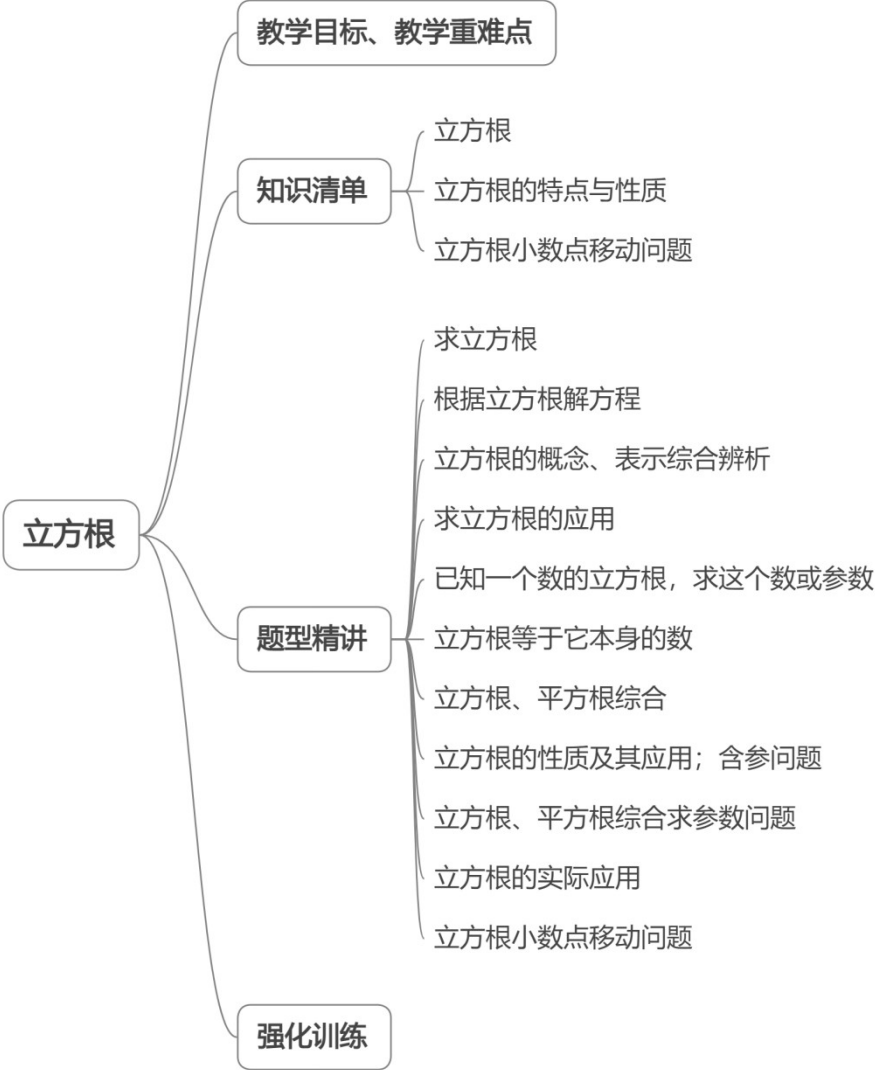


专题 19.2 立方根

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 知道立方根的概念，会用数学符号表示数的立方根； 2. 会求一个数的立方根；利用立方根解方程； 3. 掌握立方根的特点与性质； 4. 由被开方数与它的立方根的数量关系，到总结立方根的小数点移动规律。
教学重难点	1.重点 (1) 由立方到开立方；明确开立方与立方互为逆运算；

	(2) 立方根的概念、表示；求一个数的立方根； (3) 立方根的特点，并与平方根、算术平方根的特点对比理解。 2. 难点 (1) 立方根的性质及其应用； (2) 立方根小数点移动问题； (3) 立方根的综合应用。
--	--

知识清单

知识点 1 立方根

1. 问题引入：有一个体积为 1000 cm^3 的正方体纸盒，它的棱长是多少？

设这个正方体纸盒的棱长是 $x \text{ cm}$,

根据已知条件，得 $x^3=1000$.

因为 $10^3=1000$, 所以这个正方体纸盒的棱长是 10 cm .

这实际上是“已知一个数的立方，求这个数”的问题.

2. 立方根

①**立方根**：一般地，如果一个数 x 的立方等于 a , 即 $x^3=a$, 那么这个数 x 叫作 a 的**立方根**，也称为**三次方根**. a 叫作**被开方数**.

②**开立方**：求一个数 a 的立方根的运算叫作**开立方**. 例如，求 64 的立方根，就是要对 64 进行开立方运算， 64 是被开方数.

开立方和立方互为逆运算.

③**立方根的表示**：类似平方根，一个数 a 的立方根用符号“ $\sqrt[3]{a}$ ”表示.

【即学即练】

1. 对于 $\sqrt[3]{-8}$ 说法错误的是 ()

A. 表示 -8 的立方根

B. 结果等于 -2

C. 与 $-\sqrt[3]{8}$ 的结果相等

D. 没有意义

2. 8 的立方根是 ()

A. 2

B. -2

C. ± 2

D. 64

3. 求下列各数的立方根：

$$(1) -27; \quad (2) \frac{8}{125}; \quad (3) 0.216; \quad (4) -5.$$

4. 求下列各式中 x 的值：

$$(1) 4x^3 = \frac{1}{16};$$

$$(2) \frac{1}{3}(2x-5)^3 = -9.$$

5. 下列说法正确的是 () .

A. -5 是 125 的立方根

B. 64 的立方根是 ± 4

C. -2.5 是 15.625 的立方根

D. $(-4)^3$ 的立方根是 -4

6. $\sqrt[3]{1-a} = -2$, 则 a 的值是 ()

A. 8

B. 2

C. 9

D. -8

知识点 2 立方根的特点与性质

1. 立方根的特点

① 正数的立方根是正数；

② 0 的立方根是 0 ;

③ 负数的立方根是负数.

④ 任何一个数都有立方根，且只有一个立方根.

2. 立方根的性质

$$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

3. 立方根等于它本身的数是 0 或 ± 1 .

【即学即练】

1. 下列说法中，正确的是 ()

A. 一个数的立方根有两个，它们互为相反数 B. 负数没有立方根

C. 如果一个数有立方根，那么它一定有平方根 D. 一个数的立方根的符号与被开方数的符号相同

2. 判断下列说法是否正确

(1) $\sqrt{64}$ 的立方根是 -2 .

(2) ± 3 是 27 的立方根 .

李蕾认为 (1) 错误, (2) 正确. 请问李蕾的观点正确吗? 如果不正确, 请说明理由.

3. 计算 $(\sqrt[3]{5})^3 =$ _____ .

4. 计算 $\sqrt[3]{(-7)^3}$ 的正确结果是

- A. -7 B. 7 C. ± 7 D. 无意义

5. 一个数的立方等于它本身, 这个数是 ____ .

6. 如果一个数的平方根与它的立方根相等, 则这个数是 ()

- A. 0 B. 正数 C. 0 和 1 D. 1

知识点 3 立方根的小数点移动问题

1. 被开方数与它的立方根的数量关系

问题:

(1) 将被开方数扩大为原来的 1000 倍, 它的立方根如何变化?

(2) 将被开方数缩小为原来 $\frac{1}{1000}$, 它的立方根如何变化?

2. 立方根小数点移动规律

被开方数的小数点向右或者向左移动三位, 它的立方根的小数点相应地向右或者向左移动一位.

【即学即练】

1. 若 $\sqrt[3]{1.728} = 1.2$, 则 $\sqrt[3]{1728} =$ _____, $\sqrt[3]{-0.001728} =$ _____.

2. (1) 填表

α	0.000001	0.001	1	1000	1000000
$\sqrt[3]{\alpha}$		0.1	1		100

(2) 由上表可以发现: 若被开方数扩大为原来的 _____ 倍, 则他的立方根扩大为原来的 _____ 倍.

(3) 根据发现的规律填空: 已知 $\sqrt[3]{3} \approx 1.442$, 则 $\sqrt[3]{3000} \approx$ _____, $\sqrt[3]{0.003} \approx$ _____.

题型精讲

题型 01 求立方根

【典例 1】 -8 的立方根是 ()

A. -2

B. 2

C. ± 2

D. $-\frac{1}{2}$

【变式 1】求下列各数的立方根：

(1) 1000 ；

(2) 343 ；

(3) $-15\frac{5}{8}$ 。

【变式 2】求下列各数的立方根：

(1) 0.125 ；

(2) $-\frac{27}{64}$ ；

(3) 729 。

【变式 3】求下列各式的值：

(1) $-\sqrt[3]{0.027}$ ；

(2) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$ ；

(3) $\sqrt[3]{1-\frac{37}{64}}$ ；

(4) $\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}$ 。

题型 02 根据立方根解方程

【典例 1】求下列各式中的 x 的值。

(1) $(x-1)^3 = 0.064$ ；

$$(2) \frac{1}{4}(2x+3)^3 = 54 .$$

【变式 1】 . 求下列各式中 x 的值：

$$(1) x^3 - 0.216 = 0 ;$$

$$(2) -125x^3 = 8 ;$$

$$(3) (x-2)^3 + 27 = 0 ;$$

$$(4) \frac{1}{2}(2x-1)^3 = 4 .$$

题型 03 立方根概念、表示综合辨析

【典例 1】 . $-\sqrt[3]{5}$ 表示 ()

A . 5 的负立方根

B . -5 的立方根

C . 5 的立方根的相反数

D . $\frac{3}{5}$ 的相反数

【变式 1】 . 下列说法中，正确的是 ()

A . -27 没有立方根

B . 1 的立方根是 ± 1

C . $\sqrt[3]{2}$ 是 2 的立方根

D . 3 的立方根是 $\sqrt{3}$

【变式 2】 . 下列说法正确的是 ()

A . 一个正数的立方根有两个，它们互为相反数

B . 负数没有立方根

C . 任何一个数的立方根都是非负数

D . 正数有一个正的立方根，负数有一个负的立方根

【变式 3】 . 下列语句正确的是 ()

A . $\frac{125}{216}$ 的立方根是 $\pm \frac{5}{6}$

B . -3 是 27 的负的立方根

C . $\sqrt{64}$ 的立方根是 2

D . $(-1)^2$ 的立方根是 -1

题型 04 求立方根的应用

【典例 1】. -64 的立方根是____， $-\frac{1}{3}$ 是____的立方根， $-\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$ 的立方根是____.

【变式 1】. 计算 $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ = ____.

【变式 2】. $\sqrt[3]{512}$ 的立方根是____， $\sqrt[3]{-343}$ 的立方根是____.

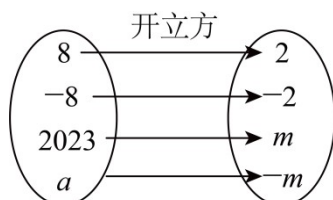
题型 05 已知一个数的立方根，求这个数或参数

【典例 1】. 实数 a 的立方根是 3 ，那么 a = ____.

【变式 1】. 已知 $x-2$ 的立方根是 -2 ，则 x = ____.

【变式 2】. 若 $x-1$ 是 125 的立方根，则 $x-7$ 的立方根是

【变式 3】. 根据如图中呈现的运算关系，可知 a 的值为 ____.



题型 06 立方根等于它本身的数

【典例 1】. 一个数的立方根等于它本身，这个数是 ()

A. 1

B. -1

C. 0 或 1

D. 0 或 1 或 -1

【变式 1】. 平方根等于本身的数是_____.

算术平方根等于本身的数是_____.

立方根等于本身的数是_____.

题型 07 立方根、平方根综合

【典例 1】. 填空：

(1) 1 的平方根为____，立方根为____，算术平方根为____；

(2) 27 的立方根是____；

(3) $-\sqrt{64}$ 的立方根为____；

(4) $\sqrt[3]{(-8)^2}$ 的平方根为____.

【变式1】. $\sqrt[3]{729}$ 的算术平方根等于 ()

- A. 9 B. ± 9 C. 3 D. ± 3

【变式2】. 16 的平方根是_____, $\sqrt{64}$ 的立方根是_____.

【变式3】. 下列说法中, 错误的是 ()

- A. 8 的立方根是 ± 2 B. 4 的算术平方根是 2
C. $\sqrt{81}$ 的平方根是 ± 3 D. 立方根等于它本身的数是 $\pm 1, 0$

【变式4】. $(-\sqrt{9})^2$ 的平方根是 x , 64 的立方根是 y , 则 $x+y$ 的值为_____.

【变式5】. 已知一个正数的平方根是 $3a+1$ 和 $a+11$, 则这个正数的立方根是_____.

【变式6】. 已知 $2a-1$ 的平方根是 ± 3 , $3a+b-1$ 的立方根是 4 , c 是算术平方根等于自身的数, 则 $a+2b-c^2 =$ _____.

【变式7】. 已知 $x^2 = 1$, 求 $\sqrt[3]{x}$ 的值.

解: 因为 $x^2 = 1$, 所以 $x = \pm 1$

当 $x = 1$ 时, $3\sqrt{x} = \sqrt[3]{1} = 1$

当 $x = -1$ 时, $3\sqrt{x} = \sqrt[3]{-1}$ 无意义

所以 $\sqrt[3]{x}$ 的值是 1

(1) 错因:_____.

(2) 纠错:_____.

题型 08 立方根的性质及其应用; 含参问题

【典例1】. 若 $m < 0$, 则 m 的立方根是 ()

- A. $\sqrt[3]{m}$ B. $-\sqrt[3]{m}$ C. $\pm\sqrt[3]{m}$ D. $\sqrt[3]{-m}$

【变式1】. 计算 $(\sqrt[3]{5})^3 =$ _____.

【变式2】. $\sqrt[3]{1-a} = -2$, 则 a 的值是 ()

- A. 8 B. 2 C. 9 D. -8

【变式3】. 下列各数, 立方根一定是负数的是 ()

A . $-a$ B . $-a^2$ C . $-a^2 - 1$ D . $-a^3 - 1$

【变式 4】 . 若 $\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} = 0$, 则 m 与 n 的关系是 () .

A . $m = n = 0$ B . $m = n$ C . $m = -n$ D . $m = \frac{1}{n}$

【变式 5】 . 若 $\sqrt[3]{2a-1}$ 和 $\sqrt[3]{1-3b}$ 互为相反数, 求 $\frac{a}{b}$ 的值 .

【变式 6】 . 若式子 $\sqrt[3]{1-2x}$ 与 $\sqrt[3]{3x-5}$ 互为相反数, 则 $1-\sqrt{x}$ 的值为 ()

A . 1 B . 2 C . -1 D . -2

【变式 7】 . 已知 $\sqrt[3]{2x+1} \cdot 2x - 1 = 0$, 则 $x =$ _____ .

题型 09 立方根、平方根综合求参数问题

【典例 1】 . 已知: x 的平方根是 $a+3$ 与 $2a-15$, 且 $2b-1$ 的算术平方根是 3 .

(1)求 a, b 的值 ;

(2)求 $a+b-1$ 的立方根 .

【变式 1】 . 已知 $5a+2$ 的立方根是 3 , $3a+b-1$ 的算术平方根是 4 , c 是 $\sqrt{13}$ 的整数部分 .

(1)求 a, b, c 的值 ;

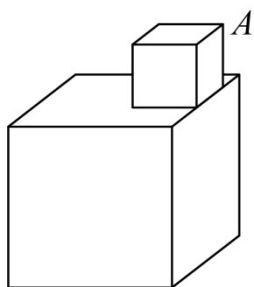
(2)求 $3a-b+c$ 的平方根 .

题型 10 立方根的实际应用

【典例 1】 . 一个正方体的体积扩大为原来的 8 倍, 它的棱长变为原来的多少倍? 扩大为原来的 2^7 倍呢? n 倍呢?

【变式 1】 . 小红做了棱长为 5cm 的一个正方体盒子, 小明说: “我做的盒子的体积比你的大 218cm^3 ” 则小明的盒子的棱长为 _____ cm

【变式 2】 . 将这两个正方体按如图所示的方式叠放在一起. 已知大正方体的体积为 125cm^3 , 小正方体的体积为 8cm^3 , 则小正方体的最高点 A 到大正方体底面的距离为 _____ cm .



题型 11 立方根小数点移动问题

【典例 1】 . 若 $\sqrt[3]{0.3670} = 0.7160$, $\sqrt[3]{3.670} = 1.542$, 则 $\sqrt[3]{367} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sqrt[3]{-0.003670} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【变式 1】 . (1)填表：

a	0.000 001	0.001	1	1 000	1 000 000
$\sqrt[3]{a}$	0.01	0.1	1	10	100

(2)由上表你发现了什么规律？请用语言叙述这个规律：被开方数扩大——；

(3)根据你发现的规律填空：

①已知 $\sqrt[3]{3} = 1.442$, 则 $\sqrt[3]{3000} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sqrt[3]{0.003} = \underline{\hspace{2cm}}$;

②已知 $\sqrt[3]{0.000456} = 0.076\ 97$, 则 $\sqrt[3]{456} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【变式 2】 . (1)已知 $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{27000} = 30$,

$\sqrt[3]{0.027} = 0.3$, 则 $\sqrt[3]{27000000} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2)已知 $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[3]{64000} = 40$,

$\sqrt[3]{0.064} = 0.4$, 则 $\sqrt[3]{0.000064} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3)从以上的结果可以看出：被开方数的小数点向左(或右)移动 3 位，立方根的小数点则向____移动____位；

(4)如果 $\sqrt[3]{x} = a$, 则 $\sqrt[3]{1000x} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sqrt[3]{\frac{x}{1000}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

强化训练

一、单选题

1. 下面说法错误的是 ()

A. 2 是 8 的立方根

B. ± 4 是 64 的立方根

- C. $-\frac{1}{3}$ 是 $-\frac{1}{27}$ 的立方根 D. $(-3)^3$ 的立方根是 -3
2. 若一个数的立方根是 -5 ，则这个数是 ()
- A. $-\sqrt[3]{5}$ B. -125 C. $\pm\sqrt[3]{5}$ D. ± 125
3. 下列计算错误的是 ()
- A. $\sqrt[3]{0.008} = 0.2$ B. $\sqrt[3]{-64} = -4$
- C. $\sqrt[3]{(-8)^2} = -8$ D. $\sqrt[3]{-0.064} = -0.4$
4. 计算 $\sqrt{64} - \sqrt[3]{64}$ 的结果是 ()
- A. 0 B. 16 C. 12 D. 4
5. $\sqrt{64}$ 的立方根是 ()
- A. 2 B. ± 2 C. 8 D. -8
6. 如果 $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{b}$ ，那么 a 与 b 的关系是 ()
- A. $a = b$ B. $a = -b$ C. $a = \pm b$ D. 不能确定
7. 若有个大的正方体木块，现把这个木块分割成 n 个大小相同的小正方体木块，则 n 的值可以是 ()
- A. 26 B. 27 C. 28 D. 29
8. 已知 a 的算术平方根是 12.3 ， b 的立方根是 -45.6 ， x 的平方根是 ± 1.23 ， y 的立方根是 456 ，则 x 和 y 分别是 ()
- A. $x = \frac{a}{100}$ ， $y = 1000b$ B. $x = 100a$ ， $y = -\frac{a}{1000}$
- C. $x = \frac{a}{100}$ ， $y = -\frac{a}{1000}$ D. $x = \frac{a}{100}$ ， $y = -1000b$

二、填空题

9. -1 的立方根是_____.
10. 若 $\sqrt[3]{a} = -4$ ，则 $a =$ _____.
11. 若 $x-1$ 是 125 的立方根，则 $x-7$ 的立方根是_____.

12. 若一个实数的平方根与立方根是相等的，则这个实数一定是_____.
13. 有一个正方体集装箱，容积为 64m^3 ，现准备将其改造扩充，以便放置更多的货物，其棱长增加_____m，才能使容积达到 512m^3 .
14. 已知按照一定规律排成的一列实数： -1 ， $\sqrt{2}$ ， $\sqrt[3]{3}$ ， -2 ， $\sqrt{5}$ ， $\sqrt[3]{6}$ ， $-\sqrt{7}$ ， $\sqrt{8}$ ， $\sqrt[3]{9}$ ， $-\sqrt{10}$ ，...，则按此规律可推得这一列数中的第2023个数是_____.

三、解答题

15. 求下列各式的值.

(1) $\pm\sqrt[3]{\frac{8}{343}}$

(2) $-\sqrt[3]{-0.027}$

(3) $-\sqrt[3]{5-\frac{10}{27}}$

16. 求下列各数的立方根：

(1) -512 ；

(2) 0.008 ；

(3) $-\frac{27}{64}$ ；

(4) 10^6 .

17. 求下列各式中 x 的值：

(1) $x^3 = 0.008$ ；

(2) $x^3 - 3 = \frac{3}{8}$ ；

(3) $(x-1)^3 = 64$.

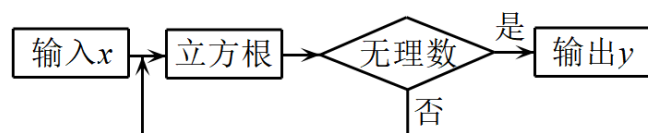
18. 已知 $2a+1$ 的平方根是 ± 3 ， $1-b$ 的立方根为 -1 .

(1) 求 a 与 b 的值；

(2) 求 $3a+2b$ 的算术平方根.

19. 一个长方体容器长 20 cm，宽 15 cm，在这个容器内放一立方体铁块，盛满水取出铁块后，水面下降了 5 cm，求这个立方体铁块的棱长。（精确到 0.01 cm）

20. 如图，小明设计了一种程序图，根据程序图解决下列问题。



(1) 当 $x = 64$ 时，输出的 y 的值为_____。

(2) 当输出的 y 的值为 $\sqrt[3]{2}$ 时，输入的 x 的值可以是_____。（填写两个不同的 x 的值）

(3) 小明输入 x 的值后，发现得不到 y 的值，你能解释其中的原因吗？

21. 观察求算术平方根的规律，并利用这个规律解决下列问题：

$$\sqrt{0.0001} = 0.01, \sqrt{0.01} = 0.1, \sqrt{1} = 1, \sqrt{100} = 10, \sqrt{10000} = 100, \dots$$

(1) 归纳：已知数 a 的小数点的移动与它的算术平方根 $\sqrt{a}$ 的小数点移动间有何规律？

(2) ① 已知 $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{20} \approx 4.47$ ，则 $\sqrt{0.2} =$ _____；

② 已知 $\sqrt{3.68} \approx 1.918, \sqrt{a} \approx 191.8$ ，则 $a =$ _____；

(3) 根据上述探究方法，尝试解决问题：已知 $\sqrt[3]{n} \approx 20.23, \sqrt[3]{m} \approx 2023$ ，用含 n 的代数式表示 m 。