“基底”.



(1) 概念理解: 下列属于“高倍底”三角形的有_____ ; (填序号)

①等边三角形; ②等腰直角三角形; ③三边长分别是 $1, 2, \sqrt{5}$ 的三角形.

(2) 问题探究: 如图, $\triangle ABC$ 是“高倍底”三角形, BC 是“基底”. 若 $\angle ABC = 135^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, 求 BC 的长;

(3)应用拓展： $\triangle ABC$ 是“高倍底”三角形， BC 是“基底”， $\angle ABC > 90^\circ$ 。将 $\triangle ABC$ 沿着边 AB 翻折得到 $\triangle ABC'$ ，连接 CC' ，若 $BC = 2$ ，且 $\triangle ABC$ 有一条边长为 5，求 CC' 的长。

15. 定义：若三角形满足：两边的平方和与这两边乘积的差等于第三边的平方，则称这个三角形为“类勾股三角形”。如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC = BC^2$ ，则 $\triangle ABC$ 是“类勾股三角形”。

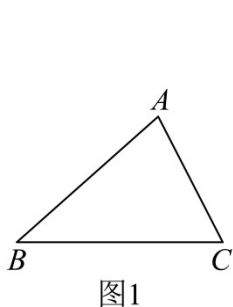


图1

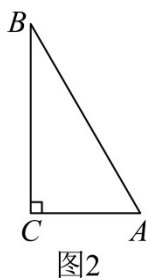


图2

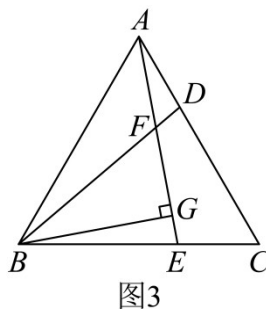


图3

(1)等边三角形_____ (填“是”或“不是”)“类勾股三角形”。

(2)如图 2，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ；

①若 $\angle B = 30^\circ$ ， $AC = 1$ ，判断 $\triangle ABC$ 是不是“类勾股三角形”，并说明理由。

②若 $\triangle ABC$ 是“类勾股三角形”， $AB = c$ ， $AC = b$ ， $BC = a$ ，且 $a > b$ ，求 $a:b:c$ 。

(3)如图 3，在等边 $\triangle ABC$ 的边 AC ， BC 上各取一点 D 、 E ，且 $AD < CD$ ， AE ， BD 相交于点 F ， BG 是 $\triangle BEF$ 的高，若 $\triangle BGF$ 是“类勾股三角形”，且 $BG > FG$ 。

①求证： $AD = CE$ 。

②连接 CG ，若 $\angle GCB = \angle ABD$ ， $FG = 1$ ，求等边 $\triangle ABC$ 的边长。

考点 10 勾股定理的几何、代数综合应用

16. 【模型建立】

“数形结合”和“建模思想”是数学中的两个重要的思想方法，先阅读以下材料，然后解答后面的问题。

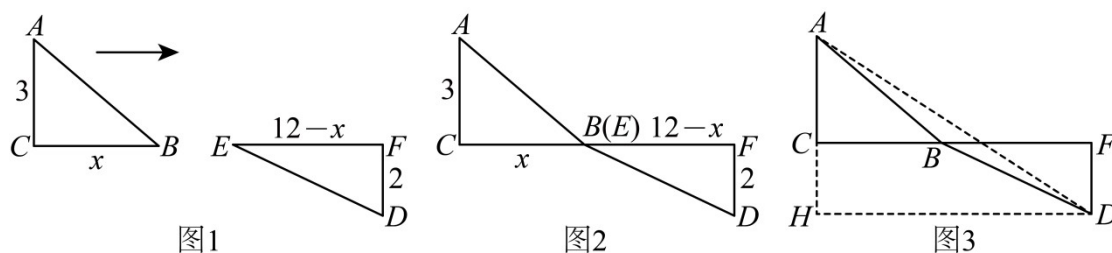
例：求代数式 $\sqrt{x^2 + 3^2} + \sqrt{(12-x)^2 + 2^2}$ 的最小值。

分析： $\sqrt{x^2 + 3^2}$ 和 $\sqrt{(12-x)^2 + 2^2}$ 是勾股定理的形式， $\sqrt{x^2 + 3^2}$ 是直角边分别是 x 和 3 的直角三角形的斜边， $\sqrt{(12-x)^2 + 2^2}$ 是直角边分别是 $12-x$ 和 2 的直角三角形的斜边，因此，我们构造两个直角 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ ，

并使直角边 BC 和 EF 在同一直线上 (图 1)，向右平移直角 $\triangle ABC$ 使点 B 和 E 重合 (图 2)，这时

$CF = x + 12 - x = 12$ ， $AC = 3$ ， $DF = 2$ ，问题就变成“点 B 在线段 CF 的何处时， $AB + DB$ 最短？”根据两点

间线段最短，得到线段 AD 就是它们的最小值．



【模型应用】

(1) 代数式 $\sqrt{x^2+3^2} + \sqrt{(12-x)^2+2^2}$ 的最小值为_____；

(2) 变式训练：利用图 3，代数式 $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{(5-x)^2+1}$ 的最小值为_____；

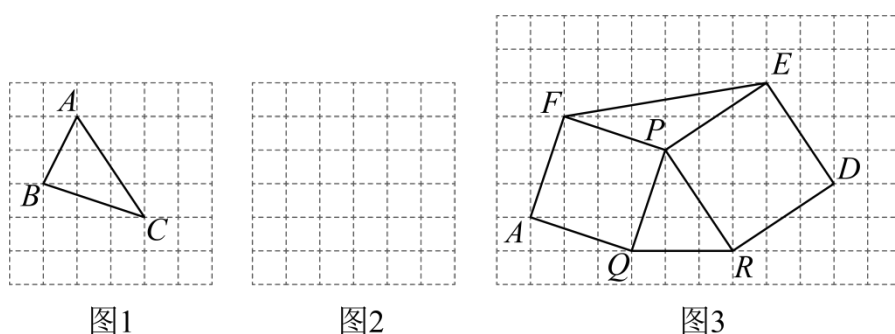
(3) 若 $x+y+z=9$ ，则 $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{z^2+9}$ 的最小值为_____；

(4) 已知正数 m 满足 $\sqrt{49-m^2} + \sqrt{576-m^2} = 25$ ，求 m 的值．

17. 阅读下列材料：

材料（一）小明遇到一个问题：在 $\triangle ABC$ 中， AB ， BC ， AC 三边的长分别为 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{10}$ 、 $\sqrt{13}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积．小明是这样解决问题的：如图 1 所示，先画一个正方形网格（每个小正方形的边长为 1），再在网格中画出格点 $\triangle ABC$ （即 $\triangle ABC$ 三个顶点都在小正方形的顶点处），从而借助网格就能计算出 $\triangle ABC$ 的面积．他把这种解决问题的方法称为构图法．

参考小明解快问题的方法，完成下列问题（每个小正方形的边长为 1）：



(1) 图 1 中 $\triangle ABC$ 的面积为_____；

(2) 图 2 是一个 6×6 的正方形网格．

① 利用构图法在图 2 中画出格点 $\triangle DEF$ ，使 $DE = \sqrt{13}$ ， $EF = \sqrt{20}$ ， $DF = \sqrt{29}$ ；

② 计算①中 $\triangle DEF$ 的面积为_____；

(3)如图 3，已知 $\triangle PQR$ ，以 PQ ， PR 为边向外作正方形 $PQAF$ ，正方形 $PRDE$ ，连接 EF ，

① $\triangle PQR$ 与 $\triangle PEF$ 面积之间的关系为_____；

②若 $PQ = \sqrt{10}$ ， $PR = \sqrt{13}$ ， $QR = 3$ ，直接写出六边形 $AQRDEF$ 的面积为_____；

(4)请利用以上的解题方法求出图 4 中六边形花坛 $ABCDEF$ 的面积（正方形 $PQEF$ 面积为 29，正方形 $ABRP$ 面积为 26，正方形 $CDQR$ 面积为 9）为_____。

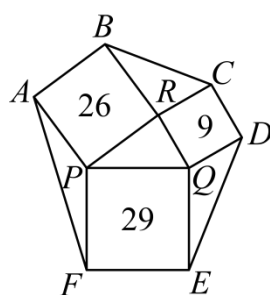
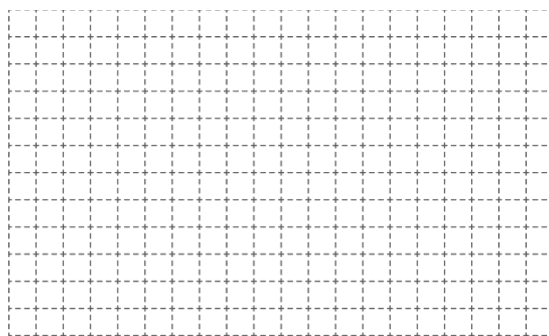


图4



备用图

材料（二）利用构图法我们还可以从构造几何图形入手，将复杂的根式计算用构造图形的方式转为几何图形加以解决，如 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 的几何意义是以 a 和 b 为直角边的直角三角形的斜边。例如，已知 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 从勾股定理的学习中可以将该式看成直角三角形的两直角边长度分别为 3、4。计算结果为斜边长度 5。同理，计算 $\sqrt{a^2 + 64} = \sqrt{a^2 + 8^2}$ ($a > 0$) 可以看成直角边长度别为 a 、8，结果为斜边长度，利用此原理并请你尝试着用“构图法”解决以下问题：

(5)已知 $a + b = 12$ ($a > 0, b > 0$)，计算 $\sqrt{a^2 + 4} + \sqrt{b^2 + 9}$ 的最小值为_____；

(6)代数式 $\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(15-x)^2 + 25}$ 的最小值为_____。

考点 11 多线延长交于一点，巧妙形成多种构造

18. 【初步探究】

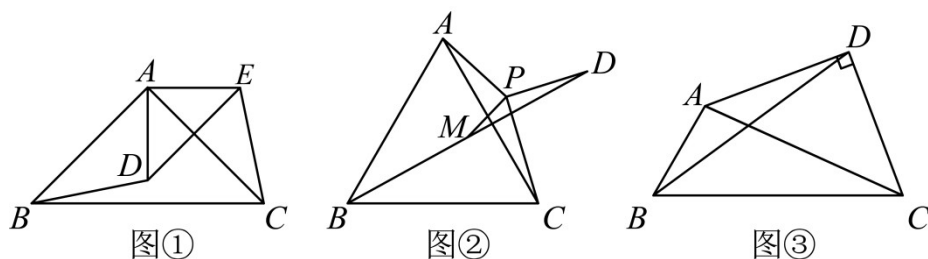
(1)如图①，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAC = \angle DAE$ 。求证： $BD = CE$ 。

【深入探究】

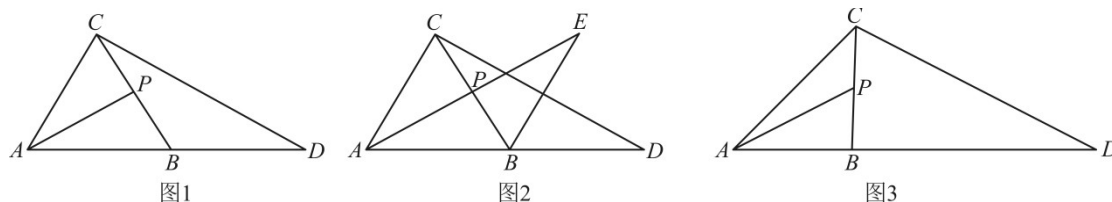
(2)如图②， D ， P 是等边 $\triangle ABC$ 外两点， $PA = PD$ ， $\angle APD = 120^\circ$ ，连接 BD ；点 M 在 BD 上，使 $\angle MPC = 60^\circ$ ，求证：点 M 是 BD 的中点。

【拓展应用】

(3) 如图③，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $AD = CD$ ， $AB = 2$ ， $BD = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ ，请直接写出 BC 的长。



19. 【问题背景】如图1，已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 60^\circ$ ， P 是 CB 的中点， D 是 AB 延长线上的一点， $BD = AC$ ，连接 DC ， AP 。



【初步探究】(1) 若 $\angle ACD = 90^\circ$ ， $CP = 3$ ，求 AD 的长；

【变式探究】(2) 如图2，过点 B 作 $BE \parallel AC$ ，交 AP 延长线于点 E ，试探究线段 DC 与 AP 间的数量关系，并说明理由；

【拓展探究】(3) 如图3，若【问题背景】中条件改为： $\angle CAB = 45^\circ$ ， P 是 CB 的中点， $\angle PAB = \angle D$ ， $DC = 2AP$ ， $AC = 1$ ，求 BD 的长。