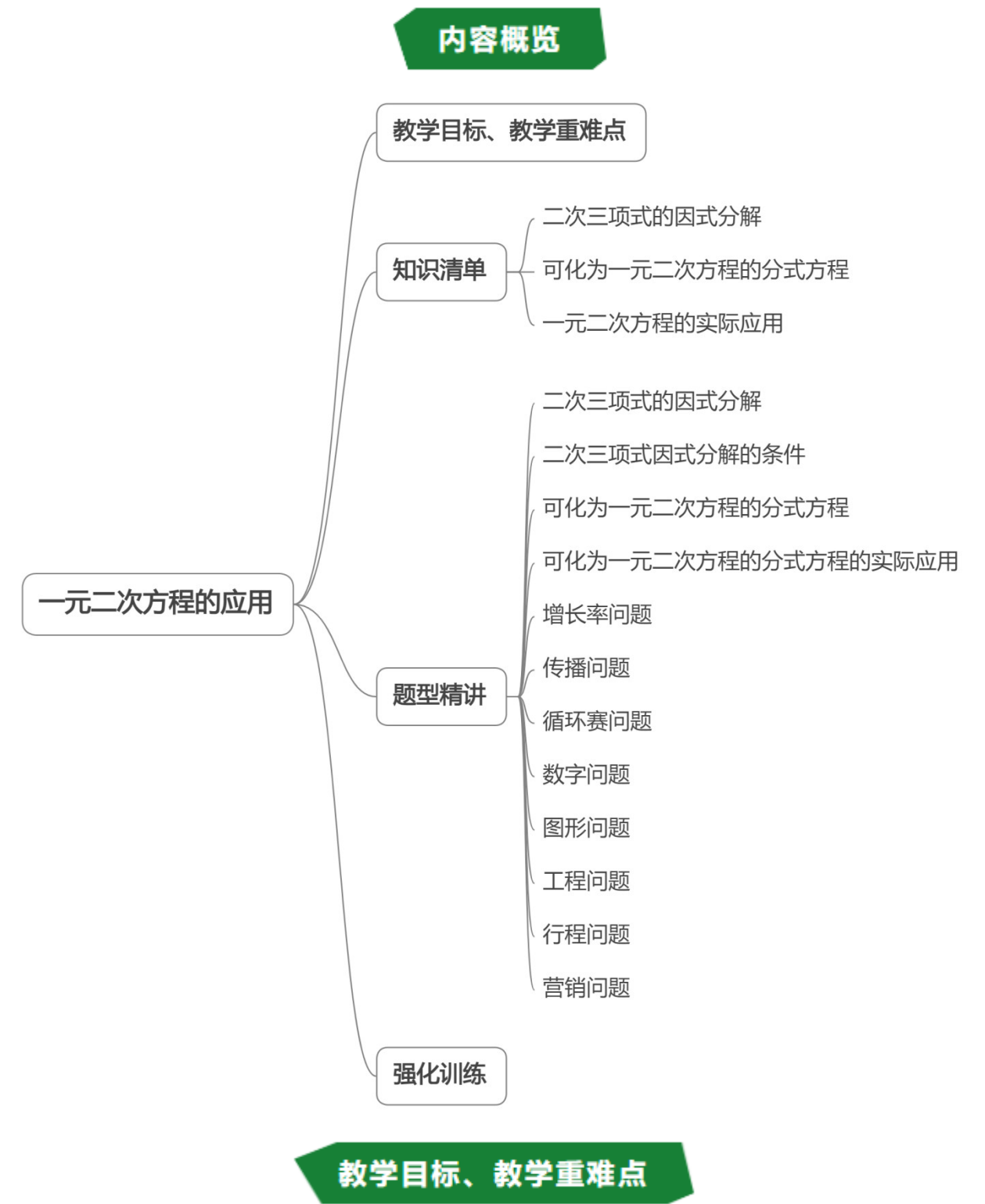


专题 21.7 一元二次方程的应用



教学目标	1. 掌握二次三项式的因式分解； 2. 学习可化为一元二次方程的分式方程及其应用；
------	--

	3. 会解一元二次方程的实际应用。
教学重难点	1.重点 (1) 结合韦达定理，推理得出二次三项式因式分解的通式； (2) 解可化为一元二次方程的分式方程及其实际应用题； (3) 掌握一些常考的一元二次方程实际应用题型。 2.难点 (1) 复杂的一元二次方程实际应用题，如营销问题； (2) 一元二次方程的几何应用。

知识清单

知识点1 二次三项式的因式分解

我们曾经在有理数范围内讨论过整式的因式分解.现在，我们将在实数范围内讨论二次三项式的因式分解.

在解一元二次方程 $2x^2-10x+12=0$ 时，可以先把方程左边因式分解，得 $2(x-3)(x-2)=0$,从而解得方程的两个根 $x_1=3, x_2=2$.

反过来，也可以通过求出一元二次方程的根把二次三项式因式分解.

设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 x_1, x_2 ,那么根据韦达定理可以知道：

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \text{即 } a = -\left(\frac{b}{x_1 + x_2}\right), \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$$

$$\text{所以 } ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &=a\left[x^2-\left(\frac{x_1+x_2}{1}\right)x+x_1 \cdot x_2\right] \\
 &=a(x-x_1)(x-x_2)
 \end{aligned}$$

这就是说，要将二次三项式 ax^2+bx+c 因式分解，如果 $b^2-4ac \geq 0$,可以用求根公式求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根 x_1, x_2 ,然后得到 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

但如果 $b^2-4ac < 0$,那么二次三项式 ax^2+bx+c 在实数范围内就不能因式分解.

【即学即练】

1. 在实数范围内因式分解： $2x^2-2x-5=$ _____.

2. 在实数范围内分解因式 $-2x^2 + x + 2 =$ _____ .
3. 二次三项式 $ax^2 + 2x - 3$ 在实数范围内能分解因式，那么 a 的取值范围是_____ .
4. 把二次三项式 $2x^2 - 8xy + 5y^2$ 因式分解，下列结果正确的是 ()

A. $\left(x - \frac{4 - \sqrt{6}}{2}y\right)\left(x - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)$

B. $2\left(x + \frac{4 - \sqrt{6}}{2}y\right)\left(x + \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)$

C. $2\left(x - \frac{4 - \sqrt{6}}{2}y\right)\left(x - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)$

D. $(2x - 4y + \sqrt{6}y)\left(x - \frac{4 + \sqrt{6}}{2}y\right)$

知识点 2 可化为一元二次方程的分式方程

1. **复习**：在七年级学习“分式”这一章时，我们认识了分式方程，讨论了可化为一元一次方程的分式方程的解

法.例如，分式方程 $\frac{2}{x+1} = 3$ 和 $\frac{1}{x} = \frac{3}{x-1}$ ，通过去分母都可转化为一元一次方程求解.

2. **解方程**： $\frac{x}{x-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$

方程两边同乘 $(x-1)(x+1)$ ，去分母得

$x(x+1)=2$.整理，得 $x^2+x-2=0$.

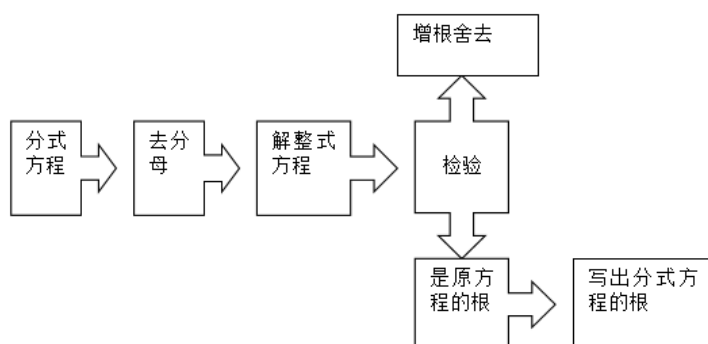
解这个整式方程，得 $x_1=2, x_2=1$.

检验：当 $x=-2$ 时，代入原方程，等式成立；当 $x=1$ 时，代入原方程，右端分母为 0,无意义，即 $x=1$ 为增根，应舍去.

所以，原方程的根是 $x=-2$.

3. **可化为一元二次方程的分式方程**：在求解上面的分式方程时，去分母后所得到的整式方程是一个一元二次方程，所以上面的分式方程是可化为一元二次方程的分式方程，其求解步骤与解可化为一元一次方程的分式方程类似.

4. **求解可化为一元二次方程的分式方程的步骤**.



【即学即练】

1. 方程 $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$ 的解是_____.
2. 解方程： $\frac{x-10}{x^2-4} + 1 = \frac{3}{x+2}$.
3. 星期天早上小明从家出发到离家 5 千米的博物馆参观，实际每小时比原计划多走 1 千米，结果比原计划早到了 10 分钟，求小明原计划每小时走多少千米
4. 某工程队接到一道路改建任务，需为盲人修建一条长 3000 米的盲道．根据要求，该工程队在实际施工时增加了施工人员，每天修建的盲道比原来计划多 250 米，结果提前 2 天完成工程．问实际每天修建盲道多少米．

知识点 3 一元二次方程的实际应用

一、列一元二次方程解应用题的一般步骤

审题→寻找数量关系和等量关系→设未知数（直接假设和间接假设）→列一元二次方程→解方程→检验→作答。

二、一元二次方程应用题的主要类型

1. 平均变化率问题

列一元二次方程解决增长(降低)率问题时，要理清原来数、后来数、增长率或降低率，以及增长或降低的次数之间的数量关系.如果列出的方程是一元二次方程，那么应在原数的基础上增长或降低两次.

(1) 增长率问题：

平均增长率公式为 $a(1+x)^n = b$ (a 为原来数，x 为平均增长率，n 为增长次数，b 为增长后的量.)

(2) 降低率问题：

平均降低率公式为 $a(1-x)^n = b$ (a 为原来数，x 为平均降低率，n 为降低次数，b 为降低后的量.)

2. 数字问题

(1) 任何一个多位数都是由数位和数位上的数组成.数位从右至左依次分别是：个位、十位、百位、千位……，它们数位上的单位从右至左依次分别为：1、10、100、1000、……，数位上的数字只能是 0、1、2、……、9 之中的数，而最高位上的数不能为 0.因此，任何一个多位数，都可用其各数位上的数字与其数

位上的单位的积的和来表示，这也就是用多项式的形式表示了一个多位数.如：一个三位数，个位上数为 a ，十位上数为 b ，百位上数为 c ，则这个三位数可表示为： $100c+10b+a$.

(2)几个连续整数中，相邻两个整数相差 1.

如：三个连续整数，设中间一个数为 x ，则另两个数分别为 $x-1$ ， $x+1$.

几个连续偶数(或奇数)中，相邻两个偶数(或奇数)相差 2.

如：三个连续偶数(奇数)，设中间一个数为 x ，则另两个数分别为 $x-2$ ， $x+2$.

3.利息问题

(1)概念：

本金：顾客存入银行的钱叫本金. 利息：银行付给顾客的酬金叫利息.本息和：本金和利息的和叫本息和.

期数：存入银行的时间叫期数. 利率：每个期数内的利息与本金的比叫利率.

(2)公式:利息=本金 $\times$ 利率 $\times$ 期数 利息税=利息 $\times$ 税率 本金 $\times$ (1+利率 $\times$ 期数)=本息和

本金 $\times$ [1+利率 $\times$ 期数 $\times$ (1-税率)]=本息和(收利息税时)

4.利润(销售)问题

利润(销售)问题中常用的等量关系： 利润=售价-进价(成本) 总利润=每件的利润 $\times$ 总件数

利润率= $\frac{\text{利润}}{\text{进价(或成本)}} \times 100\%$, 标价 $\times \frac{\text{打折数}}{10}$ = 售价

进价 $\times$ (1+利润率) = 标价 $\times \frac{\text{打折数}}{10}$

5.形积问题 此类问题属于几何图形的应用问题，解决问题的关键是将不规则图形分割或组合成规则图形，根据图形的面积或体积公式，找出未知量与已知量的内在关系并列方程.

【即学即练】

1. 某超市一月份的营业额为 200 万元，第一季度的营业额共 1000 万元，如果平均每月增长率为 x ，则由题意列方程应为 ()

A. $200(1+x)^2 = 1000$

B. $200 + 200 \times 2 \cdot x = 1000$

C. $200 + 200 \times 3 \cdot x = 1000$

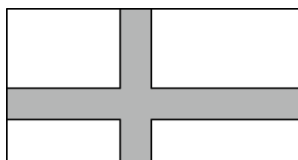
D. $200[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 1000$

2. 一次会议上，每两个参加会议的人都互相握了一次手，有人统计一共握了 66 次手. 若设这次会议到会的人数为 x 人，依题意可列方程为 ()

A. $\frac{1}{2}x(x-1) = 66$ B. $\frac{1}{2}(1+x)^2 = 66$ C. $x(1+x) = 66$ D. $x(x-1) = 66$

3. 有一个两位数等于其数字之积的 2 倍，其十位数字比个位数字小 3，求这个两位数.

4. 如图，在长为 100 米，宽为 80 米的矩形场地上修建两条宽度相等且互相垂直的道路，剩余部分进行绿化，要使绿化面积为 7644 平方米，设道路的宽为 x 米，则可列方程为 ()



A . $100 \times 80 + 100x - 80x = 7644$

B . $(100-x)(80-x) + x^2 = 7644$

C . $(100-x)(80-x) = 7644$

D . $100x + 80x = 356$

5. 某商场销售一批名牌衬衫, 平均每天可售出 20 件, 每件盈利 40 元, 为了扩大销售, 增加盈利, 尽快减少库存, 商场决定采取适当的降价措施, 经市场调查发现, 如果每件衬衫每降价 1 元, 那么商场平均每天可多售出 2 件, 若商场想平均每天盈利达 1200 元, 求每件衬衫应降价多少元?

题型精讲

题型 01 二次三项式的因式分解

【典例 1】. 在实数范围内因式分解: $3x^2 + 2x - 2 =$ _____ .

【变式 1】. 在实数范围内分解因式: $2y^2 - 6y + 1 =$ _____ .

【变式 2】. 在实数范围内分解因式: $-2x^2 + 3xy + y^2 =$ _____ .

题型 02 二次三项式因式分解的条件

【典例 1】. 如果二次三项式 $px^2 + 2x - 1$ 在实数范围内可以因式分解, 求 p 的取值范围.

【变式 1】. 下列关于 x 的二次三项式在实数范围内不能够因式分解的是 ()

A . $x^2 - 3x + 2$; B . $x^2 - \sqrt{2}x + 1$; C . $2x^2 - xy - y^2$; D . $x^2 + 3xy + y^2$.

【变式 2】. 若二次三项式 $ax^2 + 3x + 4$ 在实数范围内能因式分解, 则 a 的最大整数解为 _____ .

题型 03 可化为一元二次方程的分式方程

【典例 1】. 解方程: $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{2}$.

【变式 1】. 解方程: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$.

【变式 2】．解方程： $\frac{2x}{x+3} - \frac{18}{x^2+3x} = 1$ ．

题型 04 可化为一元二次方程的分式方程的实际应用

【典例 1】．学校艺术节需用红纸花 3000 朵，某班全体同学自愿承担这批红纸花的制作任务，在实际制作时，有 10 名同学因排练节目而没有参加，这样参加劳动的同学平均每人制花的数量比原定全班同学平均每人要完成的数量多 15 朵，设这个班级共有 x 名同学，根据题意可得方程（ ）

- A. $\frac{3000}{x} - \frac{3000}{x-10} = 15$ B. $\frac{3000}{x-10} - \frac{3000}{x} = 15$
C. $\frac{3000}{x} - \frac{3000}{x+10} = 15$ D. $\frac{3000}{x+10} - \frac{3000}{x} = 15$

【变式 1】．某工程队接到一道路改建任务，需为盲人修建一条长 3000 米的盲道．根据要求，该工程队在实际施工时增加了施工人员，每天修建的盲道比原来计划多 250 米，结果提前 2 天完成工程．问实际每天修建盲道多少米．

【变式 2】．2025 年 4 月 19 日，全球首次“人机共跑”半程马拉松在北京完赛，国内高校、科研机构、企业等 20 支机器人队伍参赛，其中 6 支成功完赛，这些技术突破具有里程碑的意义，未来将应用于工业制造、物流分拣、特种作业、家庭服务或养老服务等场景．这次机器人马拉松比赛里程约为 21km，北京天工机器人获得冠军，松延动力机器人获亚军．北京天工机器人每小时比松延动力机器人多跑 2km，用时比松延动力机器人少 $\frac{7}{8}$ 小时，求松延动力机器人的平均速度是多少 km/h？

题型 05 增长率问题

【典例 1】．某厂今年十月份的总产量为 500 吨，十二月份的总产量达到 720 吨．若平均每月增长率是 x ，则可以列出方程（ ）

- A. $500(1+2x) = 720$ B. $720(1-x) = 500$
C. $500(1+x^2) = 720$ D. $500(1+x)^2 = 720$

【变式 1】．某种型号的优盘经过两次降价后，每只由原来的 200 元下降至 128 元，则这种型号的优盘平均每次降价的百分率为_____．

【变式 2】．某超市一月份的营业额为 300 万元，第一季度的营业额共 1200 万元，如果平均每月增长率为 x ，则由题意可列方程为（ ）

A . $300(1+x)^2 = 1200$

B . $300 + 300 \times 2x = 1200$

C . $300 + 300 \times 3x = 1200$ D . $300[1 + (x+1) + (x+1)^2] = 1200$

【变式3】 . 上海某企业今年二月份的产值比一月份的产值增长20%，三月以来，生产呈现出下降趋势，四月份的产值比一月份的产值下降15.2% . 若三、四月份的月平均下降率为 x ，则以下关系正确的是 ()

A . $(1+20\%)(1-2x) = 1-15.2\%$;

B . $(1+20\%)(1-x) = 1-15.2\%$;

C . $(1+20\%)(1-15.2\%) = (1-x)^2$;

D . $(1+20\%)(1-x)^2 = 1-15.2\%$.

题型 06 传播问题

【典例1】 . 有2个人患了流感，经过两轮传染后共有72人患了流感，若设平均每轮传染 x 人，则可列方程为_____ .

【变式1】 . 有一人患了流感，经过两轮传染后，共有81人患了流感，每轮传染中平均每人传染了 x 个人，下列结论：①1轮后有 $(x+1)$ 个人患了流感；②第2轮又增加 $(x+1)^2$ 个人患流感；③依题意可得方程 $(x+1)^2 = 81$ ；④不考虑其他因素经过三轮一共会有648人感染 . 所以正确的结论为 ()

A . ①③

B . ①②③

C . ①③④

D . ①②③④

【变式2】 . 某种植物的主干长出若干数目的支干，每个支干又长出同样数目的小分支，主干、支干和小分支的总数是157，设每个支干长出的小分支数目为 x ，根据题意，下面所列方程正确的是 ()

A . $1+x+x^2 = 157$

B . $x+x^2 = 157$

C . $(1+x)^2 = 157$

D . $1+(1+x)^2 = 157$

题型 07 循环赛问题

【典例1】 . 组织一次篮球联赛，赛制为单循环形式，计划安排15场比赛，邀请_____个球队参加比赛 .

【变式1】 . 北京冬奥会女子冰壶比赛有若干支队伍参加了单循环比赛，单循环比赛共进行了45场，设有 x 支队伍参加比赛，可列方程为：_____ .

【变式2】 . 三对三篮球赛第一轮采用单循环赛制（每支队伍与其他队伍只比一场），共计45场比赛 . 则有_____支队伍参加比赛 .

【变式3】 . 小川一家春节期间团圆相聚，他和兄弟姐妹们约定了互赠一份礼物，若他们一共赠送了90份礼物，则小川及兄弟姐妹一共多少人？若设小川及兄弟姐妹一共有 x 人，则可列方程为_____.

题型 08 数字问题

【典例1】 . 如果两个连续正偶数的积为120，则这两个数是_____.

【变式1】 . 一个两位数，它们的十位数字与个位数字之和为8，如果把十位数字与个位数字调换后，所得的两位数乘以原来的两位数就得1855，求原来的两位数.

【变式2】 . 下图是某一个月的日历表，在表上可以用一个方框圈出4个数（如图所示）. 请用方程知识解答下列问题：

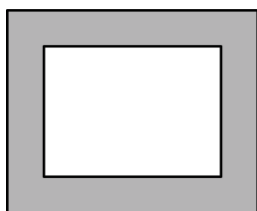
2023年06月						
日	一	二	三	四	五	六
				1	2	3
				儿童节	8	9
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

(1)若在圈出的四个数中，最小数与最大数的乘积为84，求最小数.

(2)在圈出的四个数中，最小数与最大数的乘积能为33吗？请说明理由.

题型 09 图形问题

【典例1】 . 如图，从一个长10分米、宽8分米的铁片中间截去一个面积为60平方分米的小长方形，使剩下长方形框四周宽度一样，如果设这个宽度为 x 分米，那么所列出的方程是（ ）

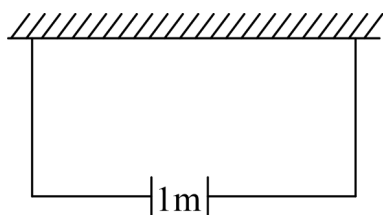


A . $(10-x)(8-x)=10\times 8-60$

B . $(10-x)(8-x)=60$

C . $(10-2x)(8-2x)=60$ D . $2(10-x)(8-x)=60$

【变式1】 . 如图，要建一个面积为75平方米的仓库，仓库的一边靠墙，并在与墙平行的一边开一道1米宽的门，现有32米长的木板，求仓库的长与宽. 设仓库垂直于墙面的一边长度为 x 米，则可列方程为（ ）



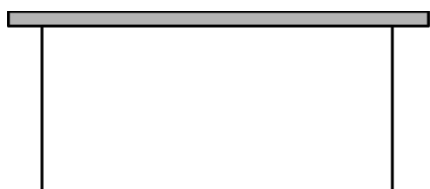
A . $(31-2x)x = 75$

B . $(32-2x)x = 75$

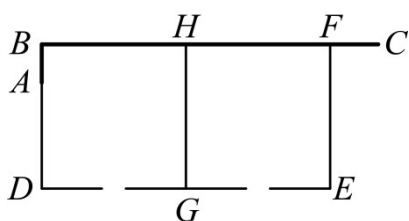
C . $(33-2x)x = 75$

D . $(32-2x)(x+1) = 75$

【变式2】 . 某建筑工程队，在工地一边的靠墙处，墙长40米，用120米长的铁栅栏围一个所占地形状为长方形的临时仓库，铁栅栏只围三边，如果长方形的面积为1152平方米，那么长方形的两条邻边长是多少米？



【变式3】 . 如图，某体育场准备利用一堵呈“L”形的围墙（粗线 $A-B-C$ 表示墙，墙足够高）改建室外篮球场，已知 $AB \perp BC$ ， $AB = 8$ 米， $BC = 70$ 米，现计划用总长为136米的围网围建两个矩形篮球场，并在每个篮球场开一个宽3米的门（细线表示围网，两个篮球场之间用围网 GH 隔开），为了充分利用墙体，点 F 必须在线段 BC 上，如果围成的篮球场 $BDEF$ 的面积为1200平方米，设 EF 的长为 x 米．那么根据题意可列方程为_____．



题型10 工程问题

【典例1】 . 全球疫情爆发时，口罩极度匮乏，中国许多企业都积极地生产口罩以应对疫情，经调查发现：1条口罩生产线最大产能是78000个/天，每增加1条生产线，每条生产线减少2000个/天，工厂的产线共 x 条

(1) 该工厂最大产能是_____个/天（用含 x 的代数式表示）．

(2) 若该工厂引进的生产线每天恰好能生产口702000个，该工厂引进了多少条生产线？

【变式1】 . 随着铁路运量的不断增长，重庆火车北站越来越拥挤，为了满足铁路交通的快速发展，该火车站从去年开始启动了扩建工程，其中某项工程，甲队单独完成所需时间比乙队单独完成所需时间多5个月，并且两队单独完成所需时间的乘积恰好等于两队单独完成所需时间之和的6倍。

(1) 求甲、乙队单独完成这项工程各需几个月？

(2) 若甲队每月的施工费为100万元，乙队每月的施工费比甲队多50万元，在保证工程质量的前提下，为了缩短工期，拟安排甲、乙两队分工合作完成这项工程。在完成这项工程中，甲队施工时间是乙队施工时间的2倍，那么，甲队最多施工几个月才能使工程款不超过1500万元？(甲、乙两队的施工时间按月取整数)

题型11 行程问题

【典例1】 . 在京珠高速公路上行驶着一辆时速为108千米的汽车，突然发现前面有情况，紧急刹车后又滑行30米才停车。刹车后汽车滑行10米时用了()秒。

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{6-\sqrt{30}}{3}$ D. $\frac{6-2\sqrt{6}}{3}$

【变式1】 . 《九章算术》“勾股”章有一题：“今有二人同所立。甲行率七，乙行率三。乙东行，甲南行十步而斜东北与乙会，问甲、乙行各几何，”大意是说：已知甲、乙二人同时从同一地点出发，甲每单位时间走7步，乙每单位时间走3步。乙一直向东走，甲先向南走10步，后又斜向北偏东方向走了一段后与乙相遇。那么相遇时，甲、乙各走了多远？若设相遇时，甲、乙行走了 x 个单位时间，则下面由题意所列方程正确的是()

- A. $(3x)^2 + 10^2 = (7x - 10)^2$ B. $(3x)^2 + (7x - 10)^2 = 10^2$
C. $(7x)^2 + 10^2 = (3x - 10)^2$ D. $(7x)^2 + (3x - 10)^2 = 10^2$

【变式2】 . 甲、乙两个机器人分别从相距70m的A、B两个位置同时相向运动。甲第1分钟走2m，以后每分钟比前1分钟多走1m，乙每分钟走5m。

(1) 甲、乙开始运动后多少分钟第一次同时到达同一位置？

(2) 如果甲、乙到达A或B后立即折返，甲继续每分钟比前1分钟多走1m，乙继续按照每分钟5m的速度行走，那么开始运动后多少分钟第二次同时到达同一位置？

题型12 营销问题

【典例 1】 . 某商店以 2400 元购进某种盒装茶叶，第一个月每盒按进价增加 20% 作为售价，售出 50 盒，第二个月每盒以低于进价 5 元作为售价，售完余下的茶叶 . 在整个买卖过程中盈利 350 元，求每盒茶叶的进价 .

【变式 1】 . 小丽的叔叔分别用 300 元和 400 元钱从甲乙两地购进数量不等的同一商品，已知乙地商品比甲地每件便宜 1 元，从乙地购进的商品数量比甲地购进的商品数量多 40 件，如果小丽的叔叔按每件 15 元销售该商品，且全部销售完，那么小丽的叔叔从甲地共购进商品多少件？总共可赚多少元？

【变式 2】 . 为助力脱贫攻坚，某村村委会在网上直播销售该村优质农产品礼包，已知其 3 月份的销售量达到 400 包，若农产品礼包每包的进价 25 元，原售价为每包 40 元，该村在今年 4 月进行降价促销，经调查发现，若农产品礼包每包降价 1 元，销售量可增加 5 袋，当农产品礼包每包降价多少元时，这种农产品在 4 月份可获利 4620 元？

【变式 3】 . 上海市公安交警部门提醒市民，骑车出行必须严格遵守“一盔一带”的规定 . 某头盔经销商统计了某品牌头盔 9 月份到 11 月份的销量，该品牌头盔 9 月份销售 500 个，11 月份销售 720 个，9 月份到 11 月份销售量的月增长率相同 .

(1) 求该品牌头盔销售量的月增长率；

(2) 若此种头盔的进价为 40 元/个，商家经过调查统计，当售价为 50 元/个时，月销售量为 500 个，若在此基础上售价每上涨 2 元/个，则月销售量将减少 10 个，为使月销售利润达到 9000 元，且尽可能让顾客得到实惠，则该品牌头盔每个售价应定为多少钱？

强化训练

一、单选题

1 . 某商场对一款无人机进行降价促销，其售价由最初的 400 元经过两次降价后变为 225 元，且两次降价的百分率相同 . 设每次降价的百分率为 x ，可列方程为 ()

A . $400(1-x^2) = 225$

B . $225(1+x)^2 = 400$

C . $400(1-x)^2 = 225$

D . $400(1-2x) = 225$

2 . 将 $4x^2 + 4x - 1$ 分解因式正确的是 ()

A . $(2x-1)^2$

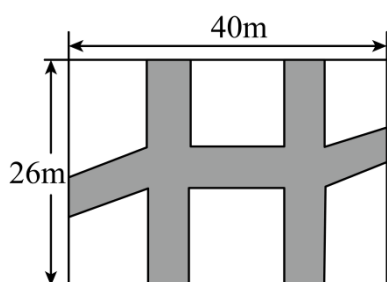
B . $\left(x - \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right)$

$$C. 4\left(x + \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{-1-\sqrt{2}}{2}\right) \quad D. (2x+1-\sqrt{2})(2x+1+\sqrt{2})$$

3. 如果关于 x 的二次三项式 $ax^2 + 3x + 4$ 在实数范围内能分解因式，那么 a 的取值范围是 ()

$$A. 0 < a < \frac{9}{16} \quad B. a \leq \frac{9}{16} \quad C. a = \frac{9}{16} \quad D. a \leq \frac{9}{16} \text{ 且 } a \neq 0$$

4. 现要在一个长为 40m，宽为 26m 的长方形花园中修建等宽的小道，剩余的地方种植花草。如图所示，要使种植花草的面积为 $864m^2$ ，若设小道的宽度为 xm ，则由题意可列方程为 ()



$$A. (40-2x)(26-x) = 40 \times 26 - 864 \quad B. (40-2x)(26-x) = 864$$

$$C. (40-x)(26-2x) = 864 \quad D. (40-2x)(26-x) + 2x^2 = 864$$

5. 今年“国庆节”和“中秋节”双节期间，某微信群规定，群内的每个人都要发一个红包，并保证群内其他人

都能抢到且自己不能抢自己发的红包，若此次抢红包活动，群内所有人共收到 90 个红包，则该群一共有()

$$A. 9 \text{ 人} \quad B. 10 \text{ 人} \quad C. 11 \text{ 人} \quad D. 12 \text{ 人}$$

6. 直播购物逐渐走进了人们的生活。某电商在抖音上对一款成本价为 40 元的小商品进行直播销售，如果按每件 60 元销售，每天可卖出 20 件。通过市场调查发现每件小商品售价每降低 1 元，日销售量增加 2 件。若日利润保持不变。商家想尽快销售完该款商品。每件售价应定为多少元 ()

$$A. 45 \quad B. 50 \quad C. 55 \quad D. 60$$

二、填空题

7. 根据上海市统计局数据，上海市 2021 年的地区生产总值约是 4.32 万亿，2023 年的地区生产总值约是 4.72 万亿，设这两年上海市地区生产总值的年平均增长率都为 x ，根据题意可列方程_____。

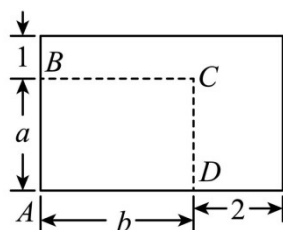
8. 我国新能源汽车发展迅速，某品牌电动车第一季度销量达 10 万辆，预计第二季度的销量比第一季度增长 10%，第三季度的销量比第二季度增长 20%，那么预计第三季度的销量为_____万辆。

9. 在实数范围内分解因式： $x^2 - 3xy - 2y^2 =$ _____.

10. 若干个好朋友除夕夜打电话互相问候，两个朋友之间都通话交流一次，一共通话21次，设这些朋友一共 x 人，则可列方程：_____.

11. 有一个两位数，如果个位上的数比十位上的数大1，并其十位上的数的平方比个位上的数也大1，那么这个两位数是_____.

12. 如图是一块长方形菜地 $ABCD$ ， $AB = am$ ， $AD = bm$ ，面积为 Sm^2 . 现将边 AB 增加1m，边 AD 增加2m，若有且只有一个 a 的值，使得到的长方形面积为 $2Sm^2$ ，则 S 的值是_____.



三、解答题

13. 解方程： $\frac{2x}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = 1$.

14. 解方程： $\frac{x-3}{x-2} - \frac{2}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x-1}$.

15. 在实数范围内分解因式：

(1) $a^2 - 3a + 1$.

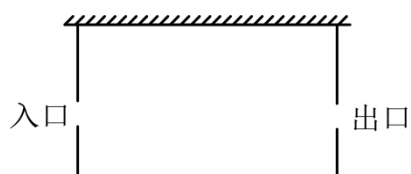
(2) $2x^2y^2 - 3xy - 4$.

16. 一种笔记本电脑，原来的售价是15000元，经过连续两年的降价，今年每台售价为12150元，每年降价的百分率相同.

(1) 年降价的百分率是多少？

(2) 小明是去年购买这种笔记本的，那么与今年的售价相比，他多付了多少元？

17. 某单位组织员工前往九棵树艺术中心欣赏民族舞表演. 表演前，主办方工作人员准备利用11米长的墙为一边，用20米隔栏绳为另三边，设立一个面积为60平方米的长方形等候区，如图，为了方便群众进出，在两边空出两个各为1米的出入口（出入口不用隔栏绳）. 假设这个长方形平行于墙的一边为长，垂直于墙的一边为宽，那么围成的这个长方形的长与宽分别是多少米？

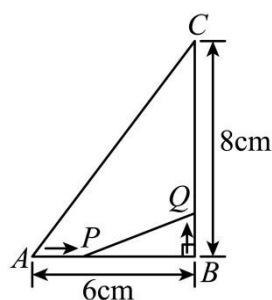


18. 列方程解决下列问题.

材料一：2023 年 7 月 6 日~8 日，机器人足球世界杯中国赛（上海分赛场）暨张江智能机器人科创展示在“世界人工智能大会”张江分会场正式举行．假设参赛的每两个队之间都要比赛一场，赛程安排 3 天，每天安排 145 场比赛，求共有多少支队伍参赛？

材料二：2025 年 4 月 19 日，全球首次“人机共跑”半程马拉松在北京完赛，国内高校，科研机构，企业等 20 支机器人队伍参赛，其中 6 支成功完赛，这些技术突破具有里程碑的意义，未来将应用于工业制造，物流分拣，特种作业，家庭服务或养老服务等场景．这次机器人马拉松比赛里程约为 21km，北京天工机器人获得冠军，松延动力机器人获亚军．北京天工机器人每小时比松延动力机器人多跑 2km，用时比松延动力机器人少 $\frac{7}{8}$ h，求松延动力机器人的平均速度(km/h)是多少？

19. 如图所示， $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$, $AB = 6\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$.



(1) 点 P 从点 A 开始沿 AB 边向 B 以 1cm/s 的速度移动，点 Q 从 B 点开始沿 BC 边向点 C 以 2cm/s 的速度移动，如果 P, Q 分别从 A, B 同时出发，经过几秒，点 P 和点 Q 间的距离是 6cm ？

(2) 点 P 从点 A 开始沿 AB 边向 B 以 1cm/s 的速度移动，点 Q 从 B 点开始沿 BC 边向点 C 以 2cm/s 的速度移动，如果 P, Q 分别从 A, B 同时出发，线段 PQ 能否将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分？若能，求出运动时间；若不能说明理由；

(3) 若 P 点沿射线 AB 方向从 A 点出发以 1cm/s 的速度移动，点 Q 沿射线 CB 方向从 C 点出发以 2cm/s 的速度移动， P, Q 同时出发，问几秒后， $\triangle PBQ$ 的面积为 1cm^2 ？