

专题 02 反比例函数与一次函数的综合

题型归纳

题型一： 反比例函数与一次函数的图象性质

题型二： 反比例函数与一次函数图象交点问题

题型三： 反比例函数与一次函数的增减性

题型四： 反比例函数与一次函数的面积问题

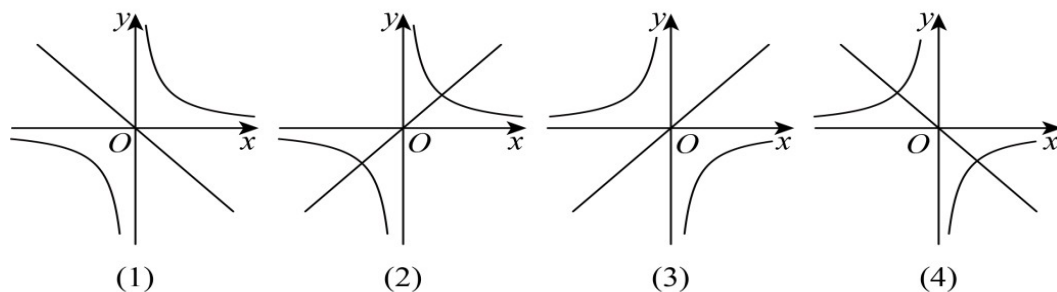
题型五： 反比例函数与一次函数的实际应用问题

题型六： 反比例函数与一次函数的几何综合问题

题型专练

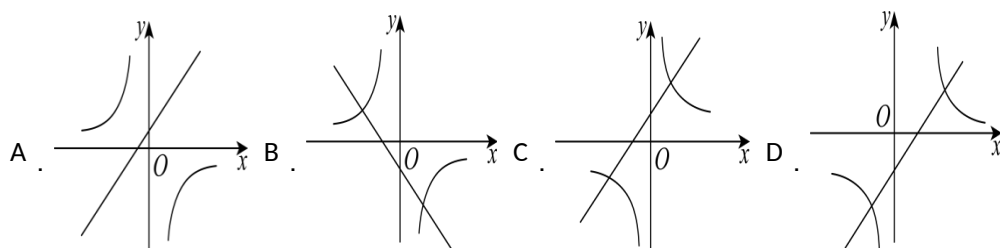
题型 01 反比例函数与一次函数图象性质

1. 函数 $y = kx$ 与 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在同一坐标平面内的大致图象是 ()

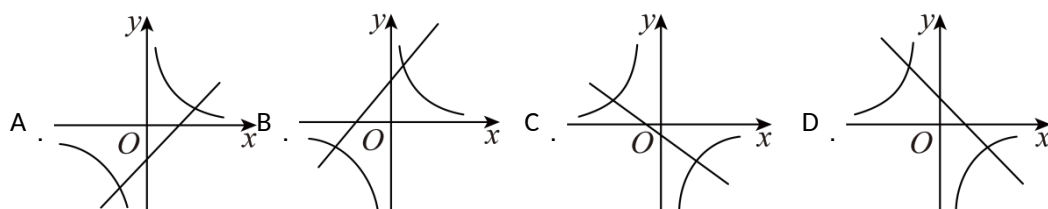


- A. (1) 和 (2) B. (1) 和 (3) C. (2) 和 (3) D. (2) 和 (4)

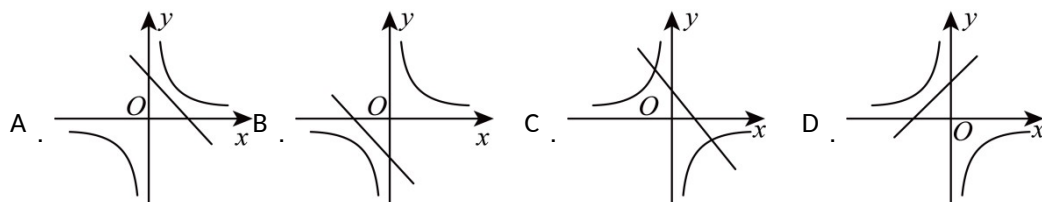
2. 函数 $y = \frac{k}{x}$ 和 $y = k(x-1) (k > 0)$ 在同一直角坐标系中的大致图像是 ()



3. 在同一平面直角坐标系中，当 $k > 0$ 时，一次函数 $y = kx - 3$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象大致是 ()

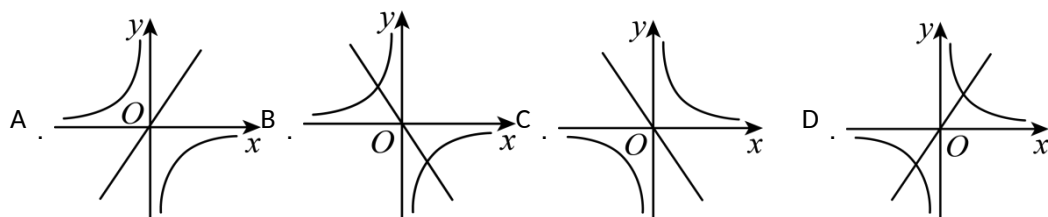


4. 在同一平面直角坐标系中，若 $ab < 0$ ，则函数 $y = ax + b$ 与 $y = \frac{b}{x}$ 的大致图象是 ()

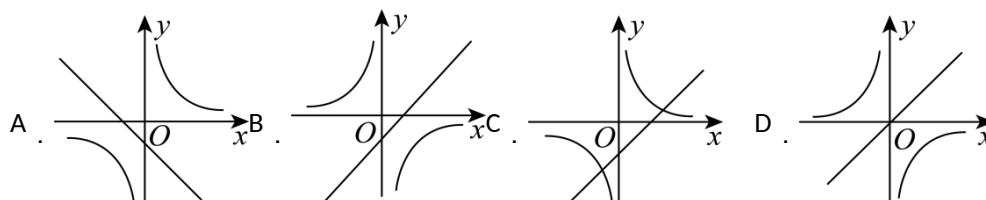


5. 已知函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中，在每个象限内， y 随 x 的增大而减小，那么它和函数 $y = kx (k \neq 0)$ 在同一直

角坐标平面内的大致图象是 ()



6. 已知关于 x 的函数 $y = k(x-1)$ 和 $y = -\frac{k}{x} (k \neq 0)$ ，它们在同一平面直角坐标系中的大致图象是下列图中的 ()



题型 02 反比例函数与一次函数图象交点问题

1. 如果函数 $y = (k+1)x$ 与 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图像有公共点，那么下列 k 的值中，满足条件的是 ()
- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
2. 反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象与正比例函数 $y = kx$ 的图象的一个交点为 $(3, 2)$ ，则另一个交点是 ()
- A. $(-3, -2)$ B. $(-2, -3)$ C. $(-3, 2)$ D. $(2, 3)$
3. 正比例函数 $y = 2x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象有一个交点的纵坐标是 2，则 $k =$ _____.
4. 直线 $y = -x + b$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 交于 A, B 两点，已知点 A 坐标 $(2, 3)$ ，则点 B 坐标为 _____.
5. 正比例函数 $y = 2x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数且 $k \neq 0$) 的图象交于点 $A(1, a)$ ，求此反比例函数的表达式.

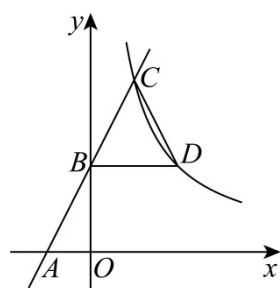
6. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象与一次函数 $y = 2x - 1$ 的图象交于点 $A(1, m)$.

(1) 求 k 与 m 的值；

(2) 求反比例函数图象与一次函数图象的另一个交点 B 的坐标 .

7. 如图，一次函数 $y = 2x + 4$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B 两点，与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0, x > 0)$ 的

图象交于点 C ，过点 B 作 x 轴的平行线与该反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交于点 D ，连接 CD .

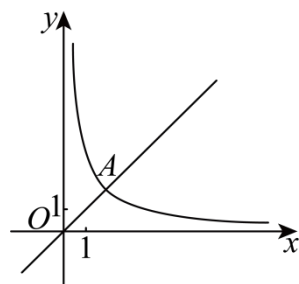


(1) 求 A 、 B 两点的坐标；

(2) 如果 $BC = DC$ ，求 k 的值 .

8. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = kx (k \neq 0)$ 与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 在第一象限内的图象交于点

$A(2, a)$ ，点 $B(b, 8)$ 在直线 OA 上 .



(1) 求点 A 、 B 的坐标；

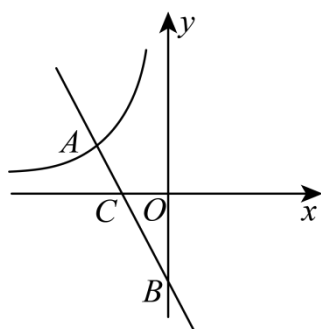
(2) 点 C 在反比例函数 $y = \frac{4}{x} (x > 2)$ 的图像上，如果 $\angle ABC = 45^\circ$ ，将直线 OA 平移，使其经过点 C ，求平移

后所得直线的表达式。

题型 03 反比例函数与一次函数的增减性

1. 如图，直线 $y = kx - 3 (k \neq 0)$ 与坐标轴分别交于点 B ， C ，与双曲线 $y = -\frac{2}{x} (x < 0)$ 交于点 $A(m, 1)$ ，根据

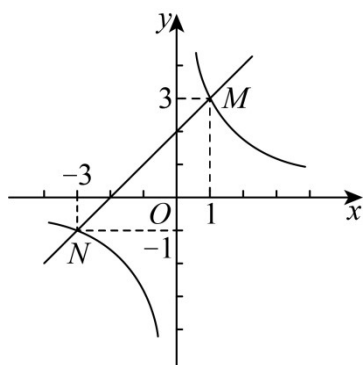
图像求出不等式 $kx - 3 < -\frac{2}{x}$ 的解集 ()



- A. $x < -2$ B. $x < 0$ C. $-1.5 < x < 0$ D. $-2 < x < 0$

2. 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = x + 2$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象分别交于 M ， N 两点。

根据图象信息，可得关于 x 的不等式 $x + 2 < \frac{k}{x}$ 的解集为 ()



A. $x > 1$

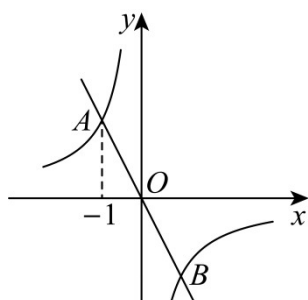
B. $-3 \leq x < 0$ 或 $x > 1$

C. $x \leq -3$

D. $x \leq -3$ 或 $-3 \leq x \leq 0$

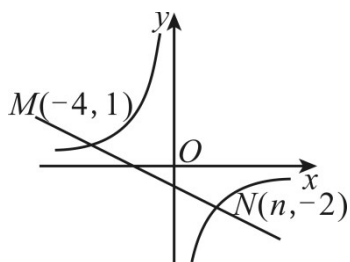
3. 正比例函数 $y_1 = k_1 x (k_1 < 0)$ 的图象与反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x} (k_2 < 0)$ 的图象交于 A 、 B 两点，点 A 的横坐标为

-1. 当 $y_1 < y_2$ 时， x 的取值范围是_____.



4. 如图，一次函数 $y = ax + b$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交于 M 、 N 两点，观察图象知，不等式

$ax + b < \frac{k}{x}$ 的解集为_____.

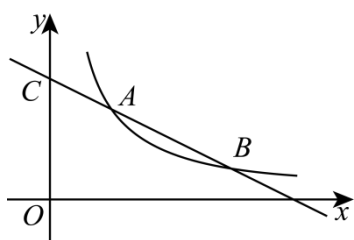


5. 反比例函数 $y_1 = \frac{k_1}{x}$ 的图像与一次函数 $y_2 = k_2x + b$ 的图像交于点 $A(2, 4)$ 和点 $B(m, -5)$ ，当 $y_1 > y_2$ 时，请

写出自变量 x 的取值范围_____。

6. 如图，一次函数 $y = ax + b (a \neq 0)$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图象交于 $A(2, m)$ ， $B(6, n)$ 两点，与

y 轴交于点 $C(0, 4)$ 。

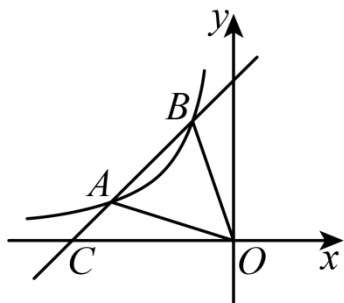


(1) 求 m 与 n 之间的关系式；

(2) 求一次函数与反比例函数的表达式；

(3) 根据图象直接写出不等式 $kx + b < \frac{m}{x}$ 的解集。

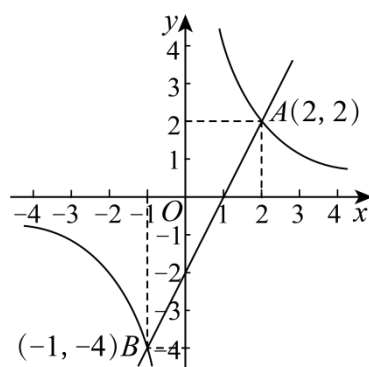
7. 如图，直线 $y = kx + b$ 与双曲线 $y = \frac{m}{x} (x < 0)$ 相交于 $A(-3, 1)$ ， B 两点，与 x 轴相交于点 $C(-4, 0)$ 。



(1) 分别求一次函数与反比例函数的表达式；

(2) 直接写出当 $x < 0$ 时，关于 x 的不等式 $kx + b > \frac{m}{x}$ 的解集。

8. 如图，一次函数 $y = kx + b$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图像相交于 $A(2, 2)$ 、 $B(-1, -4)$ 两点。



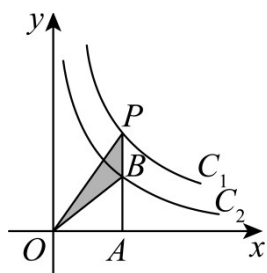
(1) 求出两函数解析式；

(2) 根据图像回答：当 x 为何值时，一次函数的函数值大于反比例函数的函数值？

题型 04 反比例函数与一次函数的面积问题

1. 如图，两个反比例函数 $y_1 = \frac{4}{x}$ 和 $y_2 = \frac{2}{x}$ 在第一象限内的图象分别是 C_1 和 C_2 ，设点 P 在 C_1 上， $PA \perp x$ 轴

于点 A ，交 C_2 于点 B ，则 V_{POB} 的面积为 ()



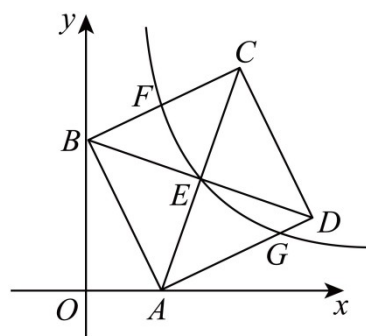
A . 4

B . 2

C . 1

D . 无法计算

2. 如图，在平面直角坐标系中，正方形 $ABCD$ 的顶点 A 、 B 分别在 x 轴、 y 轴正半轴上，顶点 C 、 D 位于第一象限，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象经过正方形 $ABCD$ 的对角线的交点 E 。若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{9}{4}$ ，正方形边长为 3 ，则 k 的值为 ()



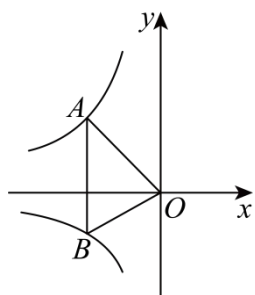
A . 2

B . $\frac{5}{2}$

C . 3

D . $\frac{9}{2}$

3. 如图，过反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象上一点 A 作 x 轴的垂线交反比例函数 $y = \frac{2}{x} (x < 0)$ 的图象于点 B ，连接 OA 、 OB ，若 $\triangle AOB$ 的面积为 3 ，则 k 的值为 ()



A . 3

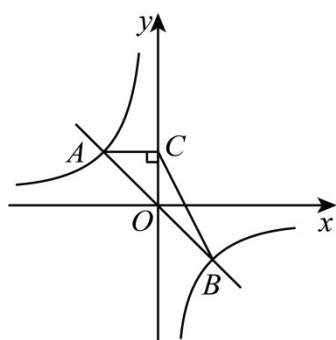
B . -3

C . 4

D . -4

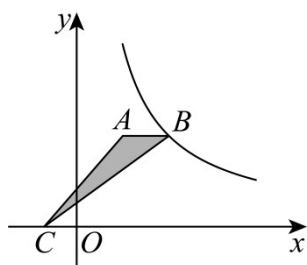
4. 如图，正比例函数 $y = -x$ 与反比例函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象相交于 A 、 B 两点， $AC \perp y$ 轴于点 C ，连接 BC ，

则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



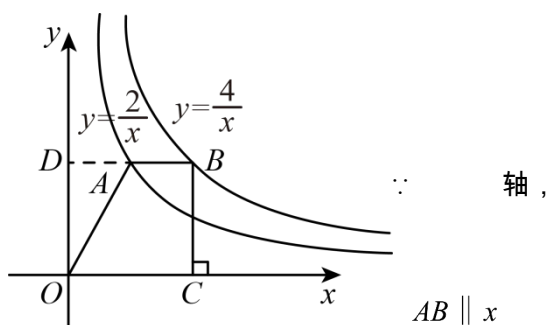
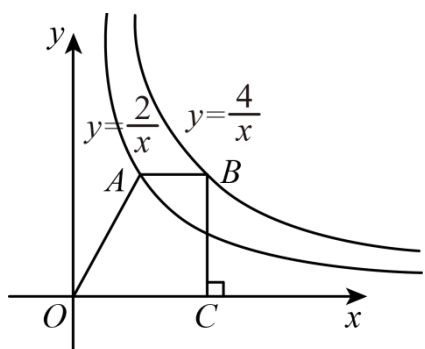
5. 如图， $\triangle ABC$ 中，点 C 在 x 轴上， $A(1,2)$ ， $AB \parallel x$ 轴， $S_{\triangle ABC} = 1$ ，若反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象经过

点 B ，则 k 的值为_____.



6. 如图，点 A 在函数 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 的图象上，点 B 在函数 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象上，且 $AB \parallel x$ 轴， $BC \perp x$ 轴

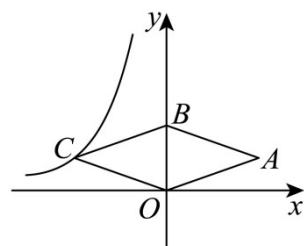
于点 C ，则四边形 $ABCO$ 的面积为_____



$\therefore DA \perp y$ 轴，

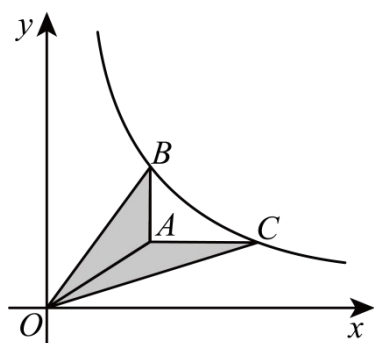
7. 如图，在平面直角坐标系中，菱形 $OABC$ 的顶点 O 是坐标原点，点 B 在 y 轴上，点 C 在反比例函数

$y = \frac{k}{x} (k \neq 0, x < 0)$ 的图象上．若菱形 $OABC$ 的面积是 8，则这个反比例函数的表达式是_____．



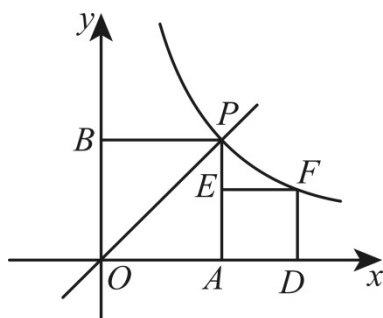
8. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 $A(3, 2)$ ，过点 A 作坐标轴的平行线分别交反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的

图像于 B ， C 两点，连接 OA ， OB ， OC ．若阴影部分的面积为 8，则 k 的值为_____．



9. 如图，正方形 $OAPB$ 、 $ADFE$ 的顶点 A 、 D 、 B 在坐标轴上，点 E 在 AP 上，点 P 、 F 在函数 $y = \frac{k}{x}$ 的

图像上，已知正方形 $OAPB$ 的面积为 9 .

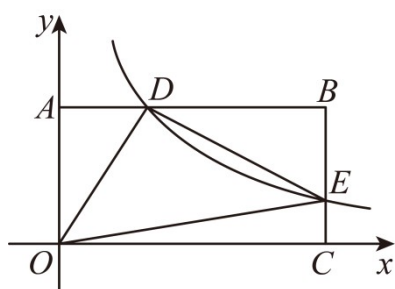


(1) 求 k 的值和直线 OP 的解析式；

(2) 求正方形 $ADFE$ 的边长 .

10. 如图，矩形 $OABC$ 的面积为 18，其顶点 A 、 C 分别在 y 轴和 x 轴的正半轴上 . 反比例函数的图像与 AB 、

BC 分别交于点 D 、 E ， $AO = 2AD$. 连结 OD 、 OE 、 DE .



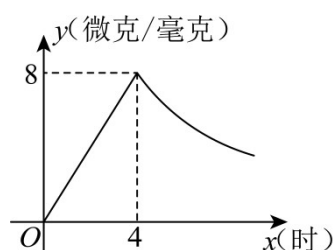
(1) 若 $\triangle OCE$ 的面积为 3，求： $\triangle ODE$ 的面积；

(2) 若 $\angle DOE = 45^\circ$ ，求反比例函数解析式．

题型 05 反比例函数与一次函数的实际应用问题

1. 某药品研究所开发一种抗菌新药，临床实验中测得成人服药后血液中药物浓度 y （微克/毫升）与服药时间 x （小时）之间的函数关系图象由一条线段和一段曲线组成，如图（当 $x \geq 4$ 时， y 与 x 成反比例）．则

血液中药物浓度不低于 4 微克/毫升的持续时间为（ ）

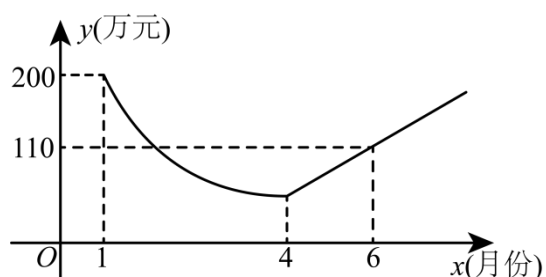


- A. 4 小时 B. 6 小时 C. 8 小时 D. 10 小时

2. 为了响应“绿水青山就是金山银山”的号召，建设生态文明，德州市某工厂自 2020 年 1 月开始限产并进行

治污改造，其月利润 y （万元）与月份 x 之间的变化如图所示，治污完成前是反比例函数图像的一部分，治

污完成后是一次函数图像的部分，下列选项错误的是（ ）



- A. 4 月份的利润为 50 万元

B．治污改造完成后每月利润比前一个月增加³⁰万元

C．9月份该厂利润达到200万元

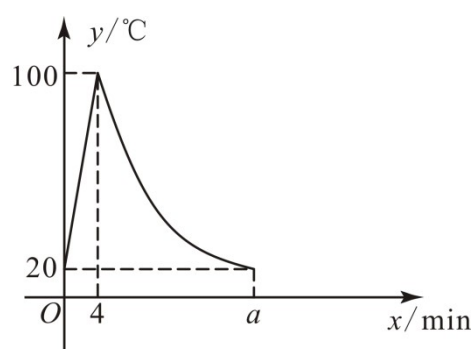
D．治污改造完成前后共有4个月的利润低于100万元

3．智能饮水机接通电源后开始自动加热，水温每分钟上升 20°C ，加热到 100°C 时，饮水机自动停止加热，

水温开始下降，在水温开始下降的过程中，水温 $y(^{\circ}\text{C})$ 与通电时间 $x(\text{min})$ 成反比例关系．当水温降至室温

时，饮水机再次自动加热，重复上述过程．设某天水温和室温均为 20°C ，接通电源后，水温 $y(^{\circ}\text{C})$ 与通电

时间 $x(\text{min})$ 之间的关系如图所示．



(1)求当 $4 < x < a$ 时， y 与 x 之间的函数表达式；

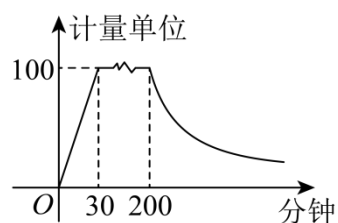
(2)加热一次，水温不低于 40°C 的时间有多长？

4．下图是通过实验测得的一种抗过敏药物服用后，随时间的变化其有效成分含量在人体血液中的变化情

况，在最初30分钟含量会直线上升，然后在30分钟至200分钟间稳定在饱和状态，人体血液中含量恒为

100个计量单位，之后就会逐步下降，下降过程中人体血液中有有效成分含量 y 个计量单位与时间 x 分钟之间

大致符合函数 $y = \frac{k \times 10^6}{x^2}$ ($1 \leq k < 10$, k 为常数) .



(1) 求 k 的值；

(2) 如果这种抗过敏药物在人体血液中的含量低于 40 个计量单位时，就会失去抗过敏的效果，那么这种抗

过敏药物隔多少时间需服用一次（结果精确到 1 小时）。（参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{5} \approx 2.236$,

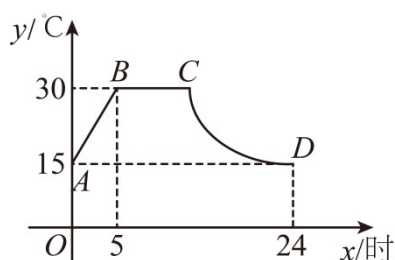
$\sqrt{10} \approx 3.163$)

5. 生物实践小组搜集了某种植园温室大棚智能控制系统测试阶段 $0 \sim 24$ 时的温度变化，并绘制出大棚内的

温度 $y(^{\circ}\text{C})$ 随时间 x (时) 变化的图象，如图所示，点 A 表示智能控制系统在 0 时启动，此时大棚内的温度

为 15°C ，线段 AB 表示升温阶段，线段 BC 表示恒温阶段，双曲线的一部分 CD 表示恒温系统关闭阶段，点

D 表示 24 时温度降到 15°C .

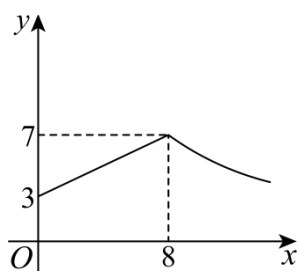


(1) 线段 AB 的函数解析式和定义域为——；

(2) 双曲线 CD 段的函数解析式和定义域为——；

(3) 求该大棚在 $0 \sim 24$ 时内，温度不低于 24°C 的时长是——；

(4) 此地日出时间为 $7:00$ ，日落时间为 $17:00$ ，为保证该大棚中的植物至少有 9 小时的光照且在此期间大棚温度不低于 24°C ，小组同学决定推迟智能控制系统的启动时间，至少推迟——小时，能满足上述要求。



(1) 根据图中信息，分别求出两段图像所对应的函数的解析式，并写出各自的定义域；

(2) 若有另一辆同款电动车，与原电动车同时以同样的起始速度启动加速，但在 30 个单位时间内都不停止加速，那么两车的速度差能否达到 10 个单位速度的差距？若可能，问经过多少个单位时间达到此速度差；

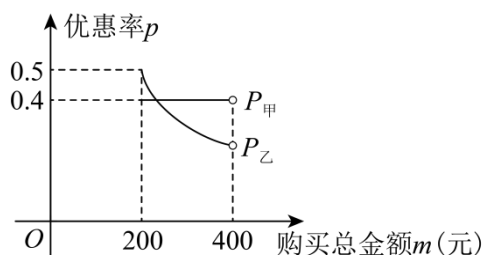
若不可能，请说明理由。

7. 双十一促销活动开始，甲乙两家商场采用了不同的促销方案。如果用优惠率 $p = \frac{k}{m}$ (其中 k 代表优惠金

额， m 代表顾客购买商品的总金额) 衡量消费者受益程度，则甲乙两商场的优惠率 $P_{\text{甲}}$ 、 $P_{\text{乙}}$ 与顾客购买总金

额 m (元) 之间的函数关系分别如图所示，其中 $P_{\text{乙}}$ 与 m 成反比例函数关系，且总金额 m (元) 的取值范围

满足 $200 \leq m < 400$ 。



(1) $k_Z =$ _____；用含 m 的代数式表示 $k_{甲}$ ：_____。

(2) 当购买总金额 m (元) 在 $200 \leq m < 400$ 的条件下时，指出甲、乙两家商场正在采取的促销方案分别是什么？

甲：_____；乙：_____

(3) 完全相同的商品，在甲、乙两家商场的标价都是 m 元 ($200 \leq m \leq 400$)，选择哪家商场购买该商品花钱少？请说明理由。

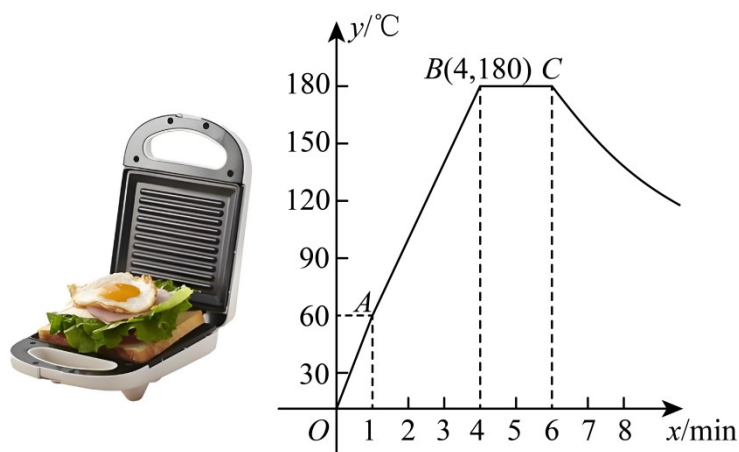
8. 某款三明治机制作三明治的工作原理如下：

① 预热阶段：开机 1 分钟空烧预热至 60°C ，机器温度 y 与时间 x 成正比例函数关系；

② 操作阶段：操作 3 分钟后机器温度均衡升至最高温度 180°C 后保持恒温状态，机器温度 y 与时间 x 成一次函数关系；

③ 断电阶段：操作完成后进行断电降温，机器温度 y 与时间 x 成反比例关系。如图所示为某次制作三明治

时机器温度 y ($^{\circ}\text{C}$) 与时间 x (min) 的函数图象，请结合图象回答下列问题：



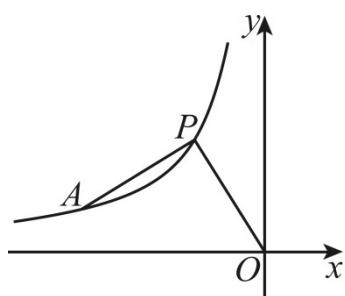
(1) 当 $1 \leq x \leq 4$ 时，求机器温度 y 与时间 x 的函数关系式；

(2) 求三明治机工作温度在 100°C 及其以上持续的时间。

题型 06 反比例函数与一次函数的几何综合问题

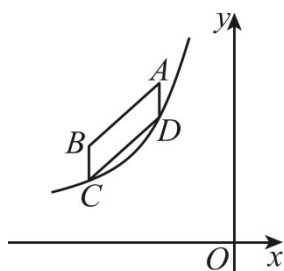
1. 如图，点 $P(a, 2)$ 和点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象上，连接 OP, AP 。若 $OP = AP$ ，且

$\angle OPA = 90^\circ$ ，则 k 的值为_____。

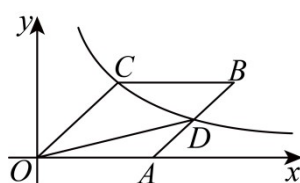


2. 如图，在平面直角坐标系中，坐标原点 $O(0, 0)$, $A\left(-2, \frac{13}{3}\right)$, $B\left(-4, \frac{8}{3}\right)$ ，分别过点 A, B 作 y 轴的平行线交

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象于点 D, C 。当四边形 $ABCD$ 为平行四边形时， k 的值为_____。



3. 如图，四边形 $OABC$ 是菱形， $\angle AOC = 45^\circ$ ，点 $B(m, 2\sqrt{2})$ ，双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 经过点 C ，与边 AB 交于点 D 。



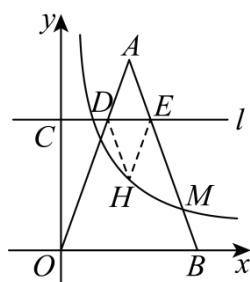
(1) 求双曲线的解析式；

(2) 连接 OD ，求 $\triangle AOD$ 的面积。

4. 如图，在 $\triangle AOB$ 中， $AO = AB$ ，且点 A 的坐标为 $(1, 3)$ ，过点 $C(0, 2)$ 的直线 $l \parallel x$ 轴，分别交 AO 、 AB 于

D 、 E 两点。反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0, x > 0)$ 的图象与线段 AB 相交于点 M ，将点 $\triangle ADE$ 沿直线 l 对折后，点

A 的对应点 H 恰好落在该反比例函数的图象上。

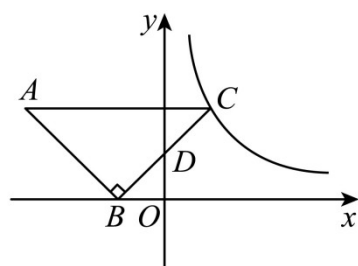


(1) 求这个反比例函数的表达式；

(2) 求点 M 的坐标。（结果保留根号）

5. 如图，等腰直角 $\triangle ABC$ 的直角顶点 B 的坐标为 $(-2,0)$ ， AC 平行于 x 轴，点 C 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$

的图象上，若 BC 交 y 轴于点 D ， $BD = CD$ 。

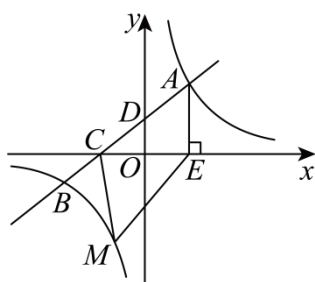


(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 将 $\triangle ABC$ 沿 x 轴正方向平移，使 AB 边与反比例函数的图象正好只有一个交点时，设平移距离为 m ，请直接写出 m 的值。

6. 如图，一次函数 $y = \frac{2}{3}x + 2$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象相交于 A ， B 两点，且与两坐标轴

分别相交于 C ， D 两点，过点 A 作 $AE \perp x$ 轴，垂足为点 E ， OD 是 $\triangle ACE$ 的中位线。

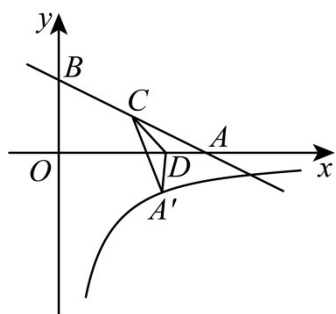


(1) 求反比例函数的表达式；

(2) 若点 M 是反比例函数图象上的一点，且点 M 的横坐标为 -2 ，求四边形 $CMEA$ 的面积。

7. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = kx + b$ 与 x 轴的交点为 $A(4, 0)$ ，与 y 轴的交点为 $B(0, 2)$ ， C

是线段 AB 上一点，点 D 在线段 OA 上，将 $\triangle ACD$ 沿 CD 翻折，得到 $\triangle A'CD$ 。

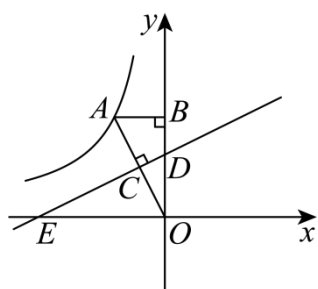


(1) 求一次函数 $y = kx + b$ 的表达式；

(2) 若点 A' 在反比例函数 $y = -\frac{3}{x} (x > 0)$ 图象上，且 $A'D \perp OA$ ， $AD = m (0 < m < 2)$ ，求 m 的值及点 C 的坐标。

8. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中，点 B 在 y 轴上， $\angle ABO = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ，反比例函数 $y = -\frac{4\sqrt{3}}{x}$ 的图象经过点 A ，

直线 CD 垂直平分 AO ，交 AO 于点 C ，交 y 轴于点 D ，交 x 轴于点 E 。



(1) 求点 A 的坐标及 OC 的长。

(2) 求点 E 的坐标。