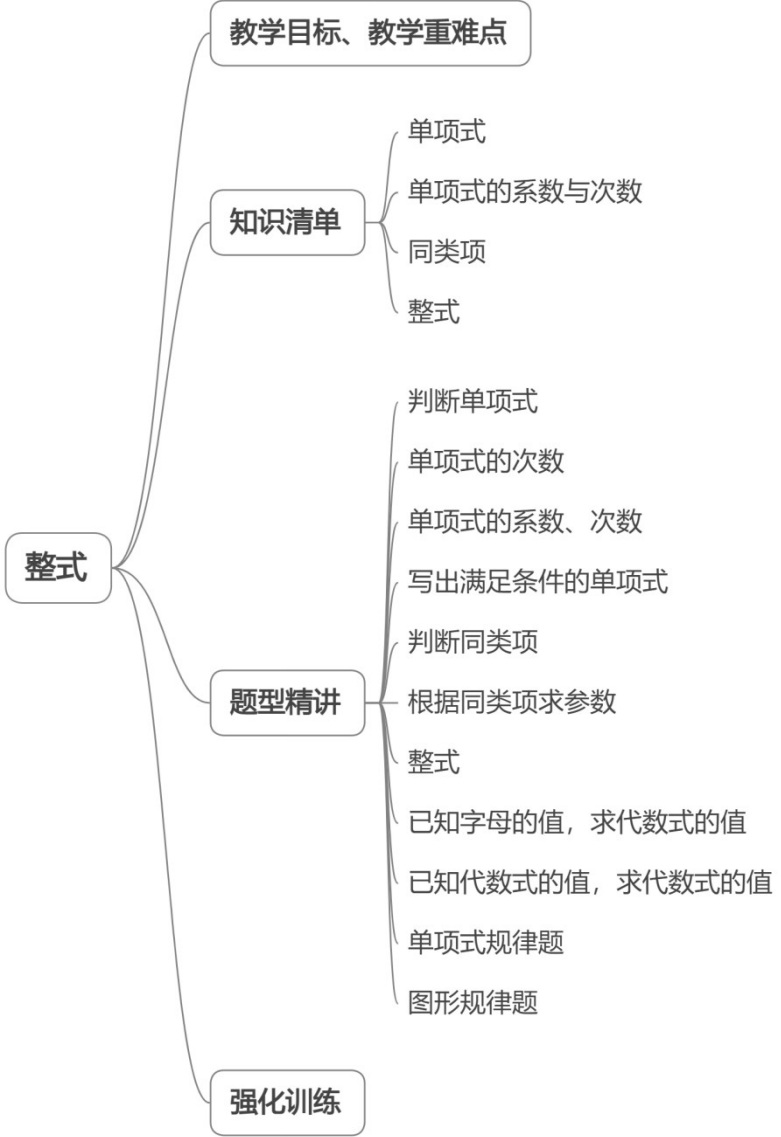


专题 10.1 整式

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 了解单项式的概念，并学会判断单项式； 2. 知道单项式的系数与次数； 3. 学会辨析同类项，根据同类项的概念求参数； 4. 学习整式的概念、分类。
教学重难点	1. 重点

	(1) 判断代数式是否属于单项式；判断代数式是否属于整式； (2) 写出已知单项式的系数与次数； (3) 辨析是否属于同类项；同类项概念的应用 2. 难点 (1) 概念应用的一些特殊情况，如含π的代数式； (2) 同类项概念的综合应用； (3) 代数式的求值。
--	--

知识清单

知识点 1 单项式

1. 我们看以下几个例子：

- (1) 棱长为 a 的正方体的表面积为 $6a^2$ ，体积为 a^3 ；
- (2) 铅笔的单价是 x 元，圆珠笔的单价是铅笔单价的 2.5 倍，则圆珠笔的单价是 $2.5x$ 元；
- (3) 全校学生总人数是 m ，其中女生占总人数的 48%，则女生人数是 $48\%m$ ；
- (4) 一辆汽车的速度是 v km/h，它 t h 行驶的路程为 vt km。

上面的例子中得到了一组代数式： $6a^2$ 、 a^3 、 $2.5x$ 、 $48\%m$ 、 vt 。

2. 单项式

像 $6a^2$ 、 a^3 、 $2.5x$ 、 $48\%m$ 、 vt 、 $-2xy^2$ 、 $\frac{1}{3}mn$ 、 -1 ，它们都是数与字母的乘积，像这样的式子叫单项式。单独的一个数或一个字母也是单项式。

要点：

(1) 单项式包括三种类型：①数字与字母相乘或字母与字母相乘组成的式子；②单独的一个数；③单独的一个字母。

(2) 单项式中不能含有加减运算，但可以含有除法运算。如： $\frac{st}{2}$ 可以写成 $\frac{1}{2}st$ 。但若分母中含有字母，如 $\frac{5}{m}$ 就不是单项式，因为它无法写成数字与字母的乘积。

【即学即练】

1. 代数式 $2m+n$ ， $3ab$ ， $\frac{x}{y}$ ， a ， -8 ， $\frac{x-y}{2}$ 中，单项式的个数是()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

2. 下列代数式 $-\frac{a+b}{3}$ ， $\frac{m}{\pi}$ ， $2x^2y$ ， 3^{-5} ， $(x-1)^{-2}$ 中，单项式有()

- A . 1 个 B . 2 个 C . 3 个 D . 4 个

知识点 2 单项式的系数与次数

1. 单项式的系数

①上面列出的代数式都是单项式.其中 $6a^2$ 的数字因数为 6,称 $6a^2$ 的系数是 6; a^3 的数字因数为 1,称 a^3 的系数是 1.

②一个含字母的单项式中的数字因数叫作这个单项式的系数.例如,上面例子中的一组单项式的系数分别为 6、1、2.5、48%、1.

要点：

- (1) 确定单项式的系数时,最好先将单项式写成数与字母的乘积的形式,再确定其系数;
- (2) 圆周率 π 是常数.单项式中出现 π 时,应看作系数;
- (3) 当一个单项式的系数是 1 或 -1 时,“1”通常省略不写;

(4) 单项式的系数是带分数时,通常写成假分数,如: $1\frac{1}{4}x^2y$ 写成 $\frac{5}{4}x^2y$.

2. 单项式的次数

①一个单项式中,所有字母的指数的和叫作这个单项式的次数.例如, $6a^2$ 、 a^3 、 $2.5x$ 、 $48\%m$ 、 vt 的次数分别为 2、3、1、1、2.

②特别地,非零的数是零次单项式,如 5、 $-\frac{5}{2}$ 都是零次单项式.

要点：

单项式的次数是计算单项式中所有字母的指数和得到的,计算时要注意以下两点：

- (1) 没有写指数的字母,实际上其指数是 1,计算时不能将其遗漏;
- (2) 不能将数字的指数一同计算.

【即学即练】

1. 单项式 $-2a^2b$ 的系数和次数分别是 ()

- A . -2 和 2 B . 2 和 2 C . -2 和 3 D . 2 和 3

2. 单项式 $\frac{-x^3y}{3}$ 的系数是 ()

- A . $-\frac{1}{3}$ B . 4 C . $\frac{1}{3}$ D . -1

3. 判断下列各式是不是单项式,是单项式的写出其系数和次数.

(1) $-x^4$;

(2) $-\frac{1}{2}a^2b^3c$;

$$(3) -2^3 x^2 yz ;$$

$$(4) -3 \times 10^2 m^2 n^3 ;$$

$$(5) \frac{a}{\pi} ;$$

$$(6) 2a - 3 ;$$

$$(7) \frac{2024}{x} .$$

知识点3 同类项

1.同类项：所含的字母相同，且相同字母的指数也相同的单项式叫做同类项.几个常数项也是同类项。

2.议一议：

小明： $2a^2b^2$ 与 $-3b^2a^2$ 字母排列顺序不同，所以它们不是同类项.

小丽： $2xy$ 与 $2x$ 这两项中都有字母 x ,所以它们是同类项.

你赞同小明、小丽的想法吗？

【即学即练】

1.下列式子中， a^2b 的同类项是 ()

A. $x^2 - 1$

B. x^2y

C. $2b^2a$

D. $-\frac{3}{5}a^2b$

2.下列各组式子中为同类项的是 ()

A. x 与 y

B. $4x$ 与 $4x^2$

C. $-3x^2y$ 与 $\frac{1}{3}yx^2$

D. $6x^3y^4$ 与 $6x^3z^4$

3.若 $-2x^m y^4$ 与 $3x^4 y^n$ 是同类项，则 m^n 的值为_____.

知识点4 整式

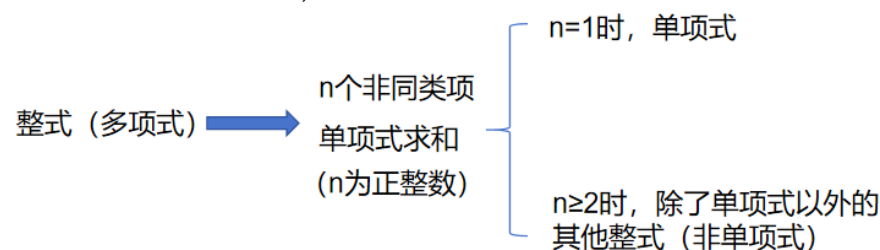
1.知识引入：观察下面一组代数式

$4a^2-3b$ 、 $-m+4$ 、 $3t^2-t-4$ 、 $2ab+2ac+2bc$. 它们都是由单项式求和而得到的代数式.

2.整式的概念：有限个单项式求和得到的代数式叫做整式.

例如， $3t^2-t-4$ 是由 $3t^2$ 、 $-t$ 和 -4 这三个单项式求和得到的整式.

注意：整式也叫多项式；单项式也是整式。



【即学即练】

1. 下列各式中：① $a+bc$ ；② $\frac{5a}{\pi}$ ；③ mx^2+nx^2+9 ；④ $S=\frac{1}{2}ab$ ；⑤ $-x$ ；⑥ $\frac{y}{x}+9$ 。其中整式的个数有 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

2. 下列式子： $4xy, \frac{m^2n}{2}, y^2+y+\frac{2}{y}, 2x^3-3, 0, -\frac{3}{ab}+a, m, \frac{m-n}{m+n}, \frac{x-1}{2}, \frac{3}{x}$ ，其中单项式有_____；整式有_____。

题型精讲

题型 01 判断单项式

【典例 1】. 下列代数式 $-a$ ， $\frac{2}{\pi-1}$ ， $2x^2-3x$ ， $\frac{1}{x}$ ， 0 ， $\frac{x}{2}$ 中，单项式的个数有 ()

- A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

【变式 1】. 代数式 $2m+n$ ， $3ab$ ， $\frac{x}{y}$ ， a ， -8 ， $\frac{x-y}{2}$ 中，单项式的个数是 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【变式 2】. 下列代数式中，单项式的个数是 ()

① $2x-3y$ ；② $\frac{x}{y}$ ；③ $\frac{x}{2}$ ；④ $-a$ ；⑤ $\frac{2}{x+1}$ ；⑥ $\frac{1}{\pi}$ ；⑦ $-7x^2y$ ；⑧ 1 。

- A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

题型 02 单项式的次数

【典例 1】. 下列各式中，是零次单项式的是 ()

- A. ab B. 0 C. $\frac{1}{3}a^3$ D. $\frac{3}{2}$

【变式 1】. 下列各代数式中是五次单项式的是 ()

- A. $5a^3b$ B. 3^2a^2b C. $-a^2b^3$ D. $9a^2+b^3$

【变式 2】. 已知 $-3a^x bc^3$ 是一个七次单项式，则 $x=$ _____。

题型 03 单项式的系数、次数

【典例 1】. 单项式 $-\frac{2x^2y^3}{3}$ 的系数是_____，次数是_____.

【变式 1】. 下列关于单项式 $-\frac{xy^2}{3}$ 的说法中，正确的是 ()

A. 系数是 -3，次数是 2

B. 系数是 -3，次数是 3

C. 系数是 $-\frac{1}{3}$ ，次数是 2 D. 系数是 $-\frac{1}{3}$ ，次数是 3

【变式 2】. 下列说法正确的是 ()

A. $\frac{x+5}{3}$ 是单项式

B. $\frac{1}{x}$ 是单项式

C. $-2a$ 是一次单项式

D. $\frac{xy}{3}$ 的次数是 1 次

题型 04 写出满足条件的单项式

【典例 1】. 写出一个系数为 -3 ，且含字母 x 和 y 的 3 次单项式_____.

【变式 1】. 写出一个含有字母 x 、 y 的五次单项式：_____.

【变式 2】. 有一含有字母 a, b 的单项式，它的系数是 -2 ，次数是 3，这个单项式是

题型 05 判断同类项

【典例 5】. 下列单项式中，与单项式 $2xy^2$ 是同类项的是 ()

A. $3x^2y$

B. $-4xy^2$

C. $2xy$

D. $2yx^2$

【变式 1】. 下列各组单项式是同类项的是 ()

A. x 与 y

B. $6a^2b$ 与 $-3b^2a$

C. $\frac{3}{4}x^2y^3z^4$ 与 $y^3z^4x^2$

D. $5t$ 与 7

【变式 2】. 下列各对单项式中，不是同类项的是 ()

A. 8 与 $\frac{1}{8}$

B. xy 与 $-\frac{1}{2}xy$

C. mb^2 与 $\frac{1}{2}m^2b$

D. $(xy^2)^2$ 与 $-\frac{1}{2}x^2y^4$

题型 06 根据同类项求参数

【典例 1】. 已知单项式 $2a^m b$ 与 $\frac{1}{2}a^2 b^{n+2}$ 是同类项，那么 $m^n =$ _____.

【变式 1】. 若 $3x^m y^3$ 与 $-\frac{1}{4}x^2 y^3$ 是同类项，则 m 的值为 ()

A. $-\frac{1}{4}$

B. 1

C. 2

D. 5

【变式 2】. 已知 $3x^{[2a+3]}y^{4b-5}$ 与 $-3x^{a+4}y^{b+1}$ 是同类项，则 $a+b =$ _____.

题型 07 整式

【典例 1】. 下列式子： x^2+2 ， $\frac{1}{a}+4$ ， $\frac{3ab^2}{7}$ ， $\frac{ab}{c}$ ， $-\frac{5}{6}x$ ， 0 ，整式的个数是_____个.

【变式 1】. 在代数式：① $\frac{3}{4}abc$ ，② a^2-xy+b^2 ，③ $\frac{1}{n}$ ，④ $\frac{x-y}{\pi}$ ，⑤ $\frac{x}{2}+m$ 中，是整式的是_____.

(填相应序号)

【变式 2】. 在下列代数式： x^2+5 ， -1 ， $-3x+2$ ， π ， $\frac{5}{x}$ ， $x^2+\frac{1}{x+5}$ ， $5x$ 中，整式有 ()

A. 3 个

B. 4 个

C. 5 个

D. 6 个

【变式 3】. 在下列说法中，正确的是 ()

A. $\frac{x+y}{2}$ 是单项式

B. $6x^3y$ 的次数为 4

C. $-\pi x^2$ 的系数为 -1

D. $-\frac{a^2b}{5}$ 不是整式

【变式 4】. 当 $a =$ _____ 值时，整式 x^2+a-1 是单项式.

题型 08 已知字母的值求代数式的值

【典例 1】. 若 $m = -2$ ，则代数式 m^2-2m-1 的值是_____.

【变式 1】. 已知 $x=1, y=-5$ ，求代数式 $2xy+1$ 的值为 ()

A. -9

B. 9

C. 10

D. -10

【变式2】. 当 $x = -1$, $y = \frac{3}{2}$ 时, 求代数式 $x^2 - 2xy + y^2$ 的值.

题型 09 已知代数式的值, 求代数式的值

【典例1】. 已知 $a^2 + a - 3 = 0$, 那么 $4 - a^2 - a$ 的值是

【变式1】. 当 $x = 1$ 时, 整式 $ax^3 + bx + 1$ 的值为 2023 , 则当 $x = -1$ 时, 整式 $ax^3 + bx - 2$ 的值是_____.

【变式2】. 若 $x^2 + 3x - 4 = 0$, 则 $x^3 + 4x^2 - x + 2022 =$ _____.

题型 10 单项式规律题

【典例1】. 按照一定规律排列的单项式 $\frac{x}{2}$, $\frac{x^3}{4}$, $\frac{x^5}{6}$, $\frac{x^7}{8}$, ... , 试猜想第 n 个单项式为 ()

- A . $\frac{x^{2n+1}}{n}$ B . $\frac{x^{2n+1}}{2n}$ C . $\frac{x^{2n-1}}{2n}$ D . $\frac{x^{2n-1}}{2n+1}$

【变式1】. 按一定规律排列的单项式: $-2x^3$, $3x^6$, $-4x^9$, $5x^{12}$, $-6x^{15}$, 则第 n 个单项式是 ()

- A . $(-1)^n (n+1)x^{3n}$ B . $(-1)^{n-1} (n+1)x^{3n}$
C . $(-1)^{n+1} nx^{3n}$ D . $(-1)^n nx^{n+3}$

【变式2】. 【观察与发现】

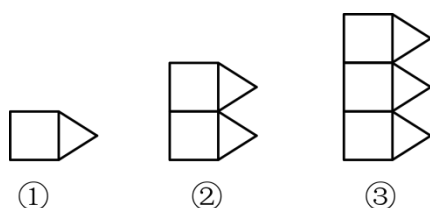
x^2y , $-3x^2y^2$, $5x^2y^3$, $-7x^2y^4$, $9x^2y^5$, $-11x^2y^6$, ... ,

(1)直接写出: 第 7 个单项式是 _ ; 第 8 个单项式是 _ ;

(2)第 n (n 大于 0 的整数) 个单项式是什么? 并指出它的系数和次数.

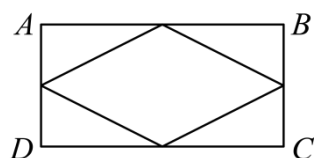
题型 11 图形规律题

【典例1】. 如图, 用长度相等的小木棒按一定规律摆放成图案, 图案①中有 6 根小木棒, 图案③中有 16 根小木棒, ... , 那么第 n 个图案中小木棒的根数为 _____. (用含字母 n 的式子表示)



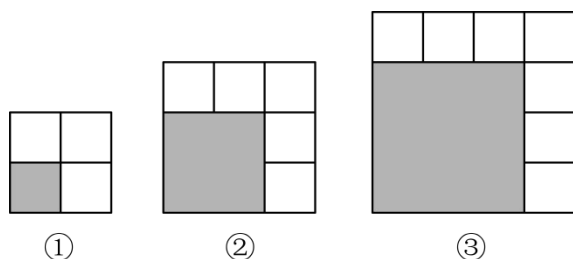
【变式1】. 如图所示, 长方形 $ABCD$ 的长是 a , 宽是 b , 将长方形 $ABCD$ 的面积记作 S_1 , 取各边中点,

顺次连接得到的四边形面积记作 S_2 , 以此类推, 则 S_6 可用含 a 、 b 的代数式表示为 ()



- A. $\frac{1}{2^3}ab$ B. $\frac{1}{2^4}ab$ C. $\frac{1}{2^5}ab$ D. $\frac{1}{2^6}ab$

【变式2】 . 探索规律，并回答问题：观察下面各图形，我们会发现：图①空白部分小正方形的个数是 $2^2 - 1^2 = 2 + 1$ ；图②空白部分小正方形的个数是 $3^2 - 2^2 = 3 + 2$ ；图③空白部分小正方形的个数是 $4^2 - 3^2 = 4 + 3$ ；像这样继续排列下去，可以用含有字母 n 的代数式表示为：_____。（其中 n 为正整数）



强化训练

一、单选题

1. 下列代数式 $\frac{2}{x}$, $x^2 + x - \frac{2}{3}$, $\frac{x+2}{2}$, $\frac{y^3 + y^2 - 2}{y}$, x , 0 , $\frac{1}{2}yx^2$, 其中单项式有 ()

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

2. 下列各组单项式是同类项的有 ()

- A. $3x^2y$ 与 $-3x^2y$ B. $0.2a^2b$ 与 $0.2ab^2$ C. $11abc$ 与 $9bc$ D. $4xy^2z$ 与 $4x^2yz$

3. 单项式 $4xy^3$ 中字母 y 的指数，单项式的次数分别是 ()

- A. 3, 2 B. 3, 4 C. 4, 2 D. 4, 4

4. 对于单项式 $-2^3a^2b^2c$ 的系数、次数说法正确的是 () .

- A. 系数为 -2 ，次数为 8 B. 系数为 -2^3 ，次数为 4
C. 系数为 -8 ，次数为 5 D. 系数为 -2 ，次数为 7

5. 若 $m^2 + m - 1 = 0$ ，则 $m^3 + 2m^2 + 2019$ 的值为 ()

- A. 2019 B. 2020 C. 2021 D. 2022

6. 观察下列关于 m, n 的单项式的特点： $\frac{1}{2}m^2n, \frac{2}{3}m^2n^2, \frac{3}{4}m^2n^3, \frac{4}{5}m^2n^4, \frac{5}{6}m^2n^5, \dots$ ，按此规律，

第 n 个单项式是 ()

- A. $\frac{n}{n+1}m^2n^n$ B. $\frac{n}{n+1}m^n n^n$ C. $\frac{n-1}{n}m^2n^n$ D. $\frac{n-1}{n}m^n n^n$

二、填空题

7. 下列式子： $x^2+2, \frac{1}{a}+4, \frac{3ab^2}{7}, \frac{ab}{c}, -5x$ ，整式的个数是_____个。

8. 单项式 $-\frac{6}{7}x^4y^3$ 的系数与次数的积是_____。

9. 请你写出一个单项式，使它的系数为负数，次数为 3：_____。

10. 单项式 $3x^a y^2$ 的次数是 4，则 a 的值为_____。

11. 如果单项式 $-x^{m-2}y^2$ 与 $4xy^n$ 是同类项，那么 $m-n=$ _____。

12. 小马虎在抄写一个 5 次单项式 $-\frac{2}{3}xy^{\square}z^{\square}$ 时，误把字母 $y、z$ 上的指数给漏掉了，原单项式可能是_____
(填一个即可)。

三、解答题

13. 下列各题中的两项是不是同类项？为什么？

(1) $23xy$ 与 $3yx$ ；

(2) $-2a^3b^2$ 与 $5b^3a^2$ ；

(3) $\frac{m^2n}{3}$ 与 $2m^2n$ ；

(4) $4ab^4c$ 与 $3acb^4$ ；

(5) 2×10^3t 与 1.5×10^2t 。

14. 指出下列代数式中的单项式，并写出各单项式的系数和次数。

$-\frac{3a^2b}{4}, -a, 2^4x^4, \frac{a}{mn}, 3\pi a^2y^2, a-3, -\frac{5}{3}, -3 \times 10^8tm^2, x^2y$

15. 分别写出下列单项式的系数和次数。

(1) $-ab^2$;

(2) $\frac{5ab^3c^2}{7}$;

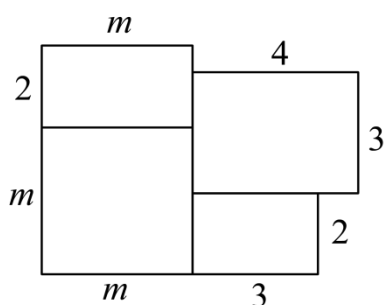
(3) $\frac{2\pi xy^2}{3}$.

16 . 已知 $3x^{a+1}y^{b-2}$ 与 $\frac{2}{5}x^2y$ 是同类项，求 $2a^2b + 3a^2b - a^2b$ 的值 .

17 . (1) 已知关于 x , y 的单项式 $-3\pi x^{2b+1}y^2$ 与 $\frac{10xy^3}{7}$ 的次数相同，求 b 的值；

(2) 若 $(m+2)x^{2m} - 2n^2$ 是关于 x 的四次单项式，求 m , n 的值，并写出这个单项式 .

18 . 赵叔叔准备买一套新房子，这套住房的建筑平面图（由四个长方形组成）如图所示：



用含 m 的式子表示这套住房的总面积 .

19 . 观察下列三行单项式：

$-2x$, $4x^2$, $-8x^3$, $16x^4$, $-32x^5$, $64x^6$, ... ; ①

$-x$, $5x^2$, $-7x^3$, $17x^4$, $-31x^5$, $65x^6$, ... ; ②

$-4x^2$, $8x^3$, $-16x^4$, $32x^5$, $-64x^6$, $128x^7$, ③

根据你发现的规律，解答下列问题：

(1) 第①行的第 8 个单项式为_____；

(2) 第②行的第 9 个单项式为_____；

(3) 第③行的第 n 个单项式为_____；（用含有 n 的式子表示）

(4) 取每一行的第 8 个单项式，令这三个单项式的和为 M . 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时，求 M 的值 .

