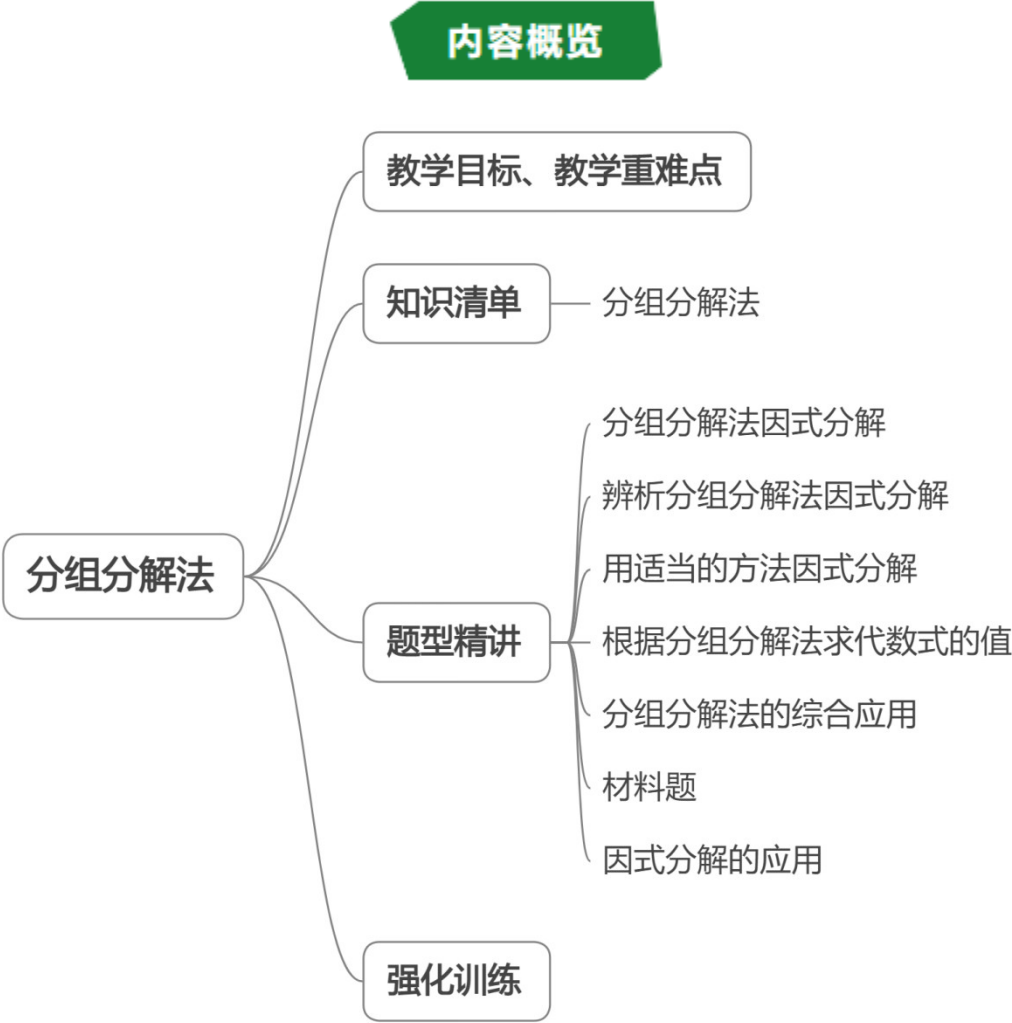


专题 12.4 分组分解法



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 会用分组分解法进行因式分解； 2. 尝试不同的分组方式进行因式分解 3. 掌握分组分解法的应用。
教学重难点	1.重点 (1) 通过适当分组，将某些整式因式分解； (2) 分组分解法与其他方法综合因式分解； (3) 分组分解法的应用。 2.难点 (1) 适当巧妙分组因式分解，正确化简、变形求值等；

(2) 阅读材料题。

知识清单

知识点1 分组分解法

1. 例题分析

因式分解：

$$(1)x^2-4xy+4y^2-4; (2)9a^2-3a+b-b^2.$$

分析： $x^2-4xy+4y^2-4$ 的前面三项符合完全平方公式的特征，分组后可以用公式法因式分解；将 $9a^2-3a+b-b^2$ 的第一项与第四项分为一组，第二项与第三项分为一组，第一组用公式法因式分解后与第二组有公因式 $3a-b$ ，可以用提取公因式法因式分解。

$$\text{解：}(1)x^2-4xy+4y^2-4=(x^2-4xy+4y^2)-4=(x-2y)^2-4=(x-2y+2)(x-2y-2).$$

$$(2)9a^2-3a+b-b^2=(9a^2-b^2)-(3a-b)=(3a+b)(3a-b)-(3a-b)=(3a-b)(3a+b-1).$$

观察整式的特征，通过适当分组，我们可以将某些整式因式分解。

2. 分组分解法

对于一个整式的整体，若不能直接运用提公因式法和公式法进行因式分解时，可考虑分步处理的方法，即把这个整式分成几组，先对各组分别分解因式，然后再对整体作因式分解——分组分解法。即先对题目进行分组，然后再分解因式。

要点：分组分解法分解因式常用的思路有：

方法	分类	分组方法	特点
分组分解法	四项	二项、二项	①按字母分组②按系数分组 ③符合公式的两项分组
		三项、一项	先完全平方公式后平方差公式
	五项	三项、二项	各组之间有公因式
	六项	三项、三项 二项、二项、二项	各组之间有公因式
		三项、二项、一项	可化为二次三项式

3. 添、拆项法

把整式的某一项拆开或填补上互为相反数的两项（或几项），使原式适合于提公因式法、公式法或分组分解法进行分解。要注意，必须在与原整式相等的原则下进行变形。

添、拆项法分解因式需要一定的技巧性，在仔细观察题目后可先尝试进行添、拆项，在反复尝试中熟

练掌握技巧和方法.

【即学即练】

1. 因式分解： $8ax - by + 4ay - 2bx$

2. 因式分解： $9a^2 - 3a + b - b^2$.

3. 分解因式： $a^3 + 3a^2 + 3a + 2$.

4. 分解因式： $x^5 + 2x^3 - x - 2$.

5. 因式分解：

(1) $a^3b - ab^3 + a^2 + b^2 + 1$;

(2) $9a^2 - 4b^2 + 4bc - c^2$.

6. 先分解因式，再求值： $1 - a^2 - b^2 + ab^2$ ，其中 $a = \frac{1}{99}$ ， $b = 1$.

题型精讲

题型 01 分组分解法因式分解

【典例 1】 . $x^2 - 2x - b^2 - 2b$

【变式 1】 . 分解因式： $xy - xz + y - z$

【变式 2】 . $x^2 - 4y^2 + 4x + 4$

【变式 3】 . 因式分解： $25 - 4x^2 + 4xy - y^2$

【变式 4】 . 因式分解： $2x^3 - 3x^2 + 3y^2 - 2xy^2$.

【变式 5】 . 分解因式： $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y - 3$.

【变式 6】 . 因式分解： $3a^3 - 6a^2b + 4ab^2 - \frac{8}{9}b^3$

【变式 7】 . 因式分解： $a^2bc + abcd + bc - ab^2 - ac^2 - c^2d$

题型 02 辨析分组分解法因式分解

【典例 1】 . 用分组分解法将 $x^2 - xy + 2y - 2x$ 分解因式，下列分组不恰当的是 ()

A . $(x^2 - 2x) + (2y - xy)$

B . $(x^2 - xy) + (2y - 2x)$

C . $(x^2 + 2y) + (-xy - 2x)$ D . $(x^2 - 2x) - (xy - 2y)$

【变式 1】 . 用分组分解 $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$ 的因式，分组正确的是 ()

A . $(a^2 - b^2) - (b - 2bc)$ B . $(a^2 - b^2 - c^2) + 2ab$

C . $(a^2 - b^2) - (c^2 - 2bc)$ D . $a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)$

【变式 2】 . 把整式 $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 3$ 因式分解之后，正确的是 ()

A . $(x + y - 3)(x - y - 3)$ B . $(x + y - 1)(x - y + 3)$

C . $(x + y - 3)(x - y + 1)$ D . $(x + y + 1)(x - y - 3)$

题型 03 用适当的方法因式分解

【典例 1】 . 因式分解：

(1) $2x^2 - 8$

(2) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$

(3) $-3ma^2 + 6ma - 3m$

(4) $m^2 - 4m - n^2 + 4$;

【变式 1】 . 因式分解

(1) $-3x^3y + 6x^2y^2 - 3xy^3$;

(2) $(a - 2b)^2 - 4a^2$;

(3) $(x^2 + 2x)^2 - 11(x^2 + 2x) + 24$;

(4) $a^2 + 4ab + 4b^2 - ac - 2bc$.

【变式 2】 . 分解因式：

(1) $x^2 - 3x - 4$

(2) $mx^2 - 6mxy + 8my^2$

(3) $x^2 - y^2 - 4x + 4$

(4) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 4$.

【变式 3】 . 分解因式：

(1) $x^2 - 3x + 2$

$$(2) x^2 + 4x - 12$$

$$(3) xy - 1 + x - y$$

$$(4) (x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12$$

题型 04 根据分组分解法求代数式的值

【典例 1】. 已知 $a+b=3$, $ab=-1$, 则 $3a+ab+3b=$ _____ , $a^2+b^2=$ _____

【变式 1】. 若 $x^2+4x+8y+y^2+20=0$, 则 $x-y=$ _____ .

【变式 2】. 已知 $a-b=3$, $b-c=-4$, 则代数式 $a^2-ac-b(a-c)$ 的值是_____ .

【变式 3】. 已知 $a+b=3$, $ab=1$, 则整式 a^2b+ab^2-a-b 的值为 ()

- A . -1 B . 0 C . 3 D . 6

【变式 4】. 已知 $a=\frac{1}{2}m+1$, $b=\frac{1}{2}m+2$, $c=\frac{1}{2}m+3$, 则 $a^2+2ab+b^2-2ac+c^2-2bc$ 的值为_____ .

题型 05 分组分解法的综合应用

【典例 1】. x^5+1 的分解因式结果中, 含有的因式是()

- A . x^2-1 B . $x-1$ C . $x+1$ D . $x^4+x^3+x^2+x+1$

【变式 1】. 整式 $x^2-4xy-2y+x+4y^2$ 分解因式后有一个因式是 $x-2y$, 另一个因式是 ()

- A . $x+2y+1$ B . $x+2y-1$ C . $x-2y+1$ D . $x-2y-1$

【变式 2】. 长方形的周长为 16cm , 它的两边 x , y 是整数, 且满足 $x-y-x^2+2xy-y^2+2=0$, 求它的面积 .

题型 06 材料题

【典例 1】. 阅读下列解题的过程 .

分解因式 : x^4+64

解 : $x^4+64=x^4+16x^2+64-16x^2$

$= (x^2+8)^2-16x^2$

$= (x^2+8+4x)(x^2+8-4x)$

请按照上述解题思路完成下列因式分解 :

(1) a^4+4 ;

$$(2) x^4 - 43x^2y^2 + 81y^4 .$$

【变式 1】 . 阅读以下材料，并解决问题：

常用的分解因式的方法有提取公因式法、公式法等，但有的整式则不能直接用上述两种方法进行分解，比如整式 $x^2 - 4y^2 - 2x + 4y$. 这样我们就需要结合式子特点，探究新的分解方法 . 仔细观察这个四项式，会发现：若把它的前两项结合为一组符合平方差公式特点，把它的后两项结合为一组可提取公因式，而且对前后两组分别进行因式分解后会出现新的公因式，提取新的公因式就可以完成对整个式子的因式分解 .

具体过程如下：

$$\begin{aligned} \text{例 1 : } & x^2 - 4y^2 - 2x + 4y \\ &= (x^2 - 4y^2) - (2x - 4y) \dots\dots\dots \text{分成两组} \\ &= (x + 2y)(x - 2y) - 2(x - 2y) \dots\dots\dots \text{分别分解} \\ &= (x - 2y)(x + 2y - 2) \dots\dots\dots \text{提取公因式完成分解} \end{aligned}$$

像这种将一个整式适当分组后，进行分解因式的方法叫做分组分解法 . 分组分解法一般是针对四项或四项以上的整式，关键在恰当分组，分组须有“预见性”，预见下一步能继续分解，直到完成分解 .

(1) 材料例 1 中，分组的目的是_____ .

(2) 若要将以下整式进行因式分解，怎样分组比较合适？

$$x^2 - y^2 + x + y = \underline{\hspace{2cm}} ;$$

$$2a + a^2 - 2b - 2ab + b^2 = \underline{\hspace{2cm}} .$$

(3) 利用分组分解法进行因式分解： $x^2 - 2xy + y^2 - 4$.

【变式 2】 . 阅读下列文字与例题，并解答：

将一个整式分组进行因式分解后，可用提公因式法或公式法继续分解的方法称作分组分解法 .

例如：以下式子的分解因式的方法就称为分组分解法 .

$$\begin{aligned} & a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc \\ \text{原式} &= (a^2 + 2ab + b^2) + (ac + bc) \\ &= (a + b)^2 + c(a + b) \\ &= (a + b)(a + b + c) \end{aligned}$$

(1)试用“分组分解法”因式分解： $x^2 - y^2 + xz - yz$

(2)已知四个实数 a, b, c, d ，满足 $a \neq b, c \neq d$ ，并且 $a^2 + ac = 12k, b^2 + bc = 12k, c^2 + ac = 24k, d^2 + ad = 24k$ ，同时成立。

①当 $k = 1$ 时，求 $a + c$ 的值；

②当 $k \neq 0$ 时，用含 a 的代数式分别表示 b, c, d （直接写出答案即可）。

题型 07 因式分解的应用

【典例 1】 . 用平方差公式进行因式分解在数的运算中有着广泛的应用，比如，数的整除性探究中的应用。

例： $2008^3 - 2008$ 能被 2009 整除吗？

解： $2008^3 - 2008 = 2008(2008^2 - 1) = 2008(2008 + 1)(2008 - 1) = 2008 \times 2009 \times 2007$

$\therefore 2008^3 - 2008$ 中有因数 2009，

$\therefore 2008^3 - 2008$ 一定能被 2009 整除。

请你试一试：已知数字 $(2^{48} - 1)$ 恰能被两个在 60 和 70 之间的整数整除，求出这两个数。

【变式 1】 . 因为 $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$ ，这说明整式 $x^2 + 2x - 3$ 有一个因式为 $x - 1$ ，我们把 $x = 1$ 代入此整式发现 $x = 1$ 能使整式 $x^2 + 2x - 3$ 的值为 0，利用上述阅读材料求解：

(1) 若 $x - 3$ 是整式 $x^2 + kx + 12$ 的一个因式，求 k 的值；

(2) 若 $(x - 3)$ 和 $(x - 4)$ 是整式 $x^3 + mx^2 + 12x + n$ 的两个因式，试求 m, n 的值；

(3) 在 (2) 的条件下，把整式 $x^3 + mx^2 + 12x + n$ 因式分解。

【变式 2】 . 材料 1：由整式乘法， $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ，将该式子从右到左地使用，即可对形如 $x^2 + (a + b)x + ab$ 的整式进行因式分解： $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$ 。整式 $x^2 + (a + b)x + ab$ 的特征是二次项系数为 1，常数项为某两数之积，一次项系数为这两数之和。

材料 2：因式分解： $(x + y)^2 + 2(x + y) + 1$ ，将“ $x + y$ ”看成一个整体，令 $x + y = A$ ，则原式 $= A^2 + 2A + 1 = (A + 1)^2$ ，再将“ A ”还原得：原式 $= (x + y + 1)^2$ 。

上述用到整体思想，整体思想是数学解题中常见的一种思想方法。

请你根据以上阅读材料解答下列问题：

(1)根据材料 1 将 $x^2 + 4x + 3$ 因式分解；

(2) 根据材料 2 将 $(x-y)^2 - 10(x-y) + 25$ 因式分解；

(3) 结合材料 1 和材料 2，将 $(m^2 - 2m)(m^2 - 2m - 3) - 4$ 因式分解。

【变式 3】 数学业余小组在活动中发现：

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$$

$$(a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5) = a^6 - b^6$$

.....

$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$$

(1) 请在答题卡中写出 (补上) 上述公式中积为 $a^5 - b^5$ 的一行；

(2) 请仔细领悟上述公式，并将 $a^3 + b^3$ 分解因式：

(3) 请将 $a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$ 分解因式。

强化训练

一、单选题

1. 下列分解因式错误的是 ()

A. $15a^2 + 5a = 5a(3a + 1)$

B. $-x^2 - y^2 = -(x^2 - y^2) = -(x+y)(x-y)$

C. $k(x+y) + x + y = (k+1)(x+y)$

D. $a^2 - ab + ac - bc = (a-b)(a+c)$

2. 把 $x^5 - x^4 - x + 1$ 分解因式的结果是 ()

A. $x(x^4 - x^3 - 1) + 1$

B. $(x-1)(x^4 - 1)$

C. $(x-1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

D. $(x-1)^2(x^2 + 1)(x+1)$

3. 把整式 $1 - x^2 + 2xy - y^2$ 分解因式的结果是 ()

A. $(1-x-y)(1+x-y)$

B. $(1+x-y)(1-x+y)$

C. $(1-x-y)(1-x+y)$

D. $(1+x-y)(1+x+y)$

4. 若 $m > 1$ ，则整式 $m^3 - m^2 - m + 1$ 的值为 ()

A. 正数

B. 负数

C. 非负数

D. 非正数

5. 已知 a, b, c 是正整数, $a > b$, 且 $a^2 - ab - ac + bc = 11$, 则 $a - c$ 等于 ()

- A. ± 1 B. 1 或 11 C. ± 11 D. ± 1 或 ± 11

6. 已知实数 m, n, p, q 满足 $m + n = p + q = 4$, $mp + nq = 4$, 则 $(m^2 + n^2)pq + mn(p^2 + q^2) =$ ()

- A. 48 B. 36 C. 96 D. 无法计算

二、填空题

7. 分解因式: $x^2 - xy + ax - ay =$ _____.

8. 分解因式: $x^2 - 4y^2 + x - 2y =$ _____.

9. 分解因式: $x^2 - y^2 - 3x - 3y =$ _____.

10. 因式分解: $m^2 - n^2 - 2m + 1 =$ _____.

11. 因式分解 $x^2 + xy - 6y^2 + x + 13y - 6 =$ _____.

12. 分解因式; $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 =$ _____.

13. 已知 $a - b = 3$, $b - c = -4$, 则代数式 $a^2 - ac - b(a - c)$ 的值是_____.

14. 若 $x^2 + x - 2 = 0$, 则 $x^3 + 2x^2 - x + 2020 =$ _____.

15. 整式 $a^2 - b^2 + 2a$ 添加一个单项式后能用分组分解法进行因式分解. 如果将 a^2 和 $+2a$ 分成一组, $-b^2$ 和此单项式分成一组, 那么这个单项式为_____.

16. 已知: $a = .226x + 2017$, $b = .226x + 2018$, $c = .226x + 2019$, 则代数式 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的值是_____.

三、解答题

17. 分解因式: $2a^3 + 8b - 2a^2b - 8a$.

18. 分解因式: $x^2 + xy - 6y^2 - 2x + 19y - 15$

19. 因式分解: $x^3 + 3x^2y - 4x - 12y$.

20. $3ax - 18by + 6bx - 9ay$

21. $3a^2x - 4b^2y - 3b^2x + 4a^2y$

22. 因式分解:

(1) $4a^2 - 16a + 16$;

$$(2) a^2(x-y) + 16(y-x) ;$$

$$(3) 9x^2 - 6x - y^2 - 2y ;$$

$$(4) (2m^2 - m)^2 - 2(2m^2 - m) - 3 .$$

23 . 当 $x = -2$ 时，整式 $x^3 + 4x^2 - 4x + k$ 的值为 0，求 k 的值，并将该整式进行因式分解 .

24 . 已知 $a=k+3, b=2k+2, c=3k-1$ 求 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$ 的值

25 . 观察下面的分解因式过程，说说你发现了什么.

例：把整式 $am + an + bm + bn$ 分解因式.

解法 1 : $am + an + bm + bn$

$$= (am + an) + (bm + bn)$$

$$= a(m + n) + b(m + n)$$

$$= (m + n)(a + b) .$$

解法 2 : $am + an + bm + bn$

$$= (am + bm) + (an + bn)$$

$$= m(a + b) + n(a + b)$$

$$= (a + b)(m + n) .$$

根据你的发现，把下面的整式分解因式：

$$(1) mx - my + nx - ny ;$$

$$(2) 2a + 4b - 3ma - 6mb .$$

26 . 通过学习，我们知道常用的因式分解的方法有提公因式法和公式法，与此同时，某些整式只用上述一种方法无法因式分解，下面是甲、乙两位同学对整式进行因式分解的过程 .

$$\text{甲} : x^2 + xy - 2x - 2y$$

$$= (x^2 + xy) - (2x + 2y) \quad (\text{先分成两组})$$

$$= x(x + y) - 2(x + y)$$

$$= (x + y)(x - 2) .$$

$$\text{乙} : a^2 - b^2 + 2b - 1$$

$$= a^2 - (b^2 - 2b + 1) \quad (\text{先分成两组})$$

$$= a^2 - (b-1)^2$$

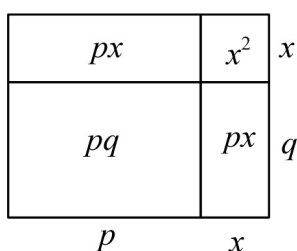
$$= (a+b-1)(a-b+1)$$

两位同学分解因式的方法叫做分组分解法，请你仔细观察并对以下整式进行因式分解，

(1) 试用上述方法分解因式： $m^2 + 2mn + n^2 + ma + na$.

(2) 已知 $x + y = 14$ ，且 $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = 0$ ，求 $x - y$.

27. 如图，大长方形是由三个小长方形和一个小正方形拼成的 .



观察猜想：请根据此图填空： $x^2 + (p+q)x + pq = x^2 + px + qx + pq = (\quad) \times (\quad)$.

说理验证：事实上，我们也可以用如下代数方法进行变形：

$$x^2 + (p+q)x + pq = x^2 + px + qx + pq = (x^2 + px) + (qx + pq) = x (\quad) + q (\quad) \quad (\text{提示：提公因式}) = (\quad) \times (\quad) .$$

于是，我们可以利用此方法进行整式的因式分解 .

尝试运用：例题：把整式 $x^2 + 5x + 6$ 因式分解 .

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2+3)x + 2 \times 3 =$$

$$x^2 + 2x + 3x + 2 \times 3 = (x^2 + 2x) + (3x + 2 \times 3) = x(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(x+3)$$

请利用上述方法将下列整式因式分解：

(1) $x^2 + 7x + 12$;

(2) $(y^2 + y)^2 - 5(y^2 + y) + 6$.