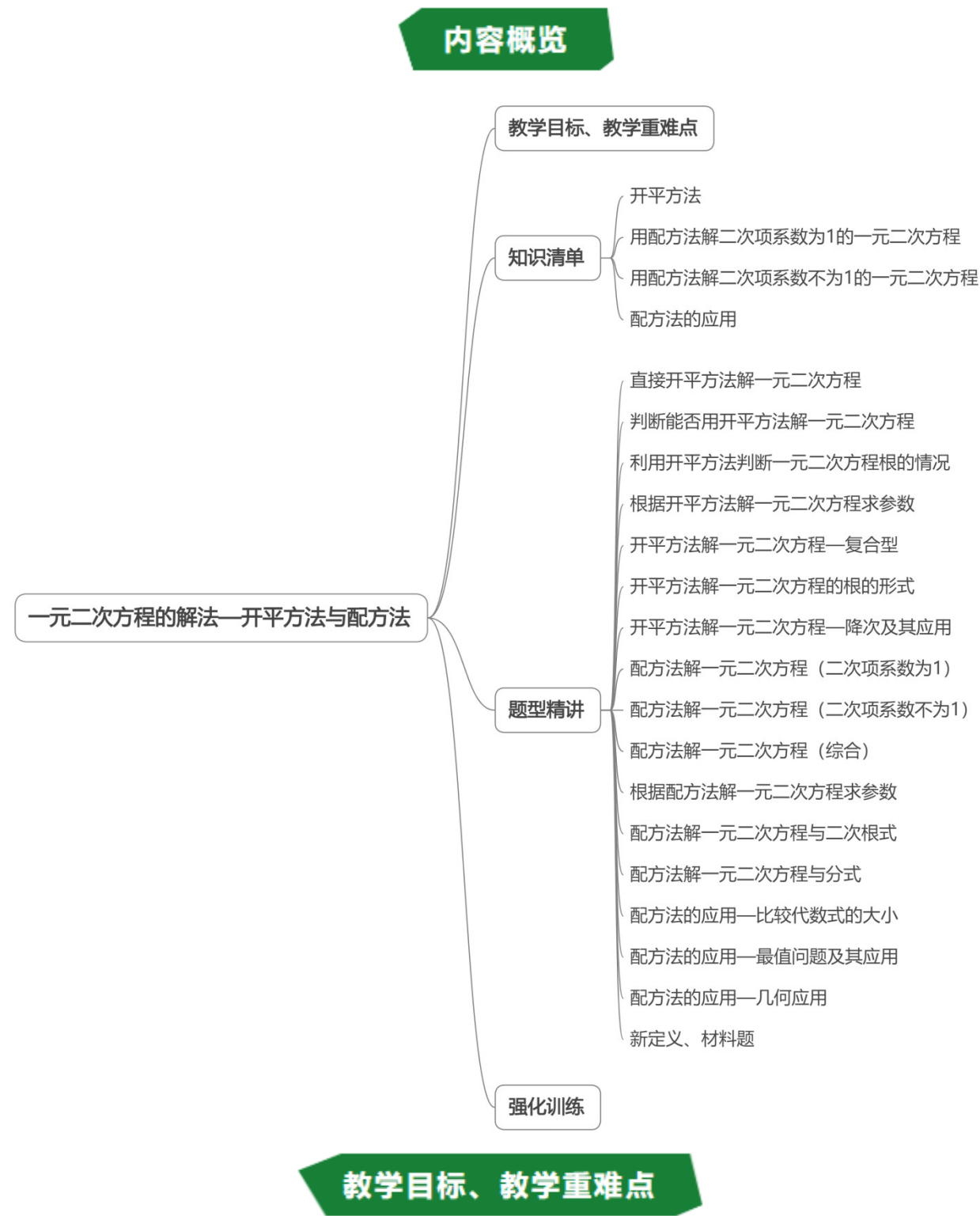


专题 21.2 一元二次方程的解法—开平方法与配方法



教学目标	1. 学会用开平方的方法来解一元二次方程； 2. 知道用开平方的方法来解一元二次方程的条件；
------	---

	3. 学会用配方法解二次项系数为 1 的一元二次方程； 4. 掌握用配方法解二次项系数不为 1 的一元二次方程； 5. 了解配方法及其应用。
教学重难点	1.重点 (1) 开平方法解一元二次方程； (2) 配方法解一元二次方程； (3) 配方法的应用。 2.难点 (1) 根据开平方法、配方法解一元二次方程求参数值； (2) 一元二次方程与分式、二次根式综合； (3) 配方法的应用。

知识清单

知识点 1 开平方法

1.解方程： $x^2-2500=0$.

问：怎样将这个方程“降次”为一元一次方程？

把方程写成 $x^2=2500$

这表明 x 是 2500 的平方根，根据平方根的意义，得

$$x=\sqrt{2500} \text{ 或 } x=-\sqrt{2500}$$

因此，原方程的解为 $x_1=50$ ， $x_2=-50$

要点：一元二次方程的解也是一元二次方程的根.

2.解方程 $(2x+1)^2=2$

解：根据平方根的有意义，得

$$x+1=\sqrt{2} \text{ 或 } 2x+1=-\sqrt{2}$$

因此，原方程的根为

$$x_1=\frac{\sqrt{2}-1}{2}, x_2=-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

3.通过上面的两个例题，你知道什么时候用开平方的方法来解一元二次方程呢？

要点：对于形如 $(x+n)^2=d(d\geq 0)$ 的方程，可直接用开平方法解.

(直接)开平方法的步骤是：把方程变形成 $(x+n)^2=d(d\geq 0)$ ，然后(直接)开平方得 $x+n=\sqrt{d}$ 和 $x+n=-\sqrt{d}$ ，分别解这两个一元一次方程，得到的解就是原一元二次方程的解.

【即学即练】

1.用直接开平方法解下列方程：

(1) $4x^2 - 16 = 0$.

(2) $0.6y^2 + 3 = 12$.

2.方程 $2x^2 = 1$ 的解是 ()

A. $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$

B. $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$

D. $x = \sqrt{2}$

3.方程 $\frac{1}{5}(x-1)^2 = 5$ 的根是_____.

4.用直接开平方法解下列方程：

(1) $(x+3)^2 - 2 = 0$.

(2) $(x+1)^2 = (1-2x)^2$.

5.若一元二次方程 $a(x-b)^2 = 7$ 的两根为 $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ ，则 $a+b$ 等于_____.

知识点2 用配方法解二次项系数为1的一元二次方程

1.填上适当的数，使下列等式成立.

(1) $x^2 + 6x + \underline{\hspace{2cm}} = (x + \underline{\hspace{2cm}})^2$;

(2) $x^2 - 6x + \underline{\hspace{2cm}} = (x - \underline{\hspace{2cm}})^2$;

(3) $x^2 + 6x + 4 = x^2 + 6x + \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}} + 4 = (x + \underline{\hspace{2cm}})^2 - \underline{\hspace{2cm}}$.

要点：当二次项系数为1时，配方的关键就是加上一次项系数一半的平方，再减去这个数，使含未知数的项在一个完全方式里.

2. 解方程 $x^2+4x=12$

我们已知，如果把方程 $x^2+4x=12$ 写成 $(x+n)^2=d$ 的形式，那么就可以根据平方根的意义来求解。那么，如何将左边写成 $(x+n)^2$ 的形式呢？

我们学过完全平方式，你能否将左边 x^2+4x 添上一项使它成为一个完全平方式？请相互交流。

写出解题过程。

要点：一般地，像上面这样，在方程 $x^2+4x=12$ 的左边加上一项使它成为一个完全平方式，再减去这个数，使得含未知数的项在一个完全平方式里，这种做法叫作配方。配方、整理后就可以直接根据平方根的意义来求解了。这种解一元二次方程的方法叫作**配方法**。

3. 用配方法解方程： $x^2+2x-1=0$ 。

解：移项，得 $x^2+2x=1$ 。

配方，得 $x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2=1+\left(\frac{2}{2}\right)^2$ ，

即 $(x+1)^2=2$ 。

开平方，得 $x+1=\pm\sqrt{2}$ 。

解得 $x_1=\sqrt{2}-1$ ， $x_2=-\sqrt{2}-1$ 。

要点：用配方法解一元二次方程时，应按照步骤严格进行，以免出错。配方添加时，记住方程左右两边同时加上一项系数一半的平方。

【即学即练】

1. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+4x=5$.

(2) $x^2-6x-3=0$.

2. 用适当的方法解下列方程：

(1) $x^2-6x-18=0$.

(2) $x(x-4)-4+x=0$.

3. 已知方程 $x^2-10x+n=0$ 可以配方成 $(x-m)^2=15$ 的形式，那么 $x^2-10x+m=n$ 可以配方成 ()

A . $(x-5)^2 = 20$ B . $(x-5)^2 = 30$ C . $(x-5)^2 = 15$ D . $(x-5)^2 = 40$

4 . 若一元二次方程 $x^2 + ax + b = 0$ 配方后为 $(x-1)^2 = 2$, 则 $ab =$ _____ .

知识点3 用配方法解二次项系数不为1的一元二次方程

1. 如何用配方法解方程 $25x^2 + 50x - 11 = 0$ 呢？

如果二次项系数为1，那就好办了！那么怎样将二次项的系数化为1呢？同伴之间可以相互交流.

试着写出解题过程.

2. 通过上面配方法解一元二次方程的过程，你能总结用配方法解一元二次方程的步骤吗？

要点：用配方法解一元二次方程的步骤：

- (1) 把方程化为一般形式 $ax^2 + bx + c = 0$ ；
- (2) 把方程的常数项通过移项移到方程的右边；
- (3) 若方程的二次项系数不为1时，方程两边同时除以二次项系数a；
- (4) 方程两边同时加上一项系数一半的平方；
- (5) 此时方程的左边是一个完全平方式，然后利用平方根的定义把一元二次方程化为两个一元一次方程来解 .

要点：通过这一过程，学生发现能用直接开平方法求解的方程都可以转化成一般形式，一般形式的方程也能用配方法转化为可以直接开平方的形式，所以总结出解一元二次方程的基本思路是将一元二次方程转化为 $(x+n)^2 = d (d \geq 0)$ 的形式.

【即学即练】

1 . 用配方法解下列方程：

(1) $4x^2 - 8x = -3$.

(2) $\frac{1}{2}x^2 - 6x - 7 = 0$.

2 . 用配方法解一元二次方程方程： $-3x^2 + 4x + 1 = 0$.

3 . 方程 $2y^2 = 8y + 3$ 的根是 ()

A . $y_1 = \frac{4 + \sqrt{22}}{2}, y_2 = \frac{4 - \sqrt{22}}{2}$

B . $y_1 = \frac{-4 + \sqrt{22}}{2}, y_2 = \frac{-4 - \sqrt{22}}{2}$

$$C. y_1 = \frac{4+\sqrt{10}}{2}, y_2 = \frac{4-\sqrt{10}}{2}$$

$$D. y_1 = \frac{-4+\sqrt{10}}{2}, y_2 = \frac{-4-\sqrt{10}}{2}$$

4. 用配方法解一元二次方程 $2x^2 - 4x - 6 = 0$ 时，配方后的方程是 ()

$$A. (2x-1)^2 = 8 \quad B. (x-1)^2 = 4 \quad C. (x-1)^2 = 8 \quad D. 2(x-1)^2 = 4$$

知识点 4 配方法的应用

1. 用于比较大小：

在比较大小中的应用，通过作差法最后拆项或添项、配成完全平方，使此差大于零（或小于零）而比较出大小。

2. 用于求待定字母的值：

配方法在求值中的应用，将原等式右边变为 0，左边配成完全平方式后，再运用非负数的性质求出待定字母的取值。

3. 用于求最值：

“配方法”在求最大（小）值时的应用，将原式化成一个完全平方式后可求出最值。

4. 用于证明：

“配方法”在代数证明中有着广泛的应用，我们学习二次函数后还会知道“配方法”在二次函数中也有着广泛的应用。

特别说明：

“配方法”在初中数学中占有非常重要的地位，是恒等变形的重要手段，是研究相等关系，讨论不等关系的常用技巧，是挖掘题目当中隐含条件的有力工具，同时对后期学习二次函数有着重要的作用，同学们一定要把它学好。

【即学即练】

1. 用配方法证明：不论 x 为何值，代数式 $2x^2 + 8x + 9$ 的值恒大于零。

2. (1) 求式子 $a^2 + 4a + 6$ 的最小值；

(2) 求式子 $-x^2 + 2x + 3$ 的最大值。

3. 若 $M = x^2 - 8x + 11$ ， $N = 2x^2 - 12x + 15$ ，则 M 与 N 的大小关系为 ()

$$A. M = N \quad B. M > N \quad C. M \leq N \quad D. M < N$$

4. 代数式 $2x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x + 19$ 的最小值是 ()

A. 10

B. 9

C. 19

D. 11

题型精讲

题型 01 直接开平方法解一元二次方程

【典例 1】. 方程 $x^2 - 16 = 0$ 的解为 ()

A. $x = 4$

B. $x = -4$

C. $x = 4$ 或 -4

D. $x = 0$ 或 4

【变式 1】. 若 $a^2 = (-2)^2$, 则 a 是 ()

A. -2

B. 2

C. -2 或 2

D. 4

【变式 2】. 方程 $x^2 - \sqrt{64} = 0$ 的根为_____.

【变式 3】. 解方程：

(1) $3x^2 - 27 = 0$;

(2) $(x-5)^2 - 36 = 0$;

(3) $\frac{1}{2}(x-2)^2 = 6$;

(4) $(y+4)(y-4) - 9 = 0$.

【变式 4】. 计算： $4(3x+1)^2 - 1 = 0$ 、 $\frac{27}{4}y^3 - 2 = 0$ 的结果分别为 ()

A. $x = \pm \frac{1}{2}$, $y = \pm \frac{2}{3}$

B. $x = \pm \frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$

C. $x = -\frac{1}{6}$, $y = \frac{2}{3}$

D. $x = -\frac{1}{6}$ 或 $-\frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$

【变式 5】. 一元二次方程 $\sqrt{5}(x-\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{5}$ 的实数根为 ()

A. $x_1 = 0, x_2 = 2\sqrt{3}$

B. $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}$

C. $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$

D. $x_1 = 2\sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$

题型 02 判断能否用开平方法解一元二次方程

【典例 1】. 下列方程能用直接开平方法求解的是 ()

- A. $x^2 - 4x + 1 = 0$ B. $x^2 - 2x - 1 = 0$ C. $x^2 - 4x = 0$ D. $x^2 - 4 = 0$

【变式 1】 . 方程 $y^2 = -a$ 有实数根的条件是 ()

- A. $a \leq 0$ B. $a \geq 0$ C. $a > 0$ D. a 为任何实数

【变式 2】 . 有下列方程：① $x^2 - 2x = 0$ ；② $9x^2 - 25 = 0$ ；③ $(2x - 1)^2 = 1$ ；④ $\frac{1}{3}(x + 3)^2 = 27$. 其中能用直接开平方法做的是 ()

- A. ①②③ B. ②③ C. ②③④ D. ①②③④

题型 03 利用开平方法判断一元二次方程根的情况

【典例 1】 . 有关方程 $x^2 + 9 = 0$ 的解说法正确的是 ()

- A. 有两不等实数根 3 和 -3 B. 有两个相等的实数根 3
C. 有两个相等的实数根 -3 D. 无实数根

【变式 1】 . 方程 $x^2 = (x - 1)^0$ 的解为 ()

- A. $x = -1$ B. $x = 1$ C. $x = \pm 1$ D. $x = 0$

【变式 2】 . 一元二次方程 $25t^2 - 144 = 0$ 的根与 $(x - 1)^2 = \frac{49}{25}$ 的根 ()

- A. 都相等 B. 都不相等 C. 有一个根相等 D. 无法确定

题型 04 根据开平方法解一元二次方程求参数

【典例 1】 . 若方程 $ax^2 = b$ ($ab > 0$) 的两个根分别是 $m - 4$ 与 $3m - 8$, 则 $\frac{b}{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【变式 1】 . 如果方程 $(x - 5)^2 = m - 7$ 可以用直接开平方求解, 那么 m 的取值范围是 () .

- A. $m > 0$ B. $m \geq 7$
C. $m > 7$ D. 任意实数

【变式 2】 . 已知方程 $ax^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) 有实数根, 则 a 与 c 的关系是 () .

- A. $c = 0$ B. $c = 0$ 或 a 、 c 异号
C. $c = 0$ 或 a 、 c 同号 D. c 是 a 的整数倍

题型 05 开平方法解一元二次方程—复合型

【典例 1】. 方程 $(x-2)^2=(2x+3)^2$ 的根是 ()

A. $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -5$

B. $x_1 = -5, x_2 = -5$

C. $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 5$

D. $x_1 = 5, x_2 = -5$

【变式 1】. 方程 $(x+1)^2=4(x-2)^2$ 的解是 ()

A. $x=1$

B. $x=5$

C. $x_1=1, x_2=5$

D. $x_1=1, x_2=-2$

【变式 2】. 方程 $4(2x-1)^2-25(x+1)^2=0$ 的解为 ()

A. $x_1 = x_2 = -7$

B. $x_1 = -7, x_2 = -\frac{1}{3}$

C. $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 7$

D. $x_1 = -7, x_2 = \frac{1}{3}$

题型 06 开平方法解一元二次方程的根的形式

【典例 1】. 关于 x 的方程 $(x+a)^2=b(b>0)$ 的根是 ()

A. $x=\pm\sqrt{b}-a$

B. $x=\pm a+\sqrt{b}$

C. 当 $b\geq 0$ 时, $x=-a\pm\sqrt{b}$

D. 当 $a\geq 0$ 时, $x=a\pm\sqrt{b}$

【变式 1】. 形如 $(ax+b)^2=p(a\neq 0)$ 的方程, 下列说法错误的是 ()

A. $p>0$ 时, 原方程有两个不相等的实数根

B. $p=0$ 时, 原方程有两个相等的实数根

C. $p<0$ 时, 原方程无实数根

D. 原方程的根为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{p}}{a}$

题型 07 开平方法解一元二次方程-降次

【典例 1】. 方程 $x^4-16=0$ 的根的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【变式 1】 . 若 $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 6$, 则 $x^2 + y^2$ 的值是 ()

- A . -2 B . 3 C . 3 或 -2 D . -3 或 -2

【变式 2】 . 如果 $(a^2 + b^2)^2 + 4a^2 + 4b^2 = 5$, 则 $a^2 + b^2$ 的值为 ()

- A . 1 B . 2 C . -5 D . 1 或 -5

【变式 3】 . 若 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根为 1 和 -2 , 那么关于 x 的一元二次方程

$a(x-1)^2 + b(x-1) = -c$ 的解为 ()

- A . $x = -1$ B . $x = 0$ C . $x = -1$ 或 $x = 2$ D . $x = -2$ 或 $x = 0$

题型 08 配方法解一元二次方程 (二次项系数为 1)

【典例 1】 . 用配方法解下列方程 :

(1) $x^2 - 6x - 4 = 0$;

(2) $x^2 + x - \frac{7}{4} = 0$;

(3) $x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$;

(4) $(x-1)(x-3) = 8$.

【变式 1】 . 用配方法解下列方程 :

(1) $x^2 - 8x + 4 = 0$.

(2) $x(x-4) = 2 - 8x$.

题型 09 配方法解一元二次方程 (二次项系数不为 1)

【典例 1】 . 用配方法解下列方程 :

(1) $-2x^2 + 6x + 3 = 0$;

(2) $\frac{1}{2}x^2 - 6x - 7 = 0$.

【变式 1】 . 用配方法解方程 :

(1) $2x^2 - 4x + 1 = 0$

$$(2) 5x^2 - 2 = -x$$

【变式2】 . 解下列方程：

$$(1) 4x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$(2) 3(x-5)^2 = 2(5-x)$$

题型10 配方法解一元二次方程 (综合)

【典例1】 . 用配方法解下列方程：

$$(1) x^2 + 4x + 1 = 0 ; \quad (2) 2x^2 - 4x - 1 = 0 ;$$

$$(3) 9y^2 - 18y - 4 = 0 ; \quad (4) x^2 + 3 = 2\sqrt{3}x.$$

【变式1】 . 解方程

$$(1) x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$(2) 2x(2x-1) = 3(2x-1)$$

$$(3) (3x+2)(x+3) = x+14$$

【变式2】 . 用配方法解下列方程：

$$(1) x^2 + 4x = 1 ;$$

$$(2) x^2 + 6x - 5 = 0 ;$$

$$(3) -x^2 + 2x + 3 = 0 ;$$

$$(4) 4x^2 - 7x - 2 = 0 ;$$

$$(5) \frac{1}{2}x^2 - 8x + \frac{1}{2} = 0 ;$$

$$(6) -3x^2 - 2x + 1 = 0 .$$

题型11 辨析配方法解一元二次方程

【典例1】 . 用配方法解一元二次方程 $x^2 + 6x - 1 = 0$, 以下变形正确的是 () .

A . $(x+3)^2 = 10$

B . $(x+3)^2 = 7$

C . $(x+6)^2 = 7$

D . $(x-3)^2 = 10$

【变式1】 . 用配方法解一元二次方程 $2x^2 - 4x - 1 = 0$ 时 , 配方正确的是 ()

A. $(x-1)^2 = \frac{3}{2}$

B. $(x-1)^2 = \frac{1}{2}$

C. $(x-2)^2 = 3$

D. $(x-2)^2 = 5$

【变式2】. 把方程 $\frac{1}{3}x^2 - x - 4 = 0$ 左边配成一个完全平方式后，得到的方程是 ()

A. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{38}{4}$

B. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{38}{4}$

C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{57}{4}$

D. 以上都不对

题型 12 根据配方法解一元二次方程求参数

【典例1】. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 6x + c = 0$ 配方后得到方程 $(x+a)^2 = 1$ ，则 $a+c$ 的值为 ()

A. 8

B. 9

C. 10

D. 11

【变式1】. 珍珍将方程 $x^2 - 4x - 2 = 0$ 化为 $(x+p)^2 = q$ 的形式时，得到 p 的值为 2 ， q 的值为 6 ，则珍珍所得结果 ()

A. 正确

B. 不正确， p 的值应为 -2

C. 不正确， q 的值应为 2 D. 不正确， q 的值应为 4

【变式2】. 已知实数 m, n, c 满足 $m^2 - m + \frac{1}{4}c = 0$ ， $n = 12m^2 - 12m + c^2 + \frac{1}{4}$ ，则 n 的取值范围是 ()

A. $n \geq -\frac{7}{4}$

B. $n > -\frac{7}{4}$

C. $n \geq -2$

D. $n > -2$

题型 13 配方法解一元二次方程与二次根式

【典例1】. 无论 x 取任何实数，代数式 $\sqrt{x^2 - 6x + m}$ 都有意义，则 m 的取值范围是 ()

A. $m \geq 9$

B. $m \leq 9$

C. $m < 9$

D. $m > 9$

【变式1】. 已知 $a + b - 2\sqrt{a-1} - 4\sqrt{b-2} = 3\sqrt{c-3} - \frac{1}{2}c - 5$ ，则 $a+b+c =$ —

题型 14 配方法解一元二次方程与分式

【典例1】. 小明和小林在探索代数式 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$) 有没有最大 (小) 值时，小明做了如下探索：

$$\because x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \geq -2,$$

$\therefore$ 小明的结论是 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的最小值为 -2 ,

小林做了如下探索：

$$\because x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \geq 2,$$

小林的结论是 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的最小值为 2 ；则 ()

A. 小明正确

B. 小林正确

C. 小明和小林都正确

D. 小明和小林都不正确

【变式 1】 . 关于代数式 $a + \frac{1}{a+2}$ ，有以下几种说法，

① 当 $a = -3$ 时，则 $a + \frac{1}{a+2}$ 的值为 -4 .

② 若 $a + \frac{1}{a+2}$ 值为 2 ，则 $a = \sqrt{3}$.

③ 若 $a > -2$ ，则 $a + \frac{1}{a+2}$ 存在最小值且最小值为 0 .

在上述说法中正确的是 ()

A. ①

B. ①②

C. ①③

D. ①②③

【变式 2】 . 若 $x - \frac{1}{x} + 1 = 0$ ，则 $x^3 + 2x^2 + 2024$ 的值为 ()

A. 2025

B. 2024

C. 2023

D. 2022

题型 15 配方法的应用—比较代数式的大小

【典例 1】 . 若 $M = x^2 - 8x + 11$ ， $N = 2x^2 - 12x + 15$ ，则 M 与 N 的大小关系为 ()

A. $M = N$

B. $M > N$

C. $M \leq N$

D. $M < N$

【变式 1】 . 若 $M = 4x^2 - 2x + 17$ ， $N = 3x^2 + 2x + 7$ ， x 为实数，则 M 与 N 的大小关系为 ()

A. $M > N$

B. $M < N$

C. $M = N$

D. M 、 N 的大小关系与 x 的取值有关

题型 16 配方法的应用—最值问题及其应用

【典例 1】. 代数式的值 $2x^2 - 4x + 3$ 的值一定 ()

- A. 大于 3 B. 小于 3 C. 等于 3 D. 不小于 1

【变式 1】. 已知代数式 $-2m^2 + 4m - 4$ ，无论 m 取任何值，它的值一定是 ()

- A. 正数 B. 负数 C. 非正数 D. 非负数

【变式 2】. 关于 x 的多项式 $-x^2 + 6x - m$ 的最大值为 10，则 m 的值是 ()

- A. 1 B. -1 C. -10 D. -19

【变式 3】. 不论 x, y 为什么数，代数式 $4x^2 + 3y^2 + 8x - 12y + 7$ 的值 ()

- A. 总大于 7 B. 总不小于 9
C. 总不小于 -9 D. 为任意有理数

【变式 4】. 代数式 $xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 36$ 的最小值为 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

题型 17 配方法的应用—几何应用

【典例 1】. 如果一个三角形的三边均满足方程 $x^2 - 10x + 25 = 0$ ，则此三角形的面积是

【变式 1】. $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c ，若 $b+c=8$ ， $bc=a^2-12a+52$ ，按边分类，则 $\triangle ABC$ 是____
三角形

【变式 2】. 已知三角形的三条边为 a, b, c ，且满足 $a^2 - 10a + b^2 - 16b + 89 = 0$ ，则这个三角形的最大边 c 的取值范围是 ()

- A. $c > 8$ B. $5 < c < 8$ C. $8 < c < 13$ D. $5 < c < 13$

题型 18 新定义、材料题

【典例 1】. 新定义：关于 x 的一元二次方程 $a_1 [x-m]^2 + k = 0$ 与 $a_2 [x-m]^2 + k = 0$ 称为“同族二次方程”，如 $2021(x-3)^2 + 4 = 0$ 与 $3(x-3)^2 + 4 = 0$ 是“同族二次方程”，现有关于 x 的一元二次方程 $2(x-1)^2 + 1 = 0$ 与 $(a+2)x^2 + (b-4)x + 8 = 0$ 是“同族二次方程”，那么代数式 $ax^2 + bx + 2024$ 能取的最小值是 ()

- A. 2023 B. 2024 C. 2018 D. 2019

【变式1】 . 配方法是数学中非常重要的一种思想方法，它是指将一个式子或将一个式子的某一部分通过恒等变形化为完全平方式或几个完全平方式的和的方法，这种方法常被用到代数式的变形中，并结合非负数的意义来解决问题 .

定义：若一个整数能表示成 $a^2 + b^2$ (a, b 为整数) 的形式，则称这个数为“美丽数” . 例如，5 是“美丽数”，理由：因为 $5 = 1^2 + 2^2$ ，所以 5 是“美丽数” .

解决问题：

(1) 已知 53 是“美丽数”，请将它写成 $a^2 + b^2$ (a, b 为整数) 的形式 .

(2) 若 $x^2 - 6x + 11$ 可配方成 $(x - m)^2 + n$ (m, n 为常数)，求 n^m 的值；

(3) 已知 $S = x^2 + 4y^2 + 4x - 12y + k$ (x, y 是整数， k 是常数)，要使 S 为“美丽数”，试求出 k 的值 .

【变式2】 . 对于实数 p, q ，且 ($p \neq q$)，我们用符号 $\min\{p, q\}$ 表示 p, q 两数中较小的数，如 $\min\{1, 2\} = 1$ ，若 $\min\{(x-1)^2, x^2\} = 3$ ，则 $x =$ _____ .

【变式3】 . 我们知道，一元二次方程 $x^2 = -1$ 没有实数根，即不存在一个实数的平方等于 -1 ，若我们规定一个“新数”，使其满足 $i^2 = -1$ (即方程 $x^2 = -1$ 有一个根为 i)，并且进一步规定：一切实数可以与新数进行四则运算，且原有的运算律和运算法则仍然成立，于是有 $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -1 \times i = -i, i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$. 从而对任意正整数 n ，我们可得到 $i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = (i^4)^n \cdot i = i$ ，同理可得

$i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, i^{4n+4} = 1$ ，那么， $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2016} + i^{2017}$ 的值为 ()

A . 0

B . 1

C . -1

D . i

强化训练

一、单选题

1 . 方程 $(x-1)^2 = 4$ 的解是 ()

A . $x_1 = -4, x_2 = 5$

B . $x = 3$

C . $x_1 = -1, x_2 = 3$

D . $x = 1$

2 . 用配方法解一元二次方程 $x^2 - 2x - 2023 = 0$ ，则方程可变形为 ()

- A. $(x-2)^2 = 2025$ B. $(x+2)^2 = 2025$
- C. $(x-1)^2 = 2024$ D. $(x+1)^2 = 2024$
3. 用配方法解方程 $x^2 - 6x = 4$ 时，应该把方程两边同时 ()
- A. 减 36 B. 加 36 C. 减 9 D. 加 9
4. 若关于 x 的方程 $(x-2)^2 = -b$ 是由 $x^2 + ax - b = 0$ 配方后得到的，则 a 、 b 的值分别为 ()
- A. 4, 2 B. -4, -4 C. -4, -2 D. -4, 2
5. 关于 x 的方程 $(x+m)^2 = n$ ，下列说法正确的是 ()
- A. 当 $n > 0$ 时，有两个解 $x = \pm\sqrt{n} - m$ B. 有两个解 $x = \pm\sqrt{n} - m$
- C. 当 $n \leq 0$ 时，有两个解 $x = \pm\sqrt{n-m}$ D. 当 $n \leq 0$ 时，方程无实根
6. 已知 $P = x^2 - 2x$ ， $Q = 2x - 4$ ，则比较 P ， Q 的大小关系为 ()
- A. $P < Q$ B. $P > Q$ C. $P = Q$ D. $P \leq Q$

二、填空题

7. 用配方法解方程 $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 5$ ，方程的解为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 王老师在批改作业时发现，一位同学在用配方法解一元二次方程时，配方后等号右边的数字不小心被墨水污染了如下： $(x-1)^2 = \blacksquare$ 。若该方程的一个根为 $x_1 = 3$ ，则另一个根为 $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 若方程 $x^2 - 4096576 = 0$ 的两根为 $x_1 = 2024$ ， $x_2 = -2024$ ，则方程 $x^2 - 2x - 4096575 = 0$ 的两根为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 已知实数 a 满足 $3a^2 + \frac{3}{a^2} - 12a - \frac{12}{a} + 19 = 1$ ，则 $a + \frac{1}{a} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
11. 已知关于 x 的一元二次方程 $\frac{1}{2025}x^2 + 3 = 2x^2 + b$ 的根为 ± 3 ，那么关于 y 的一元二次方程 $\frac{1}{2025}(y^2 + 1) + 3 = 2(y^2 + 1) + b$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
12. 我国南宋时期数学家秦九韶曾提出利用三角形的三边求面积的公式，此公式与古希腊几何学家海伦提

出的公式如出一辙，即三角形的三边长分别为 a ， b ， c ，记 $P = \frac{a+b+c}{2}$ ，则其面积

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 。这个公式也被称为海伦—秦九韶公式。若 $p=3$ ， $c=2$ ，则此三角形面积的最大值是_____。

三、解答题

13. 用直接开平方法解下列方程：

(1) $(4x+1)^2 - \frac{16}{9} = 0$.

(2) $(2x+1)^2 - 9(x-3)^2 = 0$.

14. 用配方法解下列方程：

(1) $2x^2 - 5x - 7 = 0$;

(2) $\sqrt{3}y^2 - y - \sqrt{3} = 0$;

(3) $(x+1)(x-1) = 2x^2 - 4x - 6$.

15. 用配方法解下列方程：

(1) $3x^2 - 5x = 2$;

(2) $x^2 + 8x = 9$;

(3) $x^2 + 12x - 15 = 0$;

(4) $\frac{1}{4}x^2 - x - 4 = 0$;

(5) $2x^2 + 12x + 10 = 0$;

(6) $x^2 + px + q = 0 (p^2 - 4q \geq 0)$.

16. 下面是小明同学解一元二次方程 $2x^2 - 2 = 3x$ 的过程，请认真阅读并完成相应的任务。

$2x^2 - 2 = 3x$.

解：二次项系数化为 1，得 $x^2 - 1 = \frac{3}{2}x$ ，第一步

移项，得 $x^2 - \frac{3}{2}x = 1$ ，第二步

配方，得 $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} = 1$ ，第三步

变形，得 $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 1$ ，第四步

开方，得 $x - \frac{3}{2} = \pm 1$ ，第五步

解得 $x_1 = \frac{1}{2}$ ， $x_2 = \frac{5}{2}$ ，第六步

(1) 上面小明同学的解法中运用“配方法”将一元二次方程“降次”为两个一元一次方程，体现的数学思想是——，其中“配方法”依据的一个数学公式是——；

(2) 上述解题过程，从第——步开始出现错误，请写出正确的解答过程。

17. 用配方法证明：二次三项式 $-8x^2 + 12x - 5$ 的值一定小于 0。

18. (1) 已知 $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ， $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ，求 $a^2b + ab^2$ 的值。

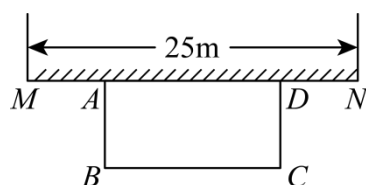
(2) 已知 $x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$ ，求 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的值；

(3) 用配方法求代数式 $y^2 - 6y + 11$ 的最小值。

19. 形如 $x^2 \pm 2xy + y^2$ 的代数式叫做完全平方式，有些代数式可以通过配方得到完全平方式，我们把这种组成完全平方式的变形过程叫做配方。配方在某些求代数式最值问题、解方程等都有广泛的应用。

例如： $x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x+1)^2 + 2$ ，可得：当 $x = -1$ 时，代数式 $x^2 + 2x + 3$ 有最小值，最小值为

2. 请回答下列问题：



(1) 当 x 取何值时，代数式 $x^2 - 8x + 10$ 有最小值，最小值为多少。

(2) 某中学准备在校园里靠墙围一个长方形花园篱笆，如图，围墙 MN 的长为 25m，篱笆的长为 40m，当 AB 为多少米时，围成的长方形花园 $ABCD$ 面积最大，求出最大面积。

20. 先阅读，再解答：由阅读材料：利用公式法，可以将一些形如 $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的多项式变形为

$a(x+m)^2+n$ 的形式，我们把这样的变形方法叫做多项式 ax^2+bx+c ($a \neq 0$) 的配方法，运用多项式的配方法可以解决一些数学问题。比如运用多项式的配方法及平方差公式能对一些多项式进行因式分解。

例： x^2+4x-5

$$=x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2-5$$

$$=x^2+4x+4-9$$

$$=(x+2)^2-9$$

$$=(x+2-3)(x+2+3)$$

$$=(x-1)(x+5)$$

根据以上材料，利用多项式的配方解答下列问题：

(1) 分解因式： x^2+2x-3 ；

(2) 求多项式 $2x^2+6x-7$ 的最小值；

(3) 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且满足 $a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。