

专题 01 与三角形中位线相关的证明思路

考点归纳

考点 01 直接利用三角形中位线定理进行证明

考点 02 三角形中位线叠加中点四边形进行证明

考点 03 找中点构造三角形中位线进行证明

【题型 1】直接连接两个中点构造三角形中位线进行证明

【题型 2】在第三边上找中点构造三角形中位线进行证明

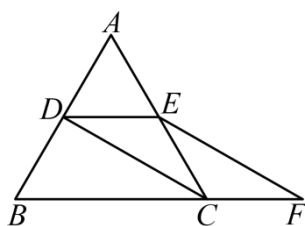
【题型 3】在对角线上找中点构造三角形中位线进行证明

【题型 4】利用中三线合一找中点构造三角形中位线进行证明

考点专练

考点 01 直接利用三角形中位线定理证明

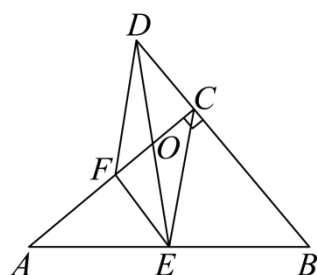
1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 4$ ，点 D, E 分别为 AB, AC 的中点，连接 CD ，过点 E 作 $EF \parallel DC$ 交 BC 的延长线于点 F 。



(1) 求证： $CF = \frac{1}{2}BC$ ；

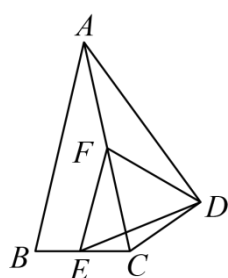
(2) 若 $\angle B = 60^\circ$ ，求 EF 的长及四边形 $DCFE$ 的面积。

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， E, F 分别是边 AB, AC 的中点，延长 BC 到点 D ，使 $CD = \frac{1}{2}BC$ ，连接 EF, CE, DF 。



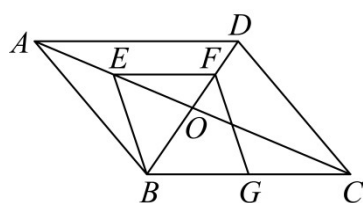
- (1) 求证：四边形 $CDFE$ 是平行四边形．
- (2) 连结 DE ，交 AC 于点 O ，若 $AB = BD = 6$ ，求 DE 的长．

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 E, F 分别是 BC, AC 的中点，以 AC 为斜边作 $Rt\triangle ADC$ ．



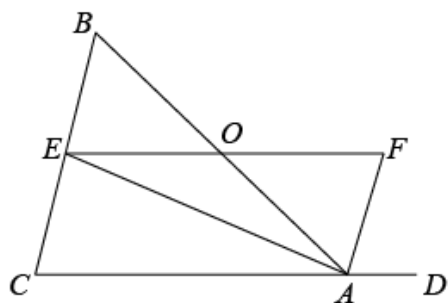
- (1) 求证： $FE = FD$ ；
- (2) 若 $\angle CAD = \angle CAB = 24^\circ$ ，求 $\angle EDF$ 的度数．

4. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 相交于点 O ，点 E, F, G 分别为线段 AO, DO, BC 的中点，连接 BE, EF, FG ．



- (1) 求证：四边形 $BEFG$ 为平行四边形；
- (2) 若 $AC = 2CD$ ，请判断并证明四边形 $BEFG$ 的形状．

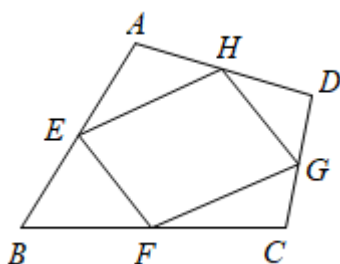
5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AE 是 $\angle BAC$ 的角平分线，点 O 为 AB 的中点，延长 EO 交 $\triangle ABC$ 的外角平分线于点 F ．



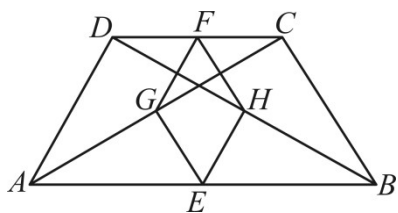
- (1) 求证： $EO=OF$ ；
- (2) 连接 BF ，试判断四边形 $AEBF$ 的形状，并证明你的结论。

考点 02 三角形中位线+中点四边形

6. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中， E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 的中点。求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形。

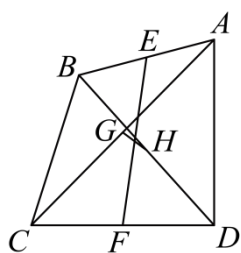


7. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， E, F, G, H 分别是 AB, CD, AC, BD 的中点。

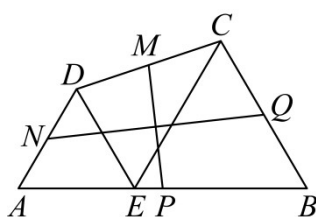


- (1) 求证：四边形 $EGFH$ 是平行四边形；
- (2) 当 AD 与 CB 满足什么条件时，四边形 $EGFH$ 是菱形，并证明；
- (3) 若 $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ ， $AB = 25$ ， $AC = 20$ ， $BD = 24$ ，求四边形 $EGFH$ 的周长。
8. 如图，已知四边形 $ABCD$ 中，点 E, F, G, H 分别是 AB, CD, AC, BD 的中点。求证： EF 和 GH

互相平分．

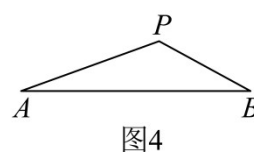
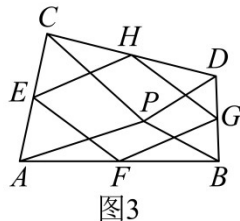
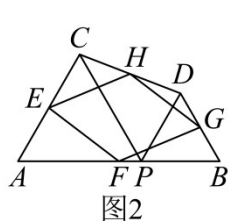
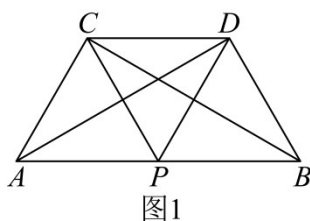


9. 如图所示，在四边形 $ABCD$ 中， E 为 AB 上一点， $\triangle ADE, \triangle BCE$ 都是等边三角形，点 P, Q, M, N 分别为 AB, BC, CD, DA 的中点，线段 PM 与 NQ 有什么关系？请说明理由．



10. 小明数学成绩优秀，他平时善于总结，并把总结出的结果灵活运用到做题中是他成功的经验之一，例如，总结出“依次连接任意一个四边形各边中点所得四边形（即原四边形的中点四边形）一定是平行四边形”后，他想到曾经做过的这样一道题：如图¹，点 P

是线段 AB 的中点，分别以 AP 和 BP 为边在线段 AB 的同侧作等边三角形 APC 和等边三角形 BPD ，连接 AD 和 BC ，他想到了四边形 $ABDC$ 的中点四边形一定是菱形．于是，他又进一步探究：如图²，若 P 是线段 AB 上任一点，在 AB 的同侧作 $\triangle APC$ 和 $\triangle BPD$ ，使 $PC = PA$ ， $PD = PB$ ， $\angle APC = \angle BPD$ ，连接 CD ，设点 E, F, G, H 分别是 AC, AB, BD, CD 的中点，顺次连接 E, F, G, H ．请你接着往下解决三个问题：



(1) 四边形 $ABDC$ 的中点四边形 $EFGH$ 的形状为_；

(2) 当点 P 在线段 AB 的上方时，如图³，在 $\triangle APB$ 的外部作 $\triangle APC$ 和 $\triangle BPD$ ，其他条件不变，(1) 中结论

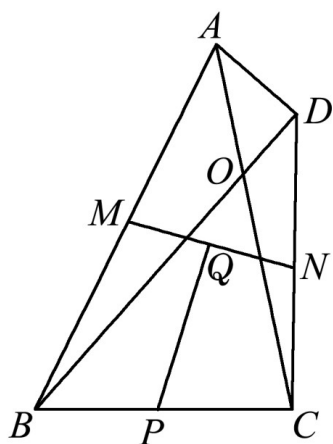
还成立吗？说明理由；

(3) 如果 (2) 中， $\angle APC = \angle BPD = 90^\circ$ ，其他条件不变，先补全图⁴，再判断四边形 $EFGH$ 的形状，并说明理由。

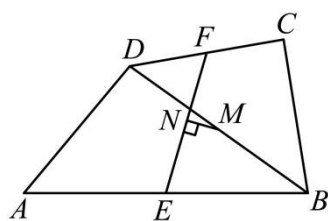
考点 03 找中点构造三角形中位线进行证明

【题型 1】连结两个中点构造中位线

11. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O ， $AC = BD$ ， M ， P ， N 分别是边 AB ， BC ， CD 的中点， Q 是 MN 的中点，连结 PQ 。求证： $PQ \perp MN$ 。

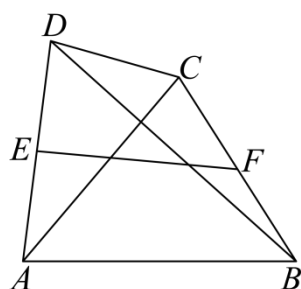


12. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， E ， F ， M 分别是 AB ， CD ， BD 的中点， $AD = BC$ ， $MN \perp EF$ ，垂足为 N 。求证： $EN = FN$ 。

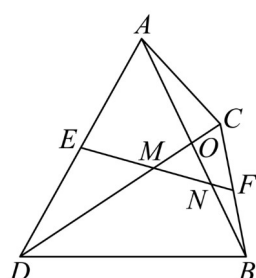


【题型 2】在第三边上找中点构造中位线

13. 如图，已知四边形 $ABCD$ 中， $AC \perp BD$ ， $AC = 10$ ， $BD = 12$ ，点 E 、 F 分别是边 AD 、 BC 的中点，连接 EF ，则 EF 的长是_____。



14. 已知：如图，在四边形 $ADBC$ 中， AB 与 CD 相交于点 O ， $AB = CD$ ， E, F 分别是 AD, BC 的中点，连结 EF ，分别交 DC, AB 于点 M, N ，判断 $\triangle OMN$ 的形状。



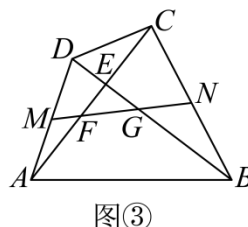
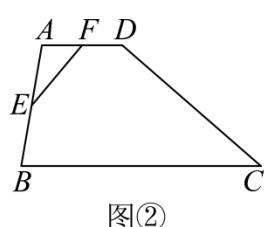
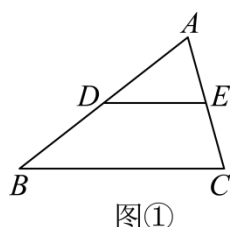
15. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别是边 AB, AC 的中点。直接写出 DE 和 BC 的关系；

【应用】

如图，在四边形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别是边 AB, AD 的中点，若 $BC = 10, CD = 8, EF = 3, \angle AFE = 45^\circ$ ，求 $\angle ADC$ 的度数；

【拓展】

如图，在四边形 $ABCD$ 中， AC 与 BD 相交于点 E ，点 M, N 分别为 AD, BC 的中点， MN 分别交 AC, BD 于点 F, G ， $EF = EG$ 。求证： $BD = AC$ 。



【题型3】在对角线上找中点构造中位线

16. 已知：如图1，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = CD$ ， E, F, G 分别是 AD, BC, BD 的中点，

(1) 求证： $\angle GEF = \angle GFE$

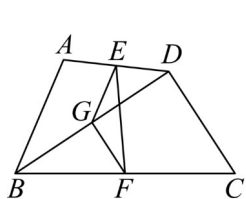


图 1

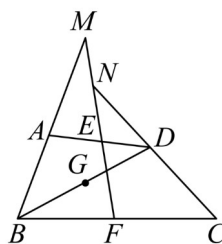


图 2

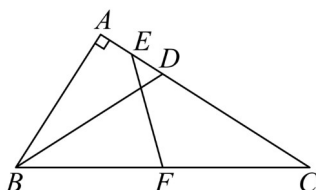


图 3

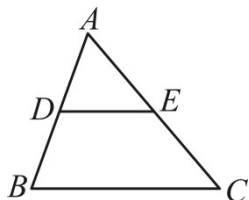
(2) 如图 2；在四边形 $ABCD$ 中， $AB = CD$ ， E, F, G 分别是 AD, BC, BD 的中点，分别延长 BA, FE, CD ，交于 M, N 两点，求证： $\angle M = \angle CNF$ 。

(3) 如图 3，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， D 是 AC 上一点，且 $CD = AB = 10$ ， E, F 分别是 AD, BC 的中点，求 EF 的长。

17. 【教材呈现】如图是华师版九年级上册数学教材第 77 页的部分内容：

如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别是 AB 与 AC 的中点，

可以猜想： $DE \parallel BC$ 且 $DE = \frac{1}{2}BC$ 。



【定理证明】⁽¹⁾ 请根据教材内容，结合图①，写出证明过程。

【结论应用】

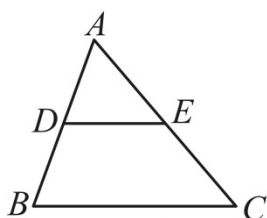


图 ①

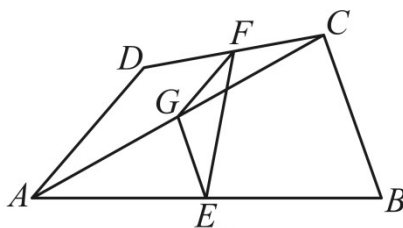


图 ②

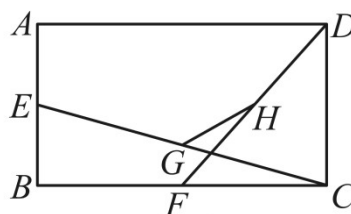


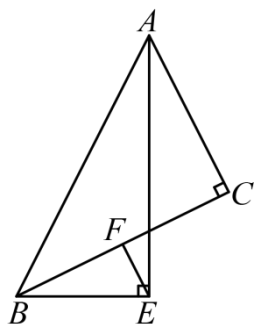
图 ③

(2) 如图②，四边形 $ABCD$ 中， $AD = BC$ ， E, F, G 分别是 AB, DC, AC 的中点，若 $\angle ACB = 80^\circ$ ， $\angle DAC = 20^\circ$ ，直接写出 $\angle EFG$ 的度数。

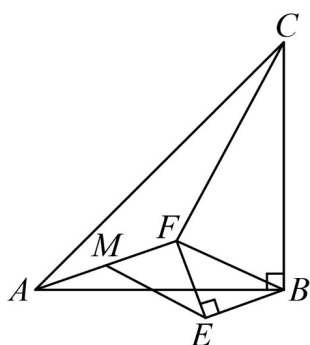
(3) 如图③，在矩形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别是边 AB, BC 的中点，连接 EC, FD ，点 G, H 分别是 EC, FD 的中点，连接 GH ，若 $AB = 6, BC = 10$ ，直接写出 GH 的长度。

【题型 4】借助三线合一寻找中点构造中位线

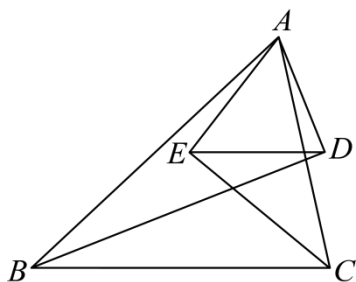
18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AE 平分 $\angle BAC$ ， $BE \perp AE$ ，垂足为 E ， F 是 BC 的中点，连接 EF ， $AB = 5$ ， $AC = 3$ ，则线段 EF 的长为_____。



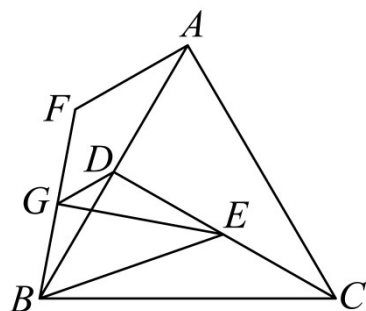
19. 如下图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $BA = BC$ ， $\triangle BEF$ 为等腰直角三角形， $\angle BEF = 90^\circ$ ， M 为 AF 的中点，连接 CF ， ME 。求证： $ME = \frac{1}{2}CF$ 。



20. 如图，过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 分别作 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的平分线的垂线 AD 、 AE ，垂足分别为 D 、 E ，连接 DE 。若 $AB = 10$ ， $AC = 7$ ， $BC = 9$ ，则 $ED =$ _____。



21. 如图，已知等边 $\triangle ABC$ ， $CD \perp AB$ 于 D ， $AF \perp AC$ ， E 为线段 CD 上一点，且 $CE = AF$ ，连接 BE ， BF ， $EG \perp BF$ 于 G ，连接 DG 。



(1) 求证： $BE = BF$ ；

(2) 试说明 DG 与 AF 的位置关系和数量关系。