

专题 01 分式 压轴题

题型归纳

题型一：比较大小问题

题型二：分式的求值问题

题型三：特殊的分式求值问题

题型四：材料、规律题

题型五：含参数类分式方程；新定义题

题型六：分式与分式方程的实际应用

题型七：分式与分式方程的综合应用

题型专练

题型一：比较大小问题

1. 已知 $b > a > 0$.

(1) 比较大小： $\frac{a}{b} - \frac{a+1}{b+1}$ (填“>”、“<”或“=”)；

(2) 若 $c > 0$ ，比较 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{a+c}{b+c}$ 的大小；

(3) 下列结论正确的是_ (写出所有正确结论的序号) .

① 若 $n > m > 0$ ，则 $\frac{m+2}{n+2} < \frac{m}{n}$ ；

② 若 $n > m > 2$ ，则 $\frac{m-2}{n-2} < \frac{m}{n}$ ；

③ 若 $n > m > 2$ ，则 $\frac{m-2}{n-2} > \frac{m+1}{n+1}$ ；

④ 若 $n > m > 2021$ ，则 $\frac{m+2022}{n+2022} > \frac{m-2021}{n-2021}$.

2. 【提出问题】

已知 $m > n > 0$ ， $a > 0$ ，分式 $\frac{n}{m}$ 的分子、分母都加上 a 后，所得分式 $\frac{n+a}{m+a}$ 的值与 $\frac{n}{m}$ 相比是增大了还是减小了？

【观察发现】

观察下列式子： $\frac{2}{3} < \frac{2+1}{3+1}$ ， $\frac{2}{3} < \frac{2+2}{3+2}$ ， $\frac{2}{3} < \frac{2+3}{3+3}$ ， $\frac{2}{3} < \frac{2+4}{3+4}$ ，…对于真分数 $\frac{2}{3}$ ，当分子、分母同时加上同一个大

于 0 的数 a 时，所得分数的值变大，即 $\frac{2}{3} < \frac{2+a}{3+a}$ 。

【探究验证】

(1) 对于 $\frac{2}{3} < \frac{2+a}{3+a}$ ，我们可以用“作差法”进行证明：

$$\frac{2}{3} - \frac{2+a}{3+a} = \frac{2(3+a) - 3(2+a)}{3(3+a)} = \frac{-a}{3(3+a)}.$$

$$\because a > 0,$$

$$\therefore -a < 0, \quad 3(3+a) > 0.$$

$$\therefore \frac{-a}{3(3+a)} < 0, \quad \text{即} \quad \frac{2}{3} - \frac{2+a}{3+a} < 0.$$

$$\therefore \frac{2}{3} < \frac{2+a}{3+a};$$

(2) 由 (1) 我们可猜想 $\frac{n}{m}$ 与 $\frac{n+a}{m+a}$ 的大小关系是： $\frac{n}{m} < \frac{n+a}{m+a}$ ，请你用“作差法”证明你的结论；

【拓展思考】

(3) 若 $n > m > 0$ ， $a > 0$ 时，(2) 中的不等式是否依然成立？若不成立，请写出正确的式子；

【方法应用】

(4) 已知甲、乙两船同时从 A 港出发航行，设甲、乙两船在静水中的速度分别为 v_1 、 v_2 ，水流速度为 v_0 ($v_1 > v_2 > v_0 > 0$)，两船同向航行 1 小时后立即返航，甲、乙两船返航所用时间分别为 t_1 、 t_2 ，请比较 t_1 ， t_2 的大小，判断哪条船先返回 A 港？并说明理由。

题型二：分式的求值问题

3. 已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$ ，则 $x^3 - 5x + \frac{1}{x^2}$ 的值为 ()

- A . 4 B . 5 C . ± 4 D . ± 5

4. 若 $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$ (A 、 B 、 C 均为常数) 的计算结果为 $\frac{x^2+2}{x(x+1)(x+2)}$, 则 $A+B+2C$ 的值为 ()

- A . 1 B . 2 C . 3 D . 4

5. 已知 a 是实数, 并且 $a^2 - 2023a + 4 = 0$, 则代数式 $a^2 - 2022a + \frac{8092}{a^2+4} + 4$ 的值是 ()

- A . 2020 B . 2021 C . 2022 D . 2023

6. 设 $abc=1$, 则 $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} =$ ()

- A . 1 B . 2 C . 3 D . 4

7. 已知两个多项式 $M = a^2 + a + 1$, $N = a^2 - a + 1$ ($a \neq 0$), 若 $\frac{M-N}{N} = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{3a^2}{a^4 - 2a^2 + 1}$ 的值为_____.

题型三：特殊的分式求值问题

8. 【阅读】把等式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ ($x \neq 0$) 的两边同时乘以 $\frac{1}{x}$ 得 $x - 3 + \frac{1}{x} = 0$, 移项得 $x + \frac{1}{x} = 3$, 两边平方得

$(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 3^2$, 所以 $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$.

【思考】若等式 $2x^2 - 8x + 2 = 0$ ($x \neq 0$) 成立, 求下列各式的值:

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2} =$, $x^4 + \frac{1}{x^4} =$.

(2) 先计算 $(a+b)(a^2 - ab + b^2) =$, 把计算结果作为公式, 求 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 的值.

9. 【阅读理解】

观察下列等式.

$$\frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

将以上三个等式两边分别相加得:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

【方法探究】

(1) 猜想并写出： $\frac{1}{n(n+1)} = \underline{\hspace{1cm}}$.

(2) 计算： $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{2022 \times 2023}$ ；

【拓展应用】

(3) 探究并计算：

$$\textcircled{1} \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{2021 \times 2023} .$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \cdots + \frac{1}{2020 \times 2022} + \frac{1}{2022 \times 2024} .$$

10. 阅读理解：

材料1：已知 $x + \frac{1}{x} = 3$ ，求分式 $\frac{x}{x^2 - 4x + 1}$ 的值 .

解：活用倒数， $\therefore \frac{x^2 - 4x + 1}{x} = x - 4 + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} - 4 = 3 - 4 = -1$.

$$\therefore \frac{x}{x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{\frac{x^2 - 4x + 1}{x}} = \frac{1}{-1} = -1 .$$

材料2：将分式 $\frac{x^2 - x + 3}{x + 1}$ 拆分成一个整式与一个分式（分子为整数）的和的形式 .

解：由分母 $x + 1$ ，可设 $x^2 - x + 3 = (x + 1)(x + a) + b$ ，则

$$x^2 - x + 3 = (x + 1)(x + a) + b = x^2 + ax + x + a + b = x^2 + (a + 1)x + a + b .$$

$\therefore$ 对于任意 x 上述等式成立，

$$\therefore \begin{cases} a + 1 = -1, \\ a + b = 3. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = -2, \\ b = 5. \end{cases}$$

$$\therefore \frac{x^2 - x + 3}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 2) + 5}{x + 1} = x - 2 + \frac{5}{x + 1} .$$

根据材料，解答下面问题：

(1) 已知 $a + \frac{1}{a} = 5$ ，则分式 $\frac{a}{2a^2 + 2}$ 的值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

(2) 已知 $b - \frac{1}{b} = -3$ ，求分式 $\frac{b^2}{3b^4 - 4b^2 + 3}$ 的值。

(3) 已知 $x + \frac{1}{x-2} = -\frac{7}{3}$ ，则分式 $\frac{x-2}{3x^2 - 9x + 9}$ 的值为_____。

11. 请根据阅读材料利用**整体思想**解答下列问题：

例 1：分解因式 $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) + 1$ ；

解：将“ $x^2 + 2x$ ”看成一个整体，令 $x^2 + 2x = y$ ；

原式 $= y(y + 2) + 1 = y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2 = (x^2 + 2x + 1)^2 = (x + 1)^4$ ；

例 2：已知 $ab = 1$ ，求 $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$ 的值。

解： $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{ab}{ab+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{b}{1+b} + \frac{1}{1+b} = 1$ ；

(1) 根据材料，请你模仿例 1 尝试对多项式 $(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 6x + 10) + 1$ 进行因式分解；

(2) 计算： $(1 - 2 - 3 - \dots - 2021) \times (2 + 3 + \dots + 2022) - (1 - 2 - 3 - \dots - 2022) \times (2 + 3 + \dots + 2021) =$ _____。

(3) ① 已知 $ab = 1$ ，求 $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$ 的值；

② 若 $abc = 1$ ，直接写出 $\frac{5a}{ab+a+1} + \frac{5b}{bc+b+1} + \frac{5c}{ca+c+1}$ 的值。

题型四：材料、规律题

12. 已知 $a_1 = \frac{4}{5}$ ， $a_2 = \frac{1}{1-a_1}$ ， $a_3 = \frac{1}{1-a_2}$ ， $a_4 = \frac{1}{1-a_3}$ ，...，以此类推，则 a_{2025} 的值为_____。

13. 观察下列算式：

① $1 \times \frac{2}{2^2-1} = \frac{2}{3 \times 1}$ ，② $\frac{4}{3} \times \frac{3}{3^2-1} = \frac{3}{3 \times 2}$ ，③ $\frac{5}{3} \times \frac{4}{4^2-1} = \frac{4}{3 \times 3}$ ，④ $2 \times \frac{5}{5^2-1} = \frac{5}{3 \times 4}$ ，L

按照以上规律，写出第 n 个算式_____（用含正整数 n 的算式表示）

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 2023 项，并且后一项是前一项的常数倍，且 $a_1 a_{2023} = 1$ 。设 $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ ，则

$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{2023})$ 的值是_____。

15. 现有一列数： $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n$ (n 为正整数)，规定 $a_1 = 2$ ， $a_2 - a_1 = 4$ ， $a_3 - a_2 = 6$ ，

... , $a_n - a_{n-1} = 2n(n-2)$, 若 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \cdots \frac{1}{a_n} = \frac{97}{198}$, 则 n 的值为_____.

16. 同学们学过分式方程, 分式方程有一步必不可少的一验根. 下面给出一些方式方程, 它们都有一个共同的特点:

若 $x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2}$, 则方程的解为 2 或 $\frac{1}{2}$;

若 $x + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3}$, 则方程的解为 3 或 $\frac{1}{3}$;

若 $x + \frac{1}{x} = 4 + \frac{1}{4}$, 则方程的解为 4 或 $\frac{1}{4}$;

请你用观察出的特点解决以下问题:

(1) 若 $x + \frac{1}{x+1} = 9\frac{1}{10}$, 则此方程的解为

(2) 若 $x + \frac{1}{9x-6} = \frac{a^2+2a+1}{3a}$, 则此方程的解为_____ (用含有 a 的代数式表示) .

题型五：含参数类分式方程；新定义题

17. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{a}{3x+4} - \frac{b-x}{x-2} = 1$.

(1) 当 $a=2$, $b=1$ 时, 求分式方程的解;

(2) 当 $a=1$ 时, 求 b 为何值时分式方程 $\frac{a}{3x+4} - \frac{b-x}{x-2} = 1$ 无解;

(3) 若 $a=2b$, 且 a, b 为正整数, 当分式方程 $\frac{a}{3x+4} - \frac{b-x}{x-2} = 1$ 的解为非负整数时, 求 b 的值.

18. 如果两个分式的差为常数, 我们称这两个分式互为“差离分式”, 这个常数为差离值. 如

$\frac{3x+4}{x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{3x+3}{x+1} = 3$, 所以 $\frac{3x+4}{x+1}$ 与 $\frac{1}{x+1}$ 互为“差离分式”, 差离值为 3 .

(1) 已知: $A = \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$, $B = \frac{1}{x-1}$, 判断 A 与 B 是否互为“差离分式”. 若是, 求出差离值; 若不是, 请说明理由.

(2) 已知: $C = \frac{-2x+3}{2x-1}$, $D = \frac{E}{4x^2-1}$, 若 C 与 D 互为“差离分式”, 且差离值为 -1 , 求 E 所代表的代数式.

(3) 已知： $P = \frac{mx+12}{(x+2)^2}$ ， $Q = \frac{nx}{x+2}$ (m, n 为非零常数)，若 P 与 Q 互为“差离分式”，求 $\frac{n}{2n^2-m}$ 的值。

19. 我们定义：如果两个分式 A 与 B 的差为常数，且这个常数为正数，则称 A 是 B 的“雅中式”，这个常数称为 A 关于 B 的“雅中值”。如分式 $A = \frac{2x}{x+1}$ ， $B = \frac{-2}{x+1}$ ， $A - B = \frac{2x}{x+1} - \left(\frac{-2}{x+1}\right) = \frac{2x+2}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} = 2$ ，则 A 是 B 的“雅中式”， A 关于 B 的“雅中值”为 2。

(1) 已知分式 $C = \frac{x^2+6x+8}{x^2+4x+4}$ ， $D = \frac{2}{x+2}$ ，判断 C 是否为 D 的“雅中式”，若不是，请说明理由；若是，请证明并求出 C 关于 D 的“雅中值”；

(2) 已知分式 $P = \frac{E}{1-x^2}$ ， $Q = \frac{2x}{1-x}$ ， P 是 Q 的“雅中式”，且 P 关于 Q 的“雅中值”是 2， x 为整数，且“雅中式” P 的值也为整数，求 E 所代表的代数式及所有符合条件的 x 的值之和；

(3) 已知分式 $M = \frac{(x-2b)(x-c)}{x}$ ， $N = \frac{(x-a)(x-2)}{x}$ (a, b, c 为整数)， M 是 N 的“雅中式”，且 M 关于 N 的“雅中值”是 1，求 $a-b+c$ 的值。

题型六：分式与分式方程的实际应用

20. 某小麦改良品种后平均每公顷增加产量 a 吨，原来产 m 吨小麦的一块土地，现在小麦的总产量增加了 20 吨。

(1) 当 $a = 0.8$ ， $m = 100$ 时，原来和现在小麦的平均每公顷产量各是多少？

(2) 请直接写出原来小麦的平均每公顷产量是_____吨，现在小麦的平均每公顷产量是_____吨；(用含 a, m 的式子表示)

(3) 在这块土地上，小麦的改良品种成熟后，甲组收割完需 n 小时，乙组比甲组少用 0.5 小时就能收割完，求两组一起收割完这块麦田需要多少小时？

21. 在生产生活中，经常需要把两种溶液进行混合，得到新的溶液。例如，把咸淡不同的两碗汤混合；在已有盐水中加水配制生理盐水等等。

(1) 要用含盐 9% 的盐水 100 克加水配制含盐 0.9% 的生理盐水，需要加水多少克？

(2) 用咸淡程度不同的两碗汤甲和乙混合 (甲汤比乙汤咸)，得到丙汤。

- ① 请根据生活经验比较甲汤、乙汤、丙汤的咸淡程度：
- ② 请设出必要的字母，用代数式表示甲汤、乙汤、丙汤的咸淡程度，通过计算证明①中的结论。

22. 甲、乙两商场自行定价销售某一商品。

- (1) 甲商场将该商品提价 15% 后的售价为 1.15 元，则该商品在甲商场的原价为____元；
- (2) 乙商场将该商品提价 20% 后，用 6 元钱购买该商品的件数比没提价前少买 1 件，求该商品在乙商场的原价是多少？
- (3) 在 (1)、(2) 的结论下，甲、乙两商场把该商品均按原价进行了两次价格调整。

甲商场：第一次提价的百分率是 a ，第二次提价的百分率是 b ；

乙商场：两次提价的百分率都是 $\frac{a+b}{2}$ ($a > 0, b > 0, a \neq b$)。

请问甲、乙两商场，哪个商场的提价较多？请说明理由。

题型七：分式与分式方程的综合应用

23. 某净水装置，将杂质含量为 n 的水用 m 单位量的净水材料过滤一次后，水中的杂质含量为 $\frac{n}{1+m}$ 。利用此净水装置，小亮进行了进一步的探究：

现有杂质含量为 1 的水。

- (1) 用 2 单位量的净水材料将水过滤一次后，水中杂质含量为_；
- (2) 小亮共准备了 $6a$ 单位量的净水材料，设计了如下的三种方案：方案 A 是将 $6a$ 单位量的净水材料一次性使用，对水进行过滤；方案 B 和方案 C 均为将 $6a$ 单位量的净水材料分成两份，对水先后进行两次过滤。三种方案的具体操作及相关数据如下表所示：

方案编号	第一次过滤用净水材料的单位量	水中杂质含量	第二次过滤用净水材料的单位量	第二次过滤后水中杂质含量
A	$6a$	$\frac{1}{1+6a}$	/	/
B	$5a$	$\frac{1}{1+5a}$	a	$\frac{1}{(1+5a)(1+a)}$
C	$4a$		$2a$	

①请将表格中方案C的数据填写完整；

②通过计算回答：在这三种方案中，哪种方案的最终过滤效果最好？

24. 【阅读理解】在比较两个数或代数式的大小时，解决策略一般是利用“作差法”，即要比较代数式 M ， N 的大小，只要作出差 $M - N$ ，若 $M - N > 0$ ，则 $M > N$ ；若 $M - N = 0$ ，则 $M = N$ ；若 $M - N < 0$ ，则 $M < N$ 。【解决问题】

(1)例如：若 $a > 0$ ，要比较 $\frac{a}{a+1}$ 、 $\frac{a-1}{a}$ 大小，只需要用 $\frac{a}{a+1} - \frac{a-1}{a} = \frac{1}{a(a+1)} > 0$ ，

所以可得： $\frac{a}{a+1}$ ———— $\frac{a-1}{a}$ (填“>”，“=”，“<”)；

(2)已知 $A = \frac{2}{x^2 - 1}$ ， $B = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ ，当 $x > -1$ 时，比较 A 与 $\frac{1}{B}$ 的大小，利用做差法说明理由；

(3)小王和小张的加油习惯不同，小王每次加 300 元的油（油箱未加满），而小张每次都把油箱加满。现实生活中油价常有变动，现以两次加油为例来研究，设第一次油价为 x 元/升，第二次油价为 y 元/升 ($x \neq y$)。

①小王两次加油的平均单价为——元/升，小张两次加油的平均单价为——元/升（用含 x ， y 的代数式表示，化简结果）；

②请通过计算判断，小王和小张的两种加油方式中，哪种平均单价更低？

25. 阅读下面的材料：把一个分式写成两个分式的和叫作把这个分式表示成“部分分式”。例：将分式 $\frac{1-3x}{x^2-1}$

表示成部分分式。解：设 $\frac{1-3x}{x^2-1} = \frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-1}$ ，将等式右边通分，得

$\frac{M(x-1)+N(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(M+N)x+(N-M)}{x^2-1}$ ，依据题意，得 $\begin{cases} M+N=-3 \\ N-M=1 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} M=-2 \\ N=-1 \end{cases}$ ，所以

$\frac{1-3x}{x^2-1} = \frac{-2}{x+1} + \frac{-1}{x-1}$ 请你运用上面所学到的方法，解决下面的问题：

(1) $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$ (A ， B 为常数)，则 $A = -$ ， $B = -$ ；

(2)一个容器装有 1L 水，按照如下要求把水倒出：第 1 次倒出 $\frac{1}{2}$ L，第 2 次倒出的水量是 $\frac{1}{2}$ L 的 $\frac{1}{3}$ ，第 3 次倒

出的水量是 $\frac{1}{3}L$ 的 $\frac{1}{4}$ ，第₄次倒出的水量是 $\frac{1}{4}L$ 的 $\frac{1}{5}$ ……第_n次倒出的水量是 $\frac{1}{n}L$ 的 $\frac{1}{n+1}$ ……按照这种倒水的方法，请说明这₁L的水是否能倒完？如果能，多少次才能倒完？如果不能，请说明理由；

(3)按照 (2) 的条件，现在重新开始实验，按照如下要求把水倒出：第₁次倒出 $\frac{1}{3}L$ ，第₂次倒出的水量是 $\frac{1}{15}L$ ，第₃次倒出的水量是 $\frac{1}{35}L$ ，第₄次倒出的水量是 $\frac{1}{63}L$ ，请问经过多少次操作后，杯内剩余水量能否变成原来水量的 $\frac{100}{199}$ ？试说明理由。