

第13章 分式 单元测试卷·提升卷

(考试时间：100分钟 试卷满分：150分)

一、选择题：(本大题共10题，每题4分，共40分.下列各题四个选项中，有且只有一个选项是正确的.)

1. 下列说法正确的是 ()

A. 分式 $\frac{x^2-1}{x-1}$ 的值为零，则 x 的值为 ± 1

B. 根据分式的基本性质，等式 $\frac{m}{n} = \frac{mx^2}{nx^2}$

C. 把分式 $\frac{0.6a - \frac{5}{3}b}{0.7a - \frac{2}{5}b}$ 的分子与分母的各项系数都化为整数的结果为 $\frac{18a-50b}{21a-11b}$

D. 分式 $\frac{3x-3y}{85x+85y}$ 是最简分式

2. 若 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2$ ，则代数式 $\frac{5m-2mn+5n}{-m-n}$ 的值为 ()

A. -4

B. -3

C. 3

D. 4

3. 若 $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$ (A 、 B 、 C 均为常数) 的计算结果为 $\frac{x^2+2}{x(x+1)(x+2)}$ ，则 $A+B+2C$ 的值为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

4. 若 x 为整数，且 $\frac{4x+8}{x^2-4}$ 的值也为整数，则所有符合条件的 x 的值有 ()

A. 6个

B. 5个

C. 4个

D. 3个

5. 若关于 x 的方程 $\frac{1}{x-1} + \frac{m}{x-2} = \frac{2m+2}{(x-1)(x-2)}$ 无解，则 m 的值为 ()

A. $-\frac{3}{2}$ 或 -1

B. -2 或 0

C. $-\frac{3}{2}$ 或 -2 或 0

D. $-\frac{3}{2}$ 或 -2 或 -1

6. 已知 $1 < x < 2$ ，则式子 $\frac{x-2}{|x-2|} - \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x|}{x}$ 化简的结果是 ()

A. -1

B. 1

C. 2

D. 3

7. 已知方程 $\frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} = 0$ ，计算 $(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8) =$ ()

A. 8

B. 14

C. 16

D. 32

8. 若 a, b, c, d 满足 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{a}$ ，则 $\frac{ab+bc+cd+da}{a^2+b^2+c^2+d^2}$ 的值为 ()

A. 1 或 0

B. -1 或 0

C. 1 或 -2

D. 1 或 -1

9. 设 x 是实数，不大于 x 的最大整数记作 $[x]$ ，如 $[1.3] = 1, [-2.5] = -3$ ，令

$S = \frac{1}{\left[\frac{(4 \times 5 - 1)^2}{4 \times 5}\right]} + \frac{1}{\left[\frac{(5 \times 6 - 1)^2}{5 \times 6}\right]} + \cdots + \frac{1}{\left[\frac{(2023 \times 2024 - 1)^2}{2023 \times 2024}\right]}$ ，则 $[120S]$ 的值为 ()

A. 29

B. 30

C. 31

D. 32

10. 已知两个分式： $\frac{1}{x}$ ， $\frac{1}{x+2}$ ：将这两个分式进行如下操作：

第一次操作：将这两个分式作和，结果记为 M_1 ；作差，结果记为 N_1 ；

$$(\text{即 } M_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}, N_1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2})$$

第二次操作：将 M_1, N_1 作和，结果记为 M_2 ；作差，结果记为 N_2 ；

$$(\text{即 } M_2 = M_1 + N_1, N_2 = M_1 - N_1)$$

第三次操作：将 M_2, N_2 作和，结果记为 M_3 ；作差，结果记为 N_3 ；

$$(\text{即 } M_3 = M_2 + N_2, N_3 = M_2 - N_2) \dots (\text{依此类推})$$

将每一次操作的结果再作和，作差，继续依次操作下去，通过实际操作，有以下结论：

① $N_5 = 4N_1$ ；②当 $x = 2$ 时， $M_1 + M_3 + M_5 + M_7 = \frac{45}{4}$ ；③若 $M_2 \cdot N_6 = 2$ ，则 $x = 2$ ；④在第 $2n+1$ (n 为正整

数) 次操作的结果中： $M_{2n+1} = 2^n \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \right)$ ， $N_{2n+1} = \frac{2^{n+1}}{x(x+2)}$ ；

以上结论正确的个数有 () 个

A . 3

B . 2

C . 1

D . 0

二、填空题 (本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.)

11 . 计算 $\left[\frac{2a^2(x-y)^{-1}}{3b^{-1}} \right]^{-2}$ 的结果是

12 . 化简： $\left(a+1-\frac{3}{a-1} \right) \div \frac{a^2+4a+4}{a-1} =$ _____ .

13 . 方程 $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-3}{x+3}$ 的解是_____ .

14 . 现有甲，乙，丙三种糖混合而成的什锦糖⁵⁰千克，其中各种糖的千克数和单价如下表 .

	甲种 糖	乙种糖	丙种糖
千克数	20	10	20
单价 (元/千克)	15	20	25

商店以糖的平均价 (平均价 = 混合糖的总价格 ÷ 混合糖的总千克数) 作为什锦糖的单价，要使什锦糖的单价每千克提高 1 元，则需再加入丙种糖_____千克。

15. 对于代数式 m 和 n ，定义运算“ $\otimes$ ”： $m \otimes n = \frac{3m - n + 4}{mn}$ ，例如： $4 \otimes 2 = \frac{3 \times 4 - 2 + 4}{4 \times 2} = \frac{7}{4}$ ，若

$(x+1) \otimes (x-2) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$ ，则 $2A - B =$ _____。

16. 已知 a, b, c 是非零有理数，且满足 $ab^2 = \frac{c}{a} - b$ ，则 $\left(\frac{a^2 b^2}{c^2} - \frac{2}{c} + \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{2ab}{c^2} - \frac{2}{abc} \right) \div \left(\frac{2}{ab} - \frac{2ab}{c} \right) \div \frac{101}{c}$ 等于_____。

17. 现有一列数： $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$ (n 为正整数)，规定 $a_1 = 2$ ， $a_2 - a_1 = 4$ ， $a_3 - a_2 = 6$ ，

$\dots, a_n - a_{n-1} = 2n(n-2)$ ，若 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \dots \frac{1}{a_n} = \frac{97}{198}$ ，则 n 的值为_____。

18. 同学们学过分式方程，分式方程有一步必不可少的一验根。下面给出一些方式方程，它们都有一个共同的特点：

若 $x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2}$ ，则方程的解为 2 或 $\frac{1}{2}$ ；

若 $x + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3}$ ，则方程的解为 3 或 $\frac{1}{3}$ ；

若 $x + \frac{1}{x} = 4 + \frac{1}{4}$ ，则方程的解为 4 或 $\frac{1}{4}$ ；

请你用观察出的特点解决以下问题：

(1) 若 $x + \frac{1}{x+1} = 9\frac{1}{10}$ ，则此方程的解为

(2) 若 $x + \frac{1}{9x-6} = \frac{a^2+2a+1}{3a}$ ，则此方程的解为_____（用含有 a 的代数式表示）。

三、解答题：（本大题共 9 题，共 78 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

19. 计算

(1) $\frac{4a^2b}{3cd^2} \cdot \frac{5c^2d}{4ab^2} \div \frac{2abc}{3d}$ ；

(2) $\frac{81-a^2}{a^2+6a+9} \div \frac{a-9}{2a+6} \cdot \frac{a+3}{a+9}$ ；

(3) $\left(\frac{-3x^2y}{3z^2}\right)^2$ ；

(4) $\left(\frac{-a}{b}\right)^2 \div \left(\frac{2a^2}{5b}\right)^2 \cdot \frac{a}{5b}$ 。

20. 解分式方程：

$$(1) \frac{4}{x} = \frac{6}{x+2} ;$$

$$(2) \frac{3-2x}{x-2} = \frac{x}{2-x} - 2 ;$$

$$(3) \frac{7}{x^2+x} - \frac{6}{x^2-1} = \frac{3}{x-x^2}$$

$$21. \text{ 计算： } \frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}} + y^2(x+y)^{-1} \quad (\text{结果不含负整数指数幂}) :$$

$$22. \text{ 先化简，再求值： } -\left(\frac{a+b}{a}\right)^{-1} + \frac{a^2+ab}{a^2+3ab+2b^2} \div \frac{a^2-b^2}{a^2+2ab}, \text{ 其中 } a=20, b=24 .$$

23. 先阅读，再答题：

$$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{3-2}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} ,$$

$$\frac{1}{3 \times 4} = \frac{4-3}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} ,$$

.....

$$\text{一般地，有 } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} .$$

$$(1) \text{ 计算： } \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} ;$$

$$(2) \text{ 计算： } \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \cdots + \frac{1}{(x+2020)(x+2022)} .$$

24. 先阅读材料：

已知不论 x 取什么值，等式 $a(x-2) - 2x + 5 = 1$ 都成立，求 a 的值。

解：因为不论 x 取什么值，等式 $a(x-2)-2x+5=1$ 都成立，所以不妨取 $x=0$ ，得 $a(0-2)-2\times 0+5=1$ 。所

以 $a=2$ 。

根据上述提供的方法，解决下列问题：

(1) 已知不论 x 取什么值，等式 $(2x-1)^5 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 都成立，求

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 的值；

(2) 已知不论 x 取什么值（ 1 、 -2 除外），等式 $\frac{4x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ 都成立，求 A 、 B 的值。

25. 阅读下面的解题过程：

已知 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{5}$ ，求 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值。

解：由 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{5}$ 知 $x \neq 0$ ，所以 $\frac{x^2+1}{x} = 5$ ，即 $x + \frac{1}{x} = 5$

所以：
$$\frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 5^2 - 2 = 23$$

所以 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值为 $\frac{1}{23}$

该题的解法叫“倒数法”，请你也利用“倒数法”解决下列问题：

(1) 已知 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$ ，求 $\frac{x^2}{x^4+1}$ 的值；

(2) 若 $\frac{x}{x^2+x+2} = \frac{1}{5}$ ，求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+4}$ 的值；

(3)拓展：已知 $\frac{xy}{x+y} = -\frac{1}{2}$ ， $\frac{yz}{y+z} = \frac{1}{6}$ ， $\frac{xz}{x+z} = \frac{1}{10}$ ，求 $\frac{xyz}{xy+yz+zx}$ 的值。

26. 在生产生活中，经常需要把两种溶液进行混合，得到新的溶液。例如，把咸淡不同的两碗汤混合；在已有盐水中加水配制生理盐水等等。

(1)要用含盐9%的盐水100克加水配制含盐0.9%的生理盐水，需要加水多少克？

(2)用咸淡程度不同的两碗汤甲和乙混合（甲汤比乙汤咸），得到丙汤。

① 请根据生活经验比较甲汤、乙汤、丙汤的咸淡程度：

② 请设出必要的字母，用代数式表示甲汤、乙汤、丙汤的咸淡程度，通过计算证明 ① 中的结论。

27. 如果两个分式 M 与 N 的和为常数 k ，且 k 正整数，则称 M 与 N 互为“和整分式”，常数 k 称为“和整值”。

如分式 $M = \frac{x}{x+1}$ ， $N = \frac{1}{x+1}$ ， $M + N = \frac{x+1}{x+1} = 1$ ，则 M 与 N 互为“和整分式”，“和整值” $k = 1$ 。

(1)已知分式 $A = \frac{x-7}{x-2}$ ， $B = \frac{x^2+6x+9}{x^2+x-6}$ ，判断 A 与 B 是否互为“和整分式”，若不是，请说明理由；若是，请

求出“和整值” k ；

(2)已知分式 $C = \frac{3x-4}{x-2}$ ， $D = \frac{G}{x^2-4}$ ， C 与 D 互为“和整分式”，且“和整值” $k = 3$ ，若 x 为正整数，分式 D 的

值为正整数 t 。

①求 G 所代表的代数式；

②求 x 的值；

(3)在 (2) 的条件下，已知分式 $P = \frac{3x-5}{x-3}$, $Q = \frac{mx-3}{3-x}$, 且 $P+Q=t$, 若该关于 x 的方程无解，求实数 m

的值 .