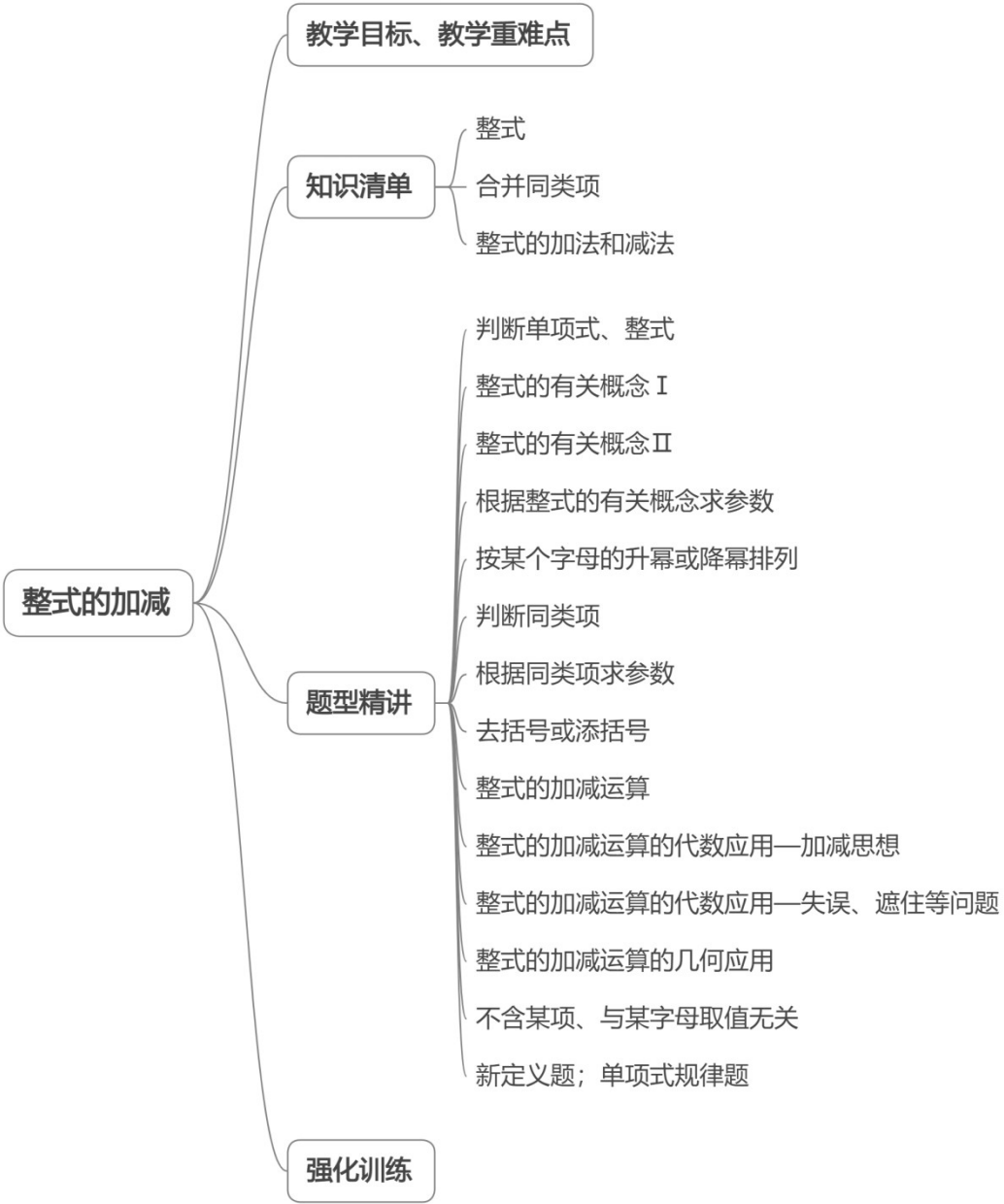


第 10 章 整式的加减

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 整式及其有关概念； 2. 合并同类项； 3. 整式的加法与减法。
教学重难点	1.重点

	(1) 了解整式的有关概念及其应用； (2) 知道同类项的概念，会合并同类项； (3) 掌握整式的加法与减法运算。 2. 难点 (1) 整式的加减有关化简、变形、求值等；整体思想，适当拆分思想等； (2) 整式的加减的综合应用。
--	--

知识清单

知识点 1 整式

1. 单项式

像 $6a^2$ 、 a^3 、 $2.5x$ 、 $48\%m$ 、 vt 、 $-2xy^2$ 、 $\frac{1}{3}mn$ 、 -1 ，它们都是数与字母的乘积，像这样的式子叫单项式。单独的一个数或一个字母也是单项式。

2. 单项式的系数

一个含字母的单项式中的数字因数叫作这个单项式的系数。

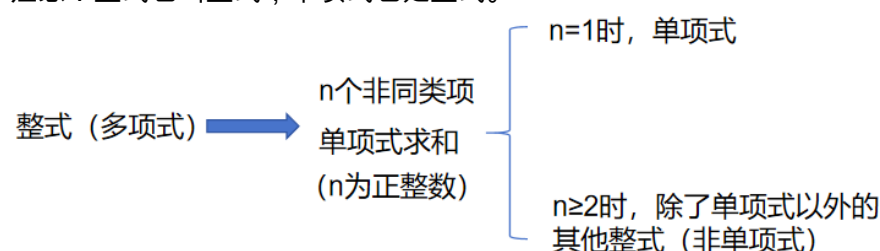
3. 单项式的次数

① 一个单项式中，所有字母的指数的和叫作这个单项式的次数。例如， $6a^2$ 、 a^3 、 $2.5x$ 、 $48\%m$ 、 vt 的次数分别为 2、3、1、1、2。

② 特别地，非零的数是零次单项式，如 5、 $-\frac{5}{2}$ 都是零次单项式。

4. 整式的概念：有限个单项式求和得到的代数式叫做整式。

注意：整式也叫整式；单项式也是整式。



5. 整式的项、项数与次数

① 整式的项：合并同类项后，整式中的每一个单项式叫作整式的项，每一项的次数是几，就称为几次项，不含字母的项叫作常数项。

② 整式的次数：各项中次数最高项的次数叫作这个整式的次数。

③ 整式的项数：合并同类项后，整式有几项，就称为几项式。

【即学即练】

1. 在代数式 $\frac{1}{2}x - y, 5a, x^2 - y + \frac{2}{3}, \frac{1}{\pi}, xyz, -\frac{5}{y}, \frac{x+y+z}{3}$ 中，有 () 个整式。

- A . 7 B . 6 C . 5 D . 4

2. 下列说法正确的是 ()

- A . $-\frac{2xy}{5}$ 的系数是 -2 B . $x^2 + x - 1$ 的系数是 1
C . $2^2 ab^3$ 的次数是 6 次 D . $x - 5x^2 + 7$ 是二次三项式

3. $\frac{1}{4}b^2a - 5 - 6a^2b$ 是 _____ 次 _____ 项式，三次项是 _____。

知识点 2 合并同类项

1. **同类项**：所含的字母相同，且相同字母的指数也相同的单项式叫做**同类项**。几个常数项也是同类项。

2. 合并同类项

像这样，把整式中的同类项合并成一项的过程叫作**合并同类项**。

3. 合并同类项的法则：

在合并同类项时，把同类项的**系数相加**的结果作为**合并后的系数**，而**字母和字母的指数不变**。

4. 为了表达方便或计算需要，在合并同类项后，可以根据加法的交换律将一个整式中的各项按照其中某一个字母指数的大小顺序来排列。

① **按某个字母的降幂排列**：例如，将 $x^2 + 5x + 4x^4 - 3x^3 + 2$ 按 x 的指数从大到小的顺序排列，写成 $4x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x + 2$ ，称为**按 x 降幂排列**；

② **按某个字母的升幂排列**：或者按 x 的指数从小到大的顺序排列，写成 $2 + 5x + x^2 - 3x^3 + 4x^4$ ，称为**按 x 升幂排列**。

【即学即练】

1. 下列去括号正确的是 ()

- A . $3(2x + 3y) = 6x + 3y$ B . $-(2x^2 - x + 1) = -2x^2 + x$
C . $-0.5(1 - 2x) = -0.5 + x$ D . $-2\left(\frac{1}{2}x - y\right) = -x - 2y$

2. 计算： $2a^2 + 4a^2 =$ _____。

3. 单项式 $x^{m-1}y^3$ 与 $4xy^n$ 的和是单项式，则 $m =$ _____， $n =$ _____。

4. 将整式 $3a^3 + ab^2 - 2a^2b - 4b^3$ 按字母 b 进行降幂排列：

知识点 3 整式的加法和减法

1.去括号法则

- ①如果括号外的因数是正数，去括号后原括号内各项的符号与原来的符号相同；
- ②如果括号外的因数是负数，去括号后原括号内各项的符号与原来的符号相反。

2.添括号法则

- ①添括号后，括号前面是“+”号，括到括号里的各项都不变符号；
- ②添括号后，括号前面是“-”号，括到括号里的各项都要改变符号。

3.从数与一次式的相乘到数与整式的相乘

①一般地，**数与一次式相乘**，就是用这个数去乘一次式的每一项，再把所得的积相加。在含有字母的项与数相乘时，把这个数与项的系数相乘的积作为字母的系数，字母不变。运算时要注意这个数与项的系数相乘的积的符号。

②一般地，**数与整式相乘**，就是用这个数去乘整式的每一项，再把所得的积相加。在含有字母的项与数相乘时，把这个数与项的系数相乘的积作为项的系数，字母及其指数不变。运算时要注意这个数与项的系数相乘的积的符号。

4.整式的加减运算

有括号就先去括号，然后再合并同类项。

一般地，几个整式相加减，如果

【即学即练】

1. 先化简，再求值：

(1) $9x - 6x^2 - 3\left(x - \frac{2}{3}x^2\right)$ ，其中 $x = -2$ ；

(2) $(3a^2 - ab + b) - \frac{1}{3}(6ab + 3a^2 + b)$ ，其中 $|a - 2| + (b + 1)^2 = 0$ 。

2. 计算： $(4a^2b - 3ab^2 + 5b^3) - (-3a^2b + 5ab^2) =$ _____。

3. 小宇在计算 $A - B$ 时，误将 $A - B$ 看成 $A + B$ ，得到的结果为 $4x^2 - 2x + 1$ ，已知 $B = 2x^2 + 1$ ，则 $A - B$ 的正确结果为_____。

题型精讲

题型 01 判断单项式、整式

【典例1】. 在代数式 $\frac{5}{2}x^2 - 3x$ 、 $-3x$ 、 $2\pi x^2y$ 、 $\frac{1}{x}$ 、 -6 、 a 中，单项式的个数是 ()

- A . 2 个 B . 3 个 C . 4 个 D . 5 个

【变式1】. 下列代数式 $-\frac{a+b}{3}$ 、 $\frac{m}{\pi}$ 、 $2x^2y$ 、 3^{-5} 、 $(x-1)^{-2}$ 中，单项式有 ()

- A . 1 个 B . 2 个 C . 3 个 D . 4 个

【变式2】. 下列各式中，① a ；② $\frac{1}{x}$ ；③ 0 ；④ $2x=6$ ；⑤ $mx-ny$ ，整式的个数有 ()

- A . 2 个 B . 3 个 C . 4 个 D . 5 个

题型 02 整式的有关概念I

【典例1】. 下列说法正确的是 ()

- A . $-\frac{2xy}{5}$ 的系数是 -2 B . x^2+x-1 的系数是 1
C . 2^2ab^3 的次数是 6 次 D . $x-5x^2+7$ 是二次三项式

【变式1】. 单项式 $-\frac{2x^2y^3}{3}$ 的系数是_____，次数是_____.

【变式2】. 写出一个系数为 -3 ，且含字母 x 和 y 的 3 次单项式_____.

【变式3】. 下列说法正确的是 ()

- A . 单项式 m 既没有系数也没有次数
B . $\frac{5xy^2}{7}$ 系数是 $\frac{5}{7}$ ，次数是 2 次
C . 整式 x^3-x^2+5x 的项是 x^3 、 $-x^2$ 、 $+5x$
D . $\frac{4x^2-y}{5}$ 是整式

题型 03 整式的有关概念II

【典例1】. 整式 $\frac{3a^2-7a+2}{4}$ 的一次项系数是 ()

- A . 7 B . -7 C . $\frac{7}{4}$ D . $-\frac{7}{4}$

【变式1】. 下列说法中正确的是 ()

A. 单项式 $\frac{2}{3}\pi x^3$ 的系数为 $\frac{2}{3}$ ，次数为 3 次

B. $2^4 a + bc^2$ 是单项式

C. 关于 x 的整式 $ax^2 + bx + c$ 是三次二项式

D. 0 是单项式

【变式 2】. 如果一个整式是五次整式，那么它任何一项的次数 ()

A. 都小于 5

B. 都等于 5

C. 都不小于 5

D. 都不大于 5

题型 04 根据整式的有关概念求参数

【典例 1】. 若关于 x 的整式 $(m-3)x^{|m|} + x^2$ 是三次二项式，则 $m =$ _____.

【变式 1】. 整式 $x^m + (m+n)x^2 - 3x + 5$ 是关于 x 的三次四项式，且二次项系数是 -2，求 $n^m =$ _____.

【变式 2】. 已知整式 $-2^2 x^2 y^{m+1} + xy^2 - 4x^3 - 8$ 是五次整式，单项式 $3x^{2n}y^{6-m}$ 与该整式的次数相同，求 $m+n =$ _____.

题型 05 按某个字母升幂或降幂排列

【典例 1】. 整式 $2x^2y - y^3 + 1 - xy^2$ 按字母 y 的降幂排列是_____.

【变式 1】. 把整式 $-1 + 3a^3b^2 - 4ab^3 + 6b$ 按 b 的降幂排列为_____.

【变式 2】. 将整式 $-3x^3y^4 - x^4y^2 + 6x - 1 + 2x^2y$ 按字母 x 的升幂排列为_____.

题型 06 判断同类项

【典例 1】. 下列说法正确的是 ()

A. $\frac{2}{3}xyz$ 与 $\frac{2}{3}xy$ 是同类项

B. $\frac{1}{x}$ 与 $\frac{1}{2}x$ 是同类项

C. $0.5x^3y^2$ 与 $7x^2y^3$ 同类项

D. $5m^2n$ 与 $-4nm^2$ 是同类项

【变式 1】. 下列单项式中， $-\frac{x^2y}{3}$ 的同类项是 ()

A. $3x^2y$

B. $-\frac{xy^2}{3}$

C. $3x^2y^2$

D. $-xy$

题型 07 根据同类项求参数

【典例 1】. 若 $3x^m y^3$ 与 $-\frac{1}{4}x^2 y^3$ 是同类项，则 m 的值为 ()

- A . $-\frac{1}{4}$ B . 1 C . 2 D . 5

【变式 1】. 若单项式 $x^m y^2$ 与 $-2x^3 y^n$ 的差仍是单项式，则 n^m 的值为_____.

题型 08 去括号或添括号

【典例 1】. 下列去括号结果正确的是 ()

- A . $a^2 - (a - 3) = a^2 - a - 3$ B . $a^2 - (-2a + 1) = a^2 - 2a - 1$
C . $a^2 - 2(a - 1) = a^2 + 2a - 2$ D . $a^2 - 2(a + 1) = a^2 - 2a - 2$

【变式 1】. 下列去括号或添括号，其中正确的有 () 个

- ① $x - 3(x^2 y - 2x - 1) = x - 3x^2 y + 6x - 1$;
② $5xy - [3x^2 y - (2xy^2 - 1)] = 5xy - 3x^2 y - 2xy^2 - 1$;
③ $-2x - y - a^2 + 1 = -(2x - a^2) - (-1 + y)$;
④ $3ab - 5ab^2 + 2a^2 b - 2 + a^2 b^2 = 3ab - [5ab^2 - (2a^2 b - 2) - a^2 b^2]$

- A . 1 B . 2 C . 3 D . 4

【变式 2】. 下列变形中错误的是 ()

- A . $m^2 - (2m - 1) = m^2 - 2m + 1$ B . $a^2 - 2ab + b^2 = a^2 - (2ab - b^2)$
C . $a - b + c - d = (a - d) - (b + c)$ D . $b + c - (a - d) = (b - a) + (c + d)$

题型 09 整式的加减运算

【典例 1】. 下列计算正确的是 ()

- A . $a^2 + a^3 = 2a^5$ B . $5x^2 - 4x^2 = x^2$
C . $-2(a - 6) = -2a + 6$ D . $4a^2 b - 2ba^2 = -a^2 b$

【变式 1】. 合并同类项

- (1) $xy^2 - \frac{1}{5}xy^2$;

$$(2) 4a^2 + 3b^2 + 2ab - 4a^2 - 4b^2 .$$

$$(3) 3m^2n - mn^2 - 2m^2n + 2n^2m ;$$

$$(4) 2a^2b - 3a^2b + \frac{1}{2}a^2b$$

【变式 2】 . 计算：

$$(1) -3xy - 2y^2 + 5xy - 4y^2 ;$$

$$(2) 2a - (5a - 3b) + (4a - b) ;$$

$$(3) 2(5a^2 - 2a) - 4(-3a + 2a^2) ;$$

$$(4) -(3a^2 - 4ab) - [a^2 - 2(2a + 2ab)] .$$

题型 10 整式的加减运算的代数应用——加减思想

【典例 1】 . 若一个整式加上 $y^2 - 4$ ，结果是 $3xy + 2y^2 - 5$ ，则这个整式为_____ .

【变式 1】 . 如图



(1) 求整式 M ；

(2) 若 $2M + N = 5x - 19$ ，求当 $x = -2$ 时整式 N 的值 .

【变式 2】 . 已知， $A = 2x^2 - x + 3y - 4xy$ ， $B = x^2 - 3x - y + xy$.

(1) 化简 $A - 2B$ ；

(2) 当 $x + y = \frac{6}{5}$ ， $xy = 1$ ，求式子 $A - 2B$ 的值 .

题型 11 整式的加减运算的代数应用——失误、遮住等问题

【典例 1】 . 有一道题目是一个整式减 $x^2 - 10x - 7$ ，小强误当成了加法计算，结果得到 $5x^2 + 2x - 4$ ，那么正确的结果应该是_____ .

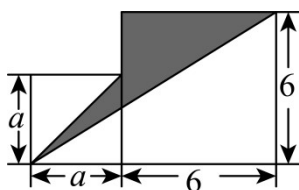
【变式 1】 . 小明在计算整式 M 加上 $x^2 - 2x + 9$ 时，因误认为加上 $x^2 + 2x + 9$ ，得到答案 $2x^2 + 2x$ ，则原来的正确答案应是_____ .

【变式 2】 . $\left(3ab - \frac{1}{2}b^2 - a^2\right) - \left(-\frac{1}{2}a^2 + 4ab - \frac{3}{2}b^2\right) = -\frac{1}{2}a^2 \bigcirc + b^2$ 是小东做的一道整式运算题，但他不

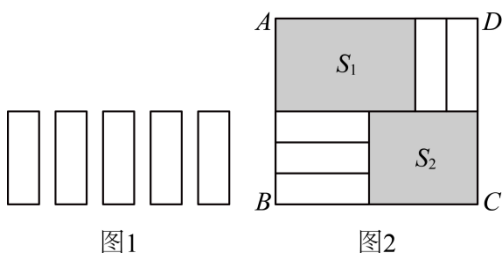
小心把一滴墨水滴在了上面（阴影部分即为被墨水弄污的部分），那么被墨水遮住的一项应是_____。

题型 12 整式的加减运算的几何应用

【典例 1】．如图是两个正方形组成的图形（不重叠无缝隙），用含字母 a 的整式表示出阴影部分的面积为

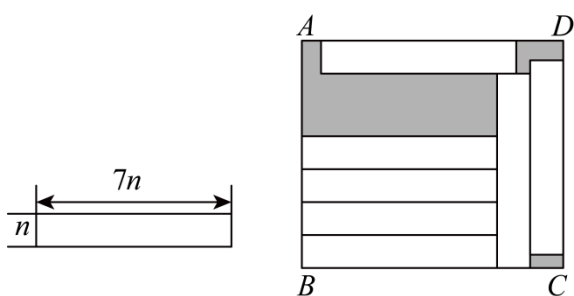


【变式 1】．将如图 1 的 5 张长为 3，宽为 1 的小长方形纸片按图 2 的方式不重叠地放在长方形 $ABCD$ 内，已知 CD 的长度固定不变， BC 的长度可以变化，若图中阴影部分（即两个长方形）的面积分别表示为 S_1 ， S_2 ，则 $S_1 - S_2$ 的值是（ ）



- A . 3 B . 2 C . 0 D . -3

【变式 2】．把七个长和宽分别为 $7n, n$ 的小长方形，摆成如图所示的图形，若四边形 $ABCD$ 为长方形，则图中阴影部分的面积为_____。（用含有 n 的代数式表示）



题型 13 不含某项、与某字母取值无关

【典例 1】．若关于 x 的整式 $m(x-4) + 2m^2 - 3x$ 的值与 x 的取值无关，则 m 的值为_____。

【变式 1】．若整式 $x^2 - xy - 3y^2 - 3x^2 - axy + y^2$ 中不含 xy 项，则 $a =$ _____，化简结果为_____。

【变式 2】．若整式 $2x^2 + mx - y + 6$ 与 $2nx^2 - 3x + 5y - 1$ 的值的和与 x 所取的值无关，则 $m + n$ 的值是_____。

【变式3】 . 若关于 x 的整式 $-3x^2 + 2mx - x + 6m - 1$ 的值与 m 的取值无关，则 $x =$ _____ .

【变式4】 . 已知代数式 $A = 3x^2 + 4xy - 8y + 3$, $B = x^2 - 3xy + 2$.

(1)求 $A - 3B$ 的值；

(2)若 $A - 3B$ 的值与 y 的取值无关，求 x 的值 .

题型14 新定义题；单项式规律题

【典例1】 . 关于 x, y 的单项式，若 x 的指数与 y 的指数是相等的正整数，则称该单项式是“等次单项式” .

给出下面四个结论：① $-5x^3y^3$ 是“等次单项式”；②“等次单项式”的次数可能是奇数；③两个次数相等的“等次单项式”的和一定是“等次单项式”；④若五个“等次单项式”的次数均不高于8，则它们中必有同类项 . 上述结论中，所有正确结论的序号是 ()

A . ①②③

B . ①④

C . ①②④

D . ①③④

【变式1】 . 按一定规律排列的单项式： $4m, 9m^3, 16m^5, 25m^7, 36m^9, \dots$ 据此规律，第12个单项式为_____ .

【变式2】 . 如果整式 A 和整式 B 的和为一个常数 a ，我们称 A, B 为常数 a 的“和谐整式” . 例如： $2x - 7$ 和 $-2x + 6$ 为常数 -1 的“和谐整式” . 若关于 x 的整式 $9x^2 + mx + 6$ 与 $-nx^2 - 3x + 2m - n$ 为常数 k 的“和谐整式” . 则常数 k 的值是_____ .

强化训练

一、单选题

1 . 下列各式中： $2m, 0, -2n, \frac{b}{a}, x^2 + \frac{1}{x}, a + b = ab$ ，单项式有 ()

A . 3个

B . 4个

C . 5个

D . 6个

2 . 下列各组单项式中，不是同类项的为 ()

A . $-2x^2y$ 和 $-5x^2y$

B . $7m^2n$ 和 $2mn^2$

C . $-3a$ 和 $99a$

D . $-abc$ 和 $\frac{3}{2}abc$

3 . 下列各式运算正确的是 ()

A . $2a + 3b = 5ab$

B . $7a + a = 8a$

C . $5y^2 - 2y^2 = 3$

D . $4x^2y - 2xy^2 = 2xy$

4. 下列去括号错误的个数共有 () .

- ① $2y^2 - (3x - y + 3z) = 2y^2 - 3x - y + 3z$; ② $9x^2 - [y - (5z + 4)] = 9x^2 - y + 5z + 4$;
 ③ $4x + [-6y + (5z - 1)] = 4x - 6y - 5z + 1$; ④ $-(9x + 2y) + (z + 4) = -9x - 2y - z - 4$.

- A . 0 个 B . 1 个 C . 2 个 D . 3 个

5. 小毅写作业时发现，代数式 $\blacklozenge x^3 + \blackstar x + 1$ 中三次项系数和一次项系数被顽皮的弟弟涂成了 $\blacklozenge$ 和 $\blackstar$. 但他记得：当 $x = 1$ 时，该代数式的值是 5，则当 $x = -1$ 时，该代数式的值是 ()

- A . 1 B . -3 C . -4 D . -5

6. 若关于 x, y 的整式 $(7mxy - 5y^3) - 2(2x^2y + 3xy)$ 化简后不含二次项，则 m 的值为 ()

- A . $\frac{1}{7}$ B . $\frac{6}{7}$ C . $-\frac{6}{7}$ D . 0

二、填空题

7. 下列式子： $x^2 + 2$ ， $\frac{1}{a} + 4$ ， $\frac{3ab^2}{7}$ ， $\frac{ab}{c}$ ， $-5x$ ， 0 ，整式的个数是_____个 .

8. 关于 a, b 的整式 $-7ab - 5a^3b + 2ab^5 + 9$ 为_____次_____项式 . 其次数最高项的系数是_____ .

9. 已知单项式 $3a^{7x}b^{y+7}$ 和 $-7a^{2-4y}b^{2x}$ 是同类项，则 $x =$ _____， $y =$ _____ .

10. 一个整式 M 减去整式 $-2x^2 + 5x - 3$ ，小马虎却误解为先加上这个整式，结果，得 $x^2 + 3x + 7$ ，则正确的结果是_____ .

11. 定义：若 $a + b = 2$ ，则称 a 与 b 是关于 1 的平衡数 .

(1) 3 与_____是关于 1 的平衡数， $5 - x$ 与_____是关于 1 的平衡数 . (用含 x 的代数式表示)

(2) 若 $a = 2x^2 - 3(x^2 + x) + 4$ ， $b = 2x - [3x - (4x + x^2) - 2]$ ，判断 a 与 b 是否是关于 1 的平衡数_____ (填是与否)

三、解答题

12. 合并下列各式的同类项：

(1) $x + (5x - 3y) - (x - 2y)$

(2) $\left(-p^2 + 3pq - \frac{1}{2}q^2\right) - \left(-\frac{1}{2}p^2 + 4pq - \frac{3}{2}q^2\right)$

13. 计算：

$$(1) (4k^2 + 7k) + (-k^2 + 3k - 1);$$

$$(2) (5y + 3x - 15z^2) - (12y + 7x + z^2);$$

$$(3) 7(p^3 + p^2 - p - 1) - 2(p^3 + p);$$

$$(4) -\left(\frac{1}{3} + m^2n + m^3\right) - \left(\frac{2}{3} - m^2n - m^3\right).$$

14. 先化简，再求值：

$$(1) 3x^2 - 2x + 1 + (3x - x^2), \text{ 其中 } x = -1;$$

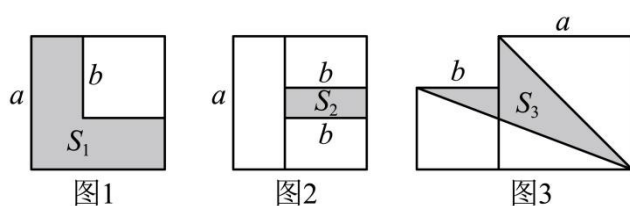
$$(2) 3x - 2\left(x - \frac{3}{2}xy\right) + (x - xy), \text{ 其中 } x = 4, y = -2.$$

15. 已知整式 $x^2y^2m^{+l} + xy - 6x^3 - 1$ 是五次四项式，且单项式 πxny^4m^{-3} 与整式的次数相同，求 m, n 的值。

16. 有这样一道题：当 $a = 2, b = -2$ 时，求整式 $3a^3b^3 - \frac{1}{2}a^2b + b^2 - \left(4a^3b^3 - \frac{1}{4}a^2b - b^2\right) +$

$\left(a^3b^3 + \frac{1}{4}a^2b\right) - 2b^2 + 3$ 的值，马小虎做题时把 $a = 2$ 错抄成 $a = -2$ ，王小真没抄错题，但他们做出的结果却都一样，你知道这是怎么回事吗？说明理由。

17. 两个边长分别为 a 和 b 的正方形如图放置（图1），其未叠合部分（阴影）面积为 S_1 ；若再在图1中大正方形的右下角摆放一个边长为 b 的小正方形（如图2），两个边长为 b 的小正方形叠合部分（阴影）面积为 S_2 ，图3中阴影部分的面积 S_3 。



(1) 用含 a, b 的代数式分别表示 S_1, S_2 。

(2) 试说明 $S_3 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$ 。

18. 定义：已知 M, N 都是关于 x 的整式，若 $M - N = k$ ($k > 0$ ，且 k 不含字母)，则称 M 是 N 的“平移式”， k 叫做 M 关于 N 的“平移值”。例如： $M = 2x^2 + x + 3, N = 2x^2 + x - 1$,

$M - N = (2x^2 + x + 3) - (2x^2 + x - 1) = 4 > 0$ ，则称 M 是 N 的“平移式”， M 关于 N 的“平移值”为 4。

(1)若 $M = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 3$, $N = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$, 则 M 是 N 的“平移式”吗?为什么?

(2)对于常数 m, n , 有 $M = 4x^2 + mx + m^2$, $N = 4x^2 - 6x + n$, 若 M 是 N 的“平移式” , 且“平移值”为 3 , 求 m, n 的值 ;

(3)若 A, B, M 都是关于 x 的整式 , 且 $A = \frac{11}{2}x^2 - \frac{1}{2}nx - \frac{2}{3}$, $B = 6x^2 + mx + 1$. $M = 5x^{|m|} + (m-2)x + \frac{4}{3}m$, 且

$N = 2A - B$, 试问 : M 是 N 的“平移式”吗?如果是 , 求出 m, n 的值及“平移值” ; 如果不是 , 请说明理由 .