

专题 04 期末必刷解答题

考点归纳

考点 01 实数、二次根式的运算；解方程

考点 02 化简求值；实数、二次根式的概念的简单应用

考点 03 一元二次方程根的判别式；根与系数的关系

考点 04 实际应用题

考点 05 几何解答证明题I

考点 06 几何解答证明题II

考点 07 无理数的表示；实数与数轴

考点 08 算术平方根、立方根小数点移动问题；“赵爽弦图”-勾股定理的证明

考点精练

考点 01 实数、二次根式的运算；解方程

1. 计算： $\sqrt{27} - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 3\sqrt{\frac{1}{2}}$.

2. 计算题：

(1) $\sqrt{18} - 3\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{8}}$;

(2) $\sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) - (2 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 2)$.

3. 计算：

(1) $(\sqrt{24} + \sqrt{0.5}) - \left(\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{6}\right)$

(2) $\frac{2}{b}\sqrt{ab^2} \times \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}}$ ($a > 0$, $b > 0$)

4. 计算：

$$(1) \frac{\sqrt{75}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} - (\sqrt{3}-2)^0$$

$$(2) 5\sqrt{xy} \div \frac{5}{2}\sqrt{5x^3} \div \sqrt{\frac{y}{x^2}}$$

5. 计算：

$$(1) \sqrt{18} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{32}$$

$$(2) 6\sqrt{ab^3} \div \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \times \sqrt{\frac{a^2}{b}} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$(3) \left(\sqrt{24} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \times \sqrt{3} - (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$$

6. 计算：

$$(1) \sqrt{18} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$$

$$(2) \frac{2}{b}\sqrt{ab^2} \times \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}} \quad (b > 0)$$

7. 解方程式

$$(1) (3x - \sqrt{3})^2 = 27$$

$$(2) (y-1)(y+3) = 5$$

$$(3) \frac{x-1}{3} + \frac{x^2+3}{2} - 2 = 0$$

$$(4) 3x^2 - 6x + 2 = 0$$

8. 解下列方程：

$$(1) x(x-3) = 2(x-3)^2$$

$$(2) 2x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$(3) \frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1$$

$$(4) \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$9. \text{解方程：} \frac{4x}{x^2-9} - 1 = \frac{2}{x+3} - \frac{2}{x-3}$$

10. 在实数范围内分解因式：

(1) $m^2 - 2mn - n^2$;

(2) $3x^2 + 12\sqrt{2}xy + 11y^2$;

(3) $6x^2y^2 + 2xy - 1$.

考点 02 化简求值；实数、二次根式的概念的简单应用

11. 先化简，再求值： $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ，其中 $a=3$ ， $b=\frac{1}{3}$.

12. 已知： $a=2+\sqrt{5}$ ， $b=2-\sqrt{5}$ ，分别求下列代数式的值：

(1) $a^2 - b^2$;

(2) $a^2 + ab + b^2$

13. 二次根式 $\sqrt{28}$ 与最简二次根式 $\sqrt{2a+1}$ 是同类二次根式， b 是8的立方根 .

(1)求 $a+3b$ 的平方根：

(2)若 $x=\sqrt{b}-a$ ，求 x^2+6x+7 的值 .

14. 已知 $5a-2$ 的立方根是2, $6a+b-1$ 的算术平方根是4, c 是 $\sqrt{11}$ 的整数部分 .

(1)求 $a+b+c$ 的值；

(2)求 $4a-b+2c$ 的平方根 .

考点 03 一元二次方程根的判别式；根与系数的关系

15. 设等腰三角形的三条边长分别为 a 、 b 、 c . 已知 $a=2$ ， b 、 c 是关于 x 的方程 $x^2+kx+16=0$ 的两个根，求 k 的值以及另两边的长 .

16. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(m-1)x+m^2-3=0$.

(1)如果方程有两个实数根，求 m 的取值范围 .

(2)如果方程的两根之和等于两根之积，求 m 的值 .

17. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+4k-3=0$.

(1)求证：无论 k 取何值，该方程总有两个不相等的实数根；

(2)若 $x_1+x_2-x_1x_2=0$ ，求 k 的值 .

18. 已知 x_1, x_2 是方程 $(a-1)x^2-3(2-a)x+1=0$ 的两个实数根 .

(1) 若 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 6$ ，求 a 的值；

(2) 在 (1) 的条件下，求 $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ 的值。

19. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - (2k+4)x + k+7 = 0$ 。

(1) 如果这个方程的两个实数根是 x_1, x_2 ，且 $(x_1+2)(x_2+2) = 3$ ，求 k 的值；

(2) 若等腰 $\triangle ABC$ 的一边长 $a = 2$ ，另两边长 b, c 恰好是这个方程的两个根，求 $\triangle ABC$ 的周长。

考点 04 实际应用题

20. 若一人患上流感，经过两轮传染后，共有 144 人被传染上流感，这时引起有关部门注意，加以控制，以后每轮传染少 5 人，问第四轮传染后共有多少人患流感？

21. 作为国内围棋顶级职业联赛，2025“三国赤壁古战场杯”中国围棋甲级联赛吸引了众多爱好者关注。联赛采用循环赛制，每支队伍需与其余所有队伍各赛一场，充分展现各队实力。已知本次联赛共进行了 120 场激烈对决，求有多少支参赛队伍？

22. 如图，现准备用 32 米长的木板建有关面积为 130 平方米的长方形仓库，仓库的一边靠墙，并在与墙垂直的一边开一道 1 米宽的小门。



(1) 如果墙长 15 米，求仓库的长和宽；

(2) 如果墙长 a 米，在离开墙 9 米开外仓库一侧修条小路，那么墙长至少要多少米？

23. 商场销售一批衬衫，平均每天可销售 20 件，每件盈利 40 元。为了扩大销售，增加盈利，商场决定采取适当的降价措施。经调查发现，如果每件衬衫每降价 5 元，商场平均每天可多售出 10 件。

(1) 若商场平均每天要盈利 1250 元，每件衬衫应降价多少元？

(2) 要使商场平均每天盈利 1400 元，可能吗？请说明理由。

24. 小杰和小丽分别从相距 24km 的 A, B 两地同时同向出发，小杰经过 B 地后再走 2 小时追上小丽，小杰走的总路程相当于小丽走 8 小时的路程，求小杰和小丽的速度分别是多少？

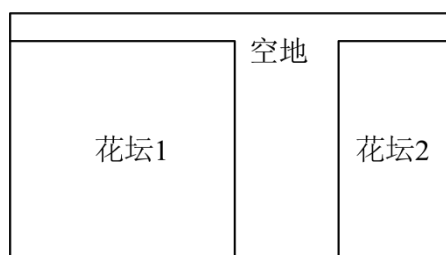
25. 今年新型“和谐号”高速列车正式投入沪宁线运行，已知上海到南京全程约为 300 公里，如果新型“和谐

号”高速列车行驶的平均速度比原来“和谐号”动车行驶的平均速度每分钟快 2 公里，那么从上海到南京比原来“和谐号”动车少用 40 分钟，问新型“和谐号”高速列车从上海到达南京大约需要多少分钟？

26. 某公司生产的新产品需要精加工后才能投放市场，为此王师傅承担了加工 300 个新产品的任务．在加工了 60 个新产品后，王师傅接到通知，要求加快新产品加工的进程，王师傅在保证加工零件质量的前提下，平均每天加工新产品的个数比原来多 10 个，比原计划提前 2 天完成了任务．问接到通知后，王师傅平均每天加工多少个新产品？

27. 上海乐高乐园度假区位于金山区枫泾镇，是全球最大的乐高乐园之一，它将于 2025 年夏季开园迎客，乐园提供甲、乙两种规格的乐高积木套装．甲套装的积木块数比乙套装少 30 块，但甲套装每块积木的平均价格比乙套装高 2 元．已知花费 360 元购买甲套装所获得的积木块数，与花费 300 元购买乙套装所获得的积木块数相等．求甲、乙两种套装每块积木的平均价格分别是多少？

28. 一块长方形空地面积为 1500 平方米，其长宽之比为 5:3 ．

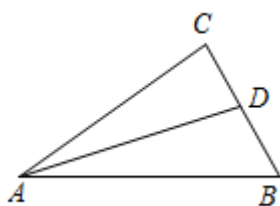


(1) 求这块长方形空地的周长；

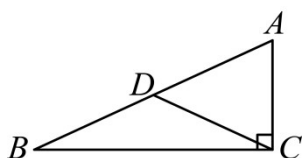
(2) 如图，在空地内修建“T 字型”走道后，将空地分割成两个花坛，花坛 1 为正方形，花坛 2 为长方形，其长宽之比为 2:1．花坛 1 的边长与花坛 2 的长相等，花坛的总面积为 1200 平方米．请问宽度为 2.5 米的农药喷洒车能不能在走道上正常通行？（参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{20} \approx 4.47$ ）

考点 05 几何解答证明题

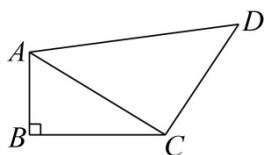
29. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 8$ ， $BC = 6$ ， AD 为 $\triangle ABC$ 角平分线，求 CD 的长度．



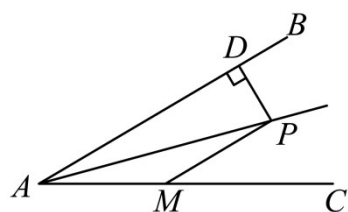
30. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是边 AB 的中点， $\angle B = 25^\circ$ ，求 $\angle ACD$ 的度数．



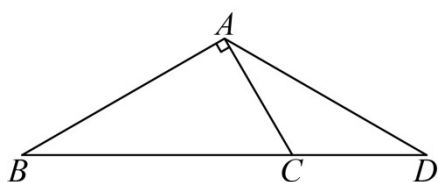
31. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB=1$ ， $BC=2$ ， $CD=2$ ， $AD=3$ ，且 $AB \perp BC$ 。求 $\angle ACD$ 的度数。



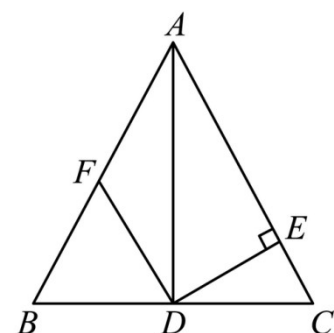
32. 如图， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle BAC$ 的平分线上有一点 P ， $PM \parallel AB$ ， $PD \perp AB$ ， $PM = 6$ ，求 AD 的长。



33. 如图，已知 $\triangle ABD$ 中， $\angle B = \angle D = \angle CAD = 30^\circ$ ， $AC \perp AB$ ，交 BD 于点 C 。若 $AC = 2$ ，求 BD 的长。



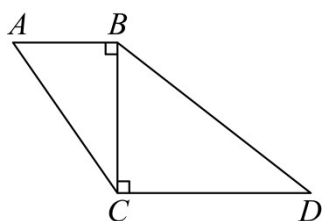
34. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， $DE \perp AC$ 于点 E ， DF 是 $\triangle ABD$ 的中线，且 $CE=2$ ， $DE=4$ ， $AE=8$ 。



(1) 求证： $\angle ADC = 90^\circ$ ；

(2) 求 DF 的长。

35. 如图，已知 $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ， $AB=9$ ， $\frac{BC}{AC} = \frac{4}{5}$ ， $BD=20$ ，

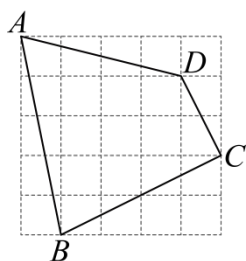


(1)求 BC 的长；

(2)求四边形 $ACDB$ 的面积。

考点 06 几何解答证明题II

36. 如图，网格中每个小正方形的边长都为 1，

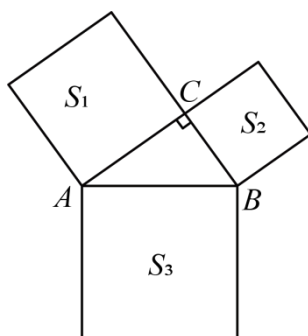


(1)求四边形 $ABCD$ 的面积；

(2)求 $\angle BCD$ 的度数。

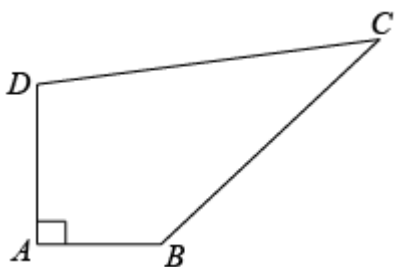
37. 如图， $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，分别以 AC ， BC ， AB 为边作正方形，面积分别记作 S_1 、 S_2 、 S_3 。求

证： $S_1 + S_2 = S_3$ 。

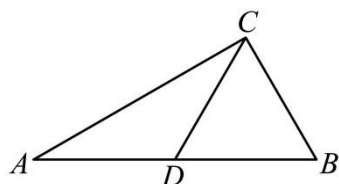


38. 已知某开发区有一块四边形空地 $ABCD$ ，如图所示，现计划在空地上种植草皮，经测量 $\angle A = 90^\circ$ ，

$\angle CBD = 90^\circ$ ， $DB = 5\text{m}$ ， $CD = 13\text{m}$ ， $DA = 4\text{m}$ ，若每平方米草皮需要 200 元，问需要多少投入？



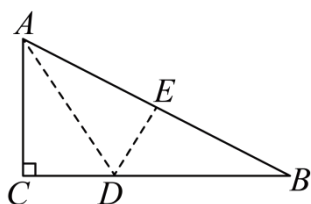
39. 如图， CD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的中线， $\angle A = 30^\circ$.



(1) 求 $\angle B$ 的度数 .

(2) 若 $AB = 10$, 求 $\triangle BDC$ 的周长 .

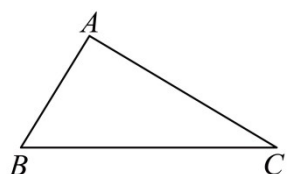
40. 如图，有一块直角三角形纸片，两直角边 $AC = 6\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, 现将直角边 AC 沿直线 AD 折叠，使点 C 落在斜边 AB 上的点 E 处，试求 CD 的长 .



(1) 求 BE 的长 ;

(2) 求 CD 的长 .

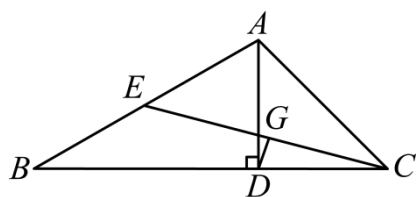
41. 如图，已知 $\triangle ABC$,



(1) 在 AC 边上找一点 D , 使得点 D 到 AB , BC 边的距离相等 ; (用尺规作图，保留作图痕迹，不要求写作法)

(2) 在 (1) 的条件下，若 $\angle A = 90^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, 且 $AC = 6$, 求 AD 的长 .

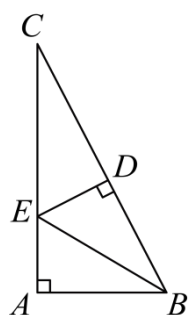
42. 已知，如图， $\angle B = 30^\circ$, $\angle ACD = 45^\circ$, AD 是 BC 上的高， CE 是 AB 边上的中线， $DG \perp CE$ 于点 G .



(1) 若 $AB = 8$ ，求线段 CD 的长；

(2) 求证： $CG = EG$ 。

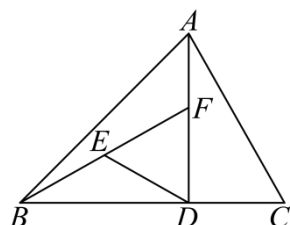
43. 如图，已知 $\angle A = 90^\circ$ ， $BA = BD$ ， $ED \perp BC$ 于点 D 。



(1) 求证： $\angle ABE = \angle DBE$ ；

(2) 若 $\angle C = 30^\circ$ ， $DE = 1$ ，求 BE 的长。

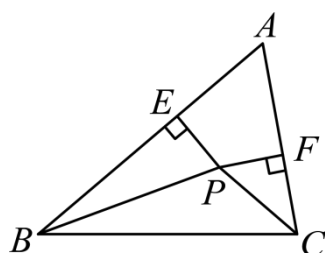
44. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 边上一点， $\angle ABD = \angle BAD = 45^\circ$ ，连接 AD ， AD 上有一点 F ，满足 $BF = AC$ 。



(1) 求证： $DF = DC$ ；

(2) $\angle ABF = 15^\circ$ ，点 E 为 BF 的中点， $DC = 2$ ，求 DE 的长。

45. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的角平分线相交于点 P ，且 $PE \perp AB$ ， $PF \perp AC$ ，垂足分别为 E 、 F 。

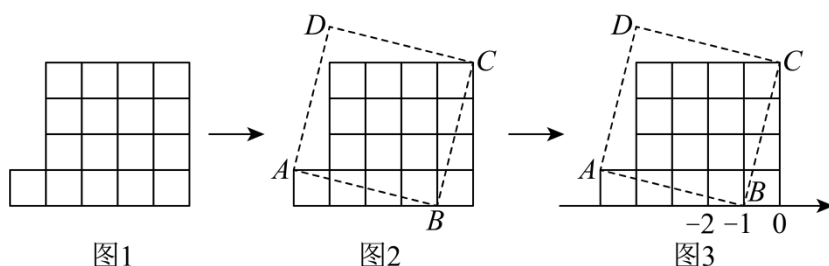


(1)求证： $PE = PF$ ；

(2)若 $\angle BAC = 60^\circ$ ， $PE = 5$ ，连接 AP ，求 AP 的长。

考点 07 无理数的表示；实数与数轴

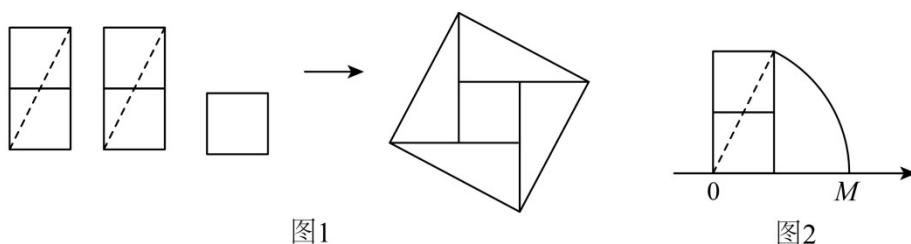
46. 如图 1 是由 17 个边长均为 1 的小正方形组成的图形，我们按图 2 的虚线 AB 、 BC 将它剪开后，重新拼成一个大正方形 $ABCD$ 。



(1)在图 2 中，拼成的大正方形 $ABCD$ 的面积为_____，边 AD 的长为_____。

(2)现将图 2 水平放置在如图 3 所示的数轴上，使得大正方形的顶点 B 与数轴上表示 -1 的点重合，若以点 B 为圆心， BC 边的长为半径画圆，与数轴交于点 E ，在图 3 中画出点 E 的位置，并求出点 E 所表示的实数。

47. 如图 1，将两个 1×2 的长方形分别沿对角线剪开，得到四个直角三角形，它们与一个 1×1 的正方形可以拼成一个大正方形。容易知道，这个大正方形的面积是 5，边长为 $\sqrt{5}$ 。因此， 1×2 的长方形的对角线的长是 $\sqrt{5}$ 。



(1)如图 2，小明在数轴上画出的点 M 表示的数为_____。

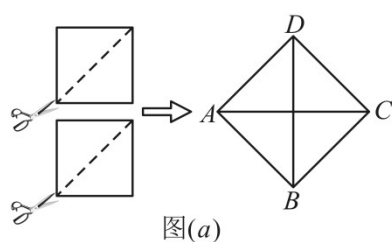
(2)一只蚂蚁从点 A 沿数轴向右爬 2 个单位长度到达点 B ，点 A 表示的数为 $-\sqrt{5}$ ，设点 B 表示的数为 n 。

①求 $n + \sqrt{5}$ 的立方根。

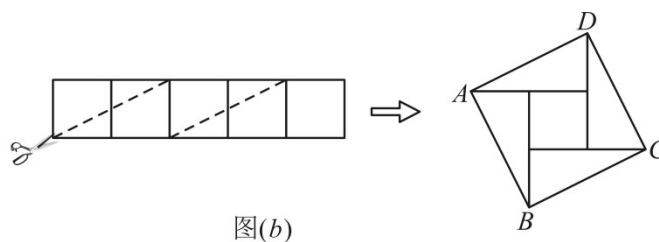
②求 $|n - 3| + n + 2$ 的值。

48. 小李同学在学习无理数时，将边长为 1 的两个正方形沿着他们的一条对角线剪开，得到四个形状、大小都相等的等腰直角三角形，再把这四个等腰直角三角形拼成了一个面积为 2 的正方形，由此得到了无理数 $\sqrt{2}$ 。他受此启发：将一个由 5 个边长为 1cm 的小正方形组成的长方形，通过剪拼组成了一个大的正方形

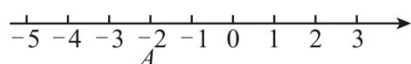
(没有重叠和空隙)。



图(a)



图(b)



图(c)

(1)图(b)中大正方形的边长 $m =$ _____cm，边长 m 介于两个连续整数_____和_____之间。

(2)如图(c)是一个数轴，把图(b)中大正方形旋转使得边 AB 落到数轴上，且点 A 与 -2 重合，则点 B 在数轴上表示的数为_____；

(3)在(2)的基础上，点 B 在点 A 的右侧，点 P 表示数 1 ，将数轴沿着点 P 所在的某条直线翻折使得点 B 恰好落在数轴上的点 B' 处，此时点 B' 所表示的数为_____。

考点 08 算术平方根、立方根小数点移动问题；“赵爽弦图”-勾股定理的证明

49. (1) 观察发现：

$a(a > 0)$	...	0.0001	0.01	1	100	10000	...
$\sqrt{a}$	...	0.01	x	1	y	100	...

表格中 $x =$ ____， $y =$ ____。

(2) 归纳总结：

被开方数的小数点每向右移动2位，相应的算术平方根的小数点就向_____移动_____位。

(3) 规律运用：

①已知 $\sqrt{5} \approx 2.24$ ，则 $\sqrt{500} \approx$ _____；

②已知 $\sqrt{m} \approx 7.07$ ， $\sqrt{5000} \approx 70.7$ ，则 $m =$ _____。

50. 探索与应用。先填写下表，通过观察后再回答问题：

a	...	0.0001	0.01	1	100	10000	...
$\sqrt{a}$	...	0.01	x	1	y	100	...

(1) 表格中 $x = \underline{\quad}$; $y = \underline{\quad}$;

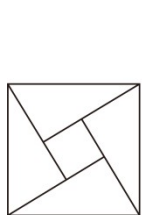
(2) 从表格中探究 a 与 $\sqrt{a}$ 数位的规律, 并利用这个规律解决下面两个问题:

① 已知 $\sqrt{10} \approx 3.16$, 则 $\sqrt{1000} \approx \underline{\quad}$;

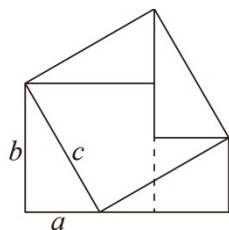
② 已知 $\sqrt{3.24} = 1.8$, 若 $\sqrt{a} = 180$, 则 $a = \underline{\quad}$;

(3) 拓展: 已知 $\sqrt[3]{12} \approx 2.289$, 若 $\sqrt[3]{b} = 0.2289$, 则 $b = \underline{\quad}$.

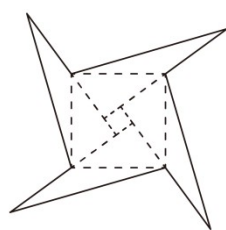
51. “赵爽弦图”巧妙地利用面积关系证明了勾股定理, 是我国古代数学的骄傲, 如图①所示的赵爽弦图是由四个全等的直角三角形和一个小正方形拼成的一个大正方形.



图①



图②



图③

(1) 把赵爽弦图里的 4 个全等的直角三角形适当拼合, 可以得到如图②的图形, 设直角三角形的直角边分别为 a 、 b , 斜边为 c , 请利用这个图形验证勾股定理;

(2) 图①赵爽弦图中, 若 $b = 6$, $a = 5$, 将四个直角三角形中边长为 6 的直角边分别向外延长一倍, 得到图

③所示的“数学风车”, 则这个风车的外围 (实线) 周长为: $\underline{\quad}$ (直接写出结果)