

专题 07 《全等三角形》高分突破题型

题型归纳

知识点 01：全等三角形的判定

知识点 02：倍长中线

知识点 03：截长补短

知识点 04：一线三等角

知识点 05：手拉手模型

题型专练

知识点 01：全等三角形的判定

1. (24-25 七年级下·上海·期末) 根据下列已知条件，能画出唯一的 $\triangle ABC$ 的是 ()

A. $AB = 3, BC = 4, AC = 8$

B. $AB = 4, BC = 3, \angle A = 30^\circ$

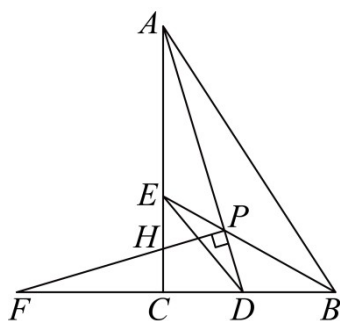
C. $\angle C = 60^\circ, \angle B = 45^\circ, AB = 4$

D. $\angle C = 90^\circ, AB = 6$

2. (24-25 七年级下·上海·期末) 如图，在 $\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\triangle ABC$ 的角平分线 AD 、 BE 相交于点

P ，过 P 作 $PF \perp AD$ 交 BC 的延长线于点 F ，交 AC 于点 H 。有下列结论：① $\angle APB = 135^\circ$ ；②

$\triangle ABP \cong \triangle FBP$ ；③ $\angle AHP = \angle ABC$ ；④ $AH + BD = AB$ ；其中正确的个数是 ()



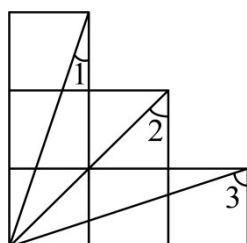
A . 1 个

B . 2 个

C . 3 个

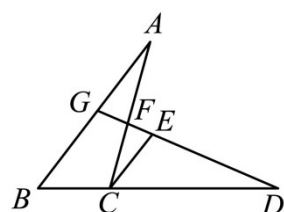
D . 4 个

3 . (24-25 七年级下·上海·期末) 如图为 6 个边长相等的正方形的组合图形，则 $\frac{2}{3}(\angle 1 + \angle 3) + \angle 2 =$ _____ .



4 . (22-23 七年级下·上海浦东新·期末) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 延长线上的一点， $CD = AB$ ，过点 C

作 $CE \parallel AB$ 且 $CE = BC$ ，连接 DE 并延长，分别交 AC ， AB 于点 F ， G .

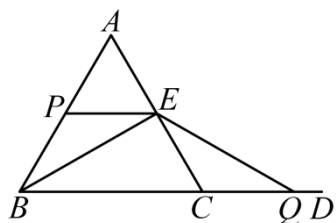


(1) 求证： $\triangle ABC \cong \triangle DCE$ ；

(2) 若 $\angle B = 50^\circ$ ， $\angle D = 25^\circ$ ，求 $\angle AFG$ 的度数 .

5 . (24-25 七年级下·上海静安·期末) 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形， $BC = 2\text{cm}$ ，点 P 从点 A 出发，沿

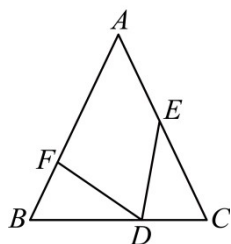
射线 AB 以 1cm/s 的速度运动，过点 P 作 $PE \parallel BC$ 交射线 AC 于点 E ，同时点 Q 从点 C 出发沿 BC 的延长线以 1cm/s 的速度运动，连接 BE 、 EQ ，设点 P 的运动时间为 $t(\text{s})$ 。



- (1) 当点 P 在边 AB 上，且不与点 A 、 B 重合时，求证： $\triangle BPE \cong \triangle ECQ$ ；
- (2) 直接写出 CE 的长（用含 t 的代数式表示）；
- (3) 在不添加字母和连接其它线段的条件下，当图中等腰三角形的个数大于 3 时，直接写出 t 的值和对应的等腰三角形的个数。（请写出所有的可能性）

6. (24-25 七年级下‘上海普陀’期末) 如图，已知：在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 、 F 分别在边 BC 、 AC 、 AB 上，

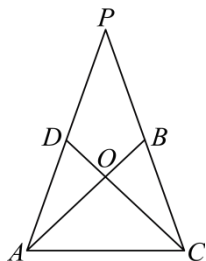
$$FD = DE, BF = CD, \angle FDE = \angle B, \angle FDE = \angle C.$$



- (1) 求证： $AB = AC$ ；
- (2) 连接 AD ，如果 AD 平分 $\angle FDE$ ，求证： $AD \perp BC$ 。

7. (24-25 七年级下·上海金山·期末) 如图，已知：在 $\triangle PAC$ 中，点 D 、 B 分别在边 PA 、 PC 上， AB 与

CD 相交于点 O ， $\angle ADC = \angle ABC$ ， $AD = BC$ 。

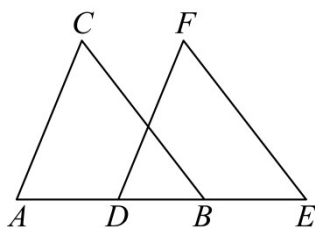


(1) 求证： $PA = PC$ ；

(2) 连接 PO 并延长交 AC 于点 E ，求证： $PE \perp AC$ 。

8. (24-25 七年级下·上海金山·期末) 如图，点 A 、 D 、 B 、 E 在同一条直线上， $AD = BE$ ， $AC = DF$ ，

$BC = EF$ 。



(1) 求证： $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

(2) 若 $\angle A = 65^\circ$ ， $\angle E = 50^\circ$ ，求证： $EF = ED$ 。

知识点 02 倍长中线

1. (24-25 七年级下·上海普陀·期末) 小普在学习了三角形相关知识后，得出如下两个结论：①三角形一
边上高的长度必定小于这条边上中线的长度；②三角形一边上的中线小于另两边和的一半。对于结论①和

②，下列说法正确的是()

A. ①、②都正确

B. ①、②都错误

C. ①正确，②错误

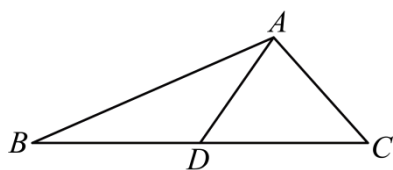
D. ①错误，②正确

2. (24-25 七年级下·上海青浦·期末) 把 $\triangle ABC$ 的中线 AD 延长到点 E ，使 $DE = AD$ ，连接 BE 。如果

$AB = 3$ ， $\triangle ACD$ 的周长比 $\triangle ABD$ 的周长大 2，那么 $BE =$ _____。

3. (21-22 八年级上·辽宁大连·阶段检测) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线， $AC = 3$ ， $AD = 5$ ，

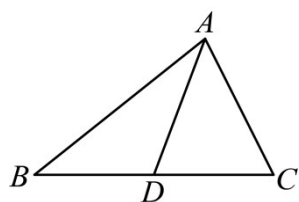
则 AB 的取值范围是 _____。



4. (24-25 七年级下·上海松江·期末) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线，如果 $AB > AC$ ，求证：

$\angle DAC > \angle BAD$

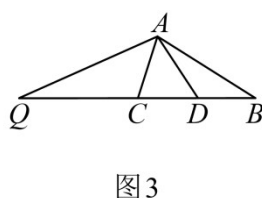
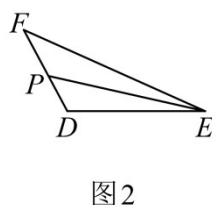
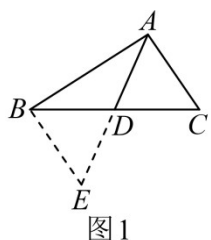
证明：延长 AD 至点 E ，使 $DE = AD$ ，连接 BE (请完成后续证明)



5. (24-25 七年级下·全国·期末) 八年级一班数学兴趣小组在一次活动中进行了探究试验活动，请你和他

们一起活动吧。

【探究与发现】



(1) 如图 1， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，延长 AD 至点 E ，使 $ED = AD$ ，连接 BE ，写出图中全等的两个三角形
_____；

【理解与应用】

(2) 填空：如图 2， EP 是 $\triangle DEF$ 的中线，若 $EF = 5$ ， $DE = 3$ ，设 $EP = x$ ，则 x 的取值范围是_____；

(3) 已知：如图 3， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， $\angle BAC = \angle ACB$ ，点 Q 在 BC 的延长线上， $QC = BC$ ，求证：

$$AQ = 2AD$$

6. (24-25 七年级下·全国·期末)

【阅读材料】 中线是三角形中的重要线段之一，在利用中线解决几何问题时，常常采用“倍长中线法”添加辅助线．所谓倍长中线法，就是将三角形的中线延长一倍，以便构造出全等三角形，从而运用全等三角形的有关知识来解决问题的方法．

【初步探索】

(1) 小明遇到这样一个问题：如图 1， $\triangle ABC$ 中， $AB = 6$ ， $AC = 4$ ，点 D 为 BC 的中点，求 AD 的取值范围．小明发现“倍长中线法”可以解决这个问题，他的做法是：延长 AD 到 E ，使 $DE = AD$ ，连接 BE ，则得到 $\triangle ADC \cong \triangle EDB$ ，用到的判定定理是：_ (用字母表示)； BC 边上的中线 AD 的取值范围是_．

【灵活运用】

(2) 如图 2，以 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 为边向外作 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ ，使 $AB = AE$ ， $AC = AD$ ， $\angle BAE = \angle CAD = 90^\circ$ ， M 是 BC 的中点，连接 AM 、 DE ．求证： $DE = 2AM$ ；

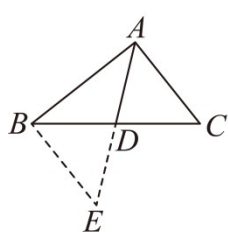


图 1

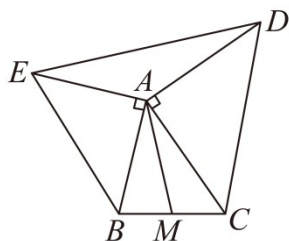


图 2

7. (24-25 七年级下‘全国’阶段检测)

综合与实践：课外兴趣小组活动时，老师提出了如下问题：在 $\triangle ABC$ 中， $AB=7$ ， $AC=3$ ，求 BC 边上的中线 AD 的取值范围．

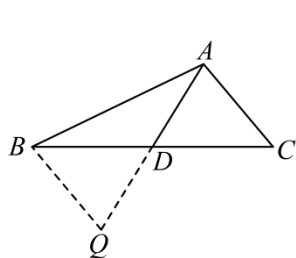


图1

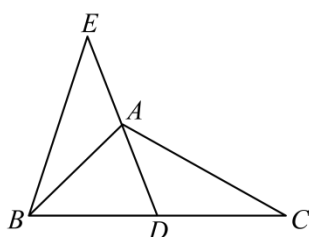


图2

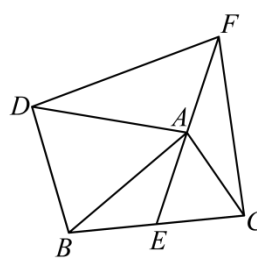


图3

(1)几何模型：小明在组内经过合作交流，得到了如下的解决方法（如图¹）：

①延长 AD 到 Q 使得 $DQ = AD$ ；

②再连接 BQ ，把 AB 、 AC 、 $2AD$ 集中在 $\triangle ABQ$ 中；

③利用三角形的三边关系可得 $4 < AQ < 10$ ，则 AD 的取值范围是——（直接写出其取值范围）

感悟：解题时，条件中若出现“中点”“中线”等条件，可以考虑倍长中线，构造全等三角形，把分散的已知条件和所求证的结论集中到同一个三角形中．

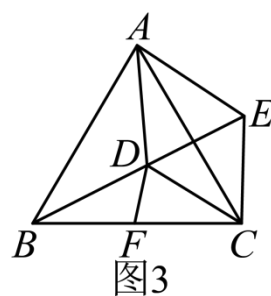
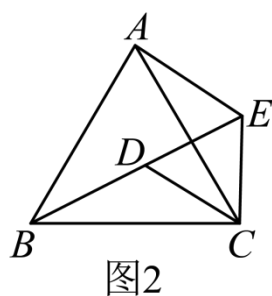
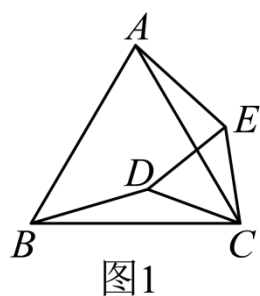
(2)初步运用：如图2， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，延长 DA 到点 E ，连接 BE ，使 $BE = AC$ ，求证：

$$\angle BEA = \angle DAC ;$$

(3)拓展提升：如图3， AE 是 $\triangle ABC$ 的中线， $AB = AD$ ， $AC = AF$ ， $\angle BAD + \angle FAC = 180^\circ$ ，试探究线段 AE 与 DF 的数量关系，并给予证明．

8. (25-26 七年级下·上海·阶段测试)

如图 1，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 在 $\triangle ABC$ 内部，连接 BD ， CD ，在 CD 的右侧构造等边三角形 $\triangle CDE$ ，连接 AE 。



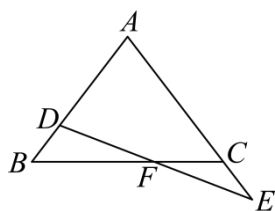
(1) 求证： $AE = BD$ ；

(2) 如图 2，当 B ， D ， E 三点共线时，求 $\angle AED$ 的度数；

(3) 如图 3，在 (2) 的条件下，取 BC 中点 F ，连接 AD ， DF ，试判断 AD 与 DF 之间的数量关系并证明。

题型 03 截长补短

1. (24-25 八年级上·上海·期末) 如图在等腰三角形 ABC 中， $AB = AC$ ，动点 D 在线段 AB 上，动点 E 在线段 AC 的延长线上，线段 DE 交 BC 于点 F ，当 $DF = EF$ 时，下列等式总是成立的是 ()



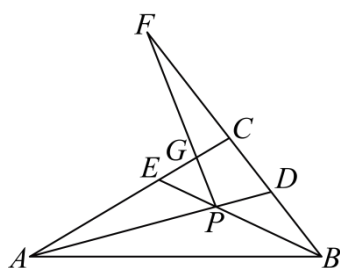
A. $BF = CF$

B. $BD = CE$

C. $\angle AEF = \angle DFB$

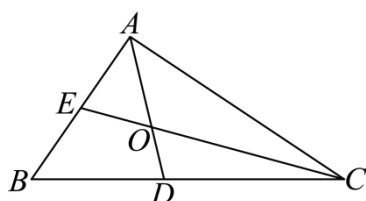
D. $\angle ACB = \angle ADE$

2. (24-25 七年级下·上海普陀·期末) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, AD 、 BE 分别是 $\angle CAB$ 、 $\angle CBA$ 的平分线, AD 、 BE 交于点 P , 过点 P 作 $PF \perp AD$ 交 BC 的延长线于点 F 、交 AC 于点 G .



- (1) 求证: $\triangle ABP \cong \triangle FBP$;
- (2) AG 、 BD 、 AB 之间有怎样的数量关系, 请说明理由 .

3. (24-25 八年级上·河南漯河·阶段检测) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BAC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线 AD 、 CE 交于点 O .

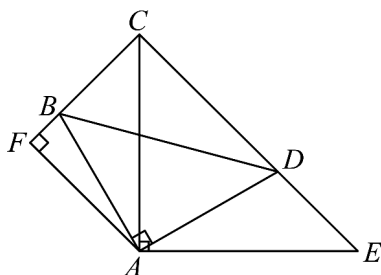


- (1) 求 $\angle AOE$ 的度数 ;

(2) 求证： $AC = AE + CD$.

4. (24-25 七年级下·上海·期末) 如图， $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 是等腰直角三角形， $\angle BAD = \angle CAE = 90^\circ$,

$AF \perp CB$, 垂足为 F .



(1) 求证： $\angle ABF = \angle ADC$;

(2) 判断 AF 和 CE 的位置关系，并说明理由；

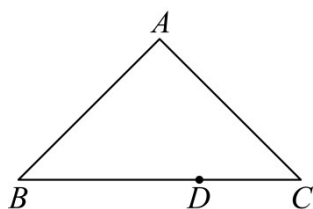
(3) 求证： $CD = 2BF + DE$.

5. (24-25 七年级下·上海虹口·期末) 费马是 17 世纪的法国数学家，他曾研究过一种特殊的点，它满足“在

一个三角形所在平面上，到该三角形的三个顶点距离之和最短”，这样的点被称为“该三角形的费马点” .

(1) 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, 点 D 在线段 BC 上且线段 $BD > DC$, 请判断：点 D 是否为

$\triangle ABC$ 的费马点，并说明理由 .



(2) 现有真命题：在 $\triangle ABC$ 中，三个内角都小于 120° ，在其内部存在一点 P ，满足

$\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 120^\circ$ ，则点 P 称为 $\triangle ABC$ 的费马点。

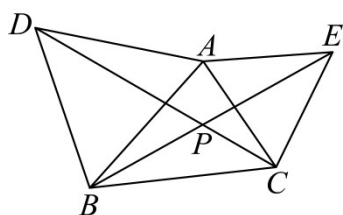
小明利用该真命题，尝试用尺规作费马点，他的作法如下：

如图，对一个所有内角都小于 120° 的 $\triangle ABC$ ，分别以线段 AB 、 AC 为边向外侧作等边三角形 ABD 和等边三角形 ACE ，连接 CD 、 BE 交于点 P 。请完成证明：

① 求证： $\angle ADC = \angle ABE$ ；

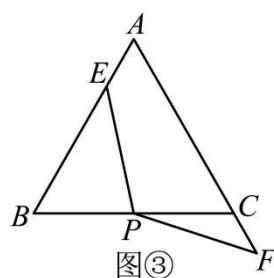
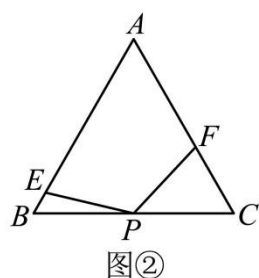
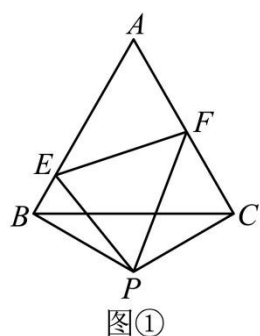
② 在线段 DP 上取点 F 使 $PF = BP$ ，连接 BF ，

求证：点 P 是 $\triangle ABC$ 的费马点。



6. (24-25 七年级下·上海·期末) 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 P 为 BC 的垂直平分线上一点，连接 BP 、

CP ，点 E 、 F 分别在 AB 、 AC 所在的直线上，连接 PE 、 PF 。



(1) 如图①，若 $\angle BPC = 120^\circ$ ，点 E 、 F 在边 AB 、 AC 上， $\angle EPF = 60^\circ$ ，则 EF 、 BE 、 FC 之间的数量关系

是——；若 $BC = 1$ ，则 $\triangle AEF$ 的周长为——；

(2) 如图②，点 P 在 BC 上， $\angle EPF = 120^\circ$ ，求证： $PE = PF$ ；

(3) 如图③，点 E 在边 AB 上，点 F 在 AC 的延长线上，在 (2) 的条件下，若 $BE = 3AE$ ，证明：

$$CF = \frac{1}{4} BC.$$

7. (24-25 七年级下·上海·期末) (23-24 八年级上·江西南昌·期中) 综合与实践

问题提出

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ ，交 BC 于点 D ，且 $\angle ACB = 2\angle B$ ，则 AB ， CD ， AC 之间存在怎样

的数量关系？并说明理由。

方法运用

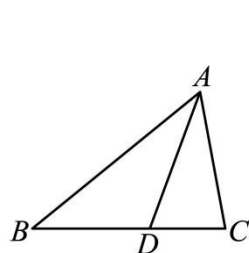


图1

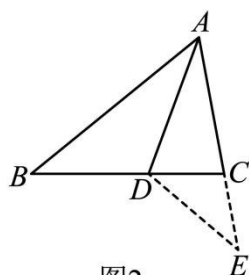


图2

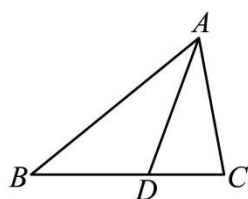


图3

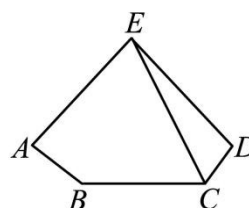


图4

(1) 我们可以通过作辅助线，构造全等三角形来解题．如图2，延长 AC 至点 E ，使得 $AE = AB$ ，连接 DE ，
.....，请判断 AB ， CD ， AC 之间的数量关系并补充完整解题过程．

(2) 以上方法叫做“补短法”．我们还可以采用“截长法”，即通过在 AB 上截取线段构造全等三角形来解题．

如图3，在线段 AB 上截取 AF ，使得 $AF = \text{①}$ ———，连接 FD ———．请补全空格，并在图3中画出辅助线．

延伸探究

(3) 小明发现“补短法”或“截长法”还可以帮助我们解决其他多边形中的问题．如图4，在五边形 $ABCDE$ 中，

$EA = ED$ ， $AB + DC = BC$ ， $\angle A + \angle D = 180^\circ$ ，若 $\angle BCD = 120^\circ$ ，求 $\angle BCE$ 的度数．

8. (24-25 七年级下·上海·期末) 已知，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$ ， E 、 F 分别是

边 BC 、 CD 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$ ．

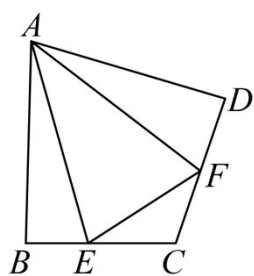


图 1

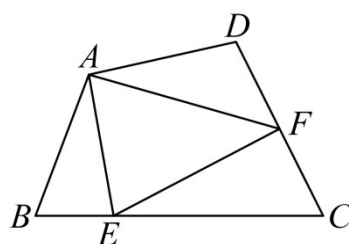


图 2

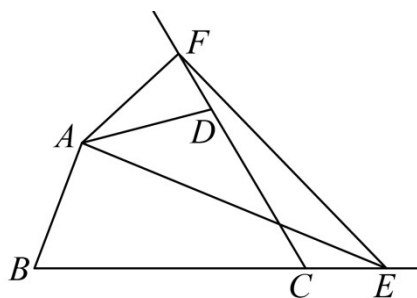


图 3

(1)为探究上述问题，小王同学先画出了其中一种特殊情况，即如图 1，当 $\angle B = \angle ADC = 90^\circ$ 时。

小王同学探究此问题的方法是：延长 FD 到点 G ，使 $DG = BE$ ，连接 AG 。

请在图 1 中添加上述辅助线，并补全下面的思路。

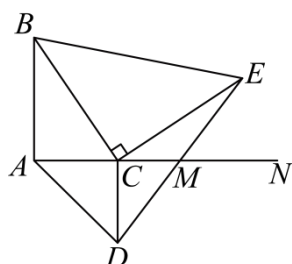
小明的解题思路：先证明 $\triangle ABE \cong$ ——；再证明了 $\triangle AEF \cong$ ——，即可得出 BE ， EF ， FD 之间的数量关系为——。

(2)请你借鉴小王的方法探究图 2，当 $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$ 时，上述结论是否依然成立，如果成立，请证明你的结论，如果不成立，请说明理由。

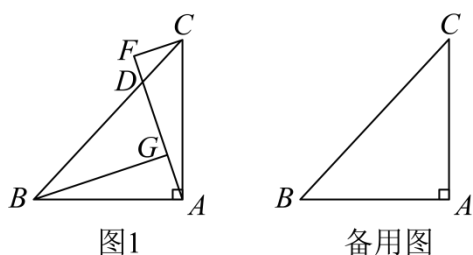
(3)如图 3，若 E 、 F 分别是边 BC 、 CD 延长线上的点，其他已知条件不变，此时线段 EF ， BE ， FD 之间的数量关系为——。（不用证明）

知识点 04 一线三等角

1. (24-25 七年级下·上海·期末) 如图所示, 线段 $AB = 10\text{cm}$, 射线 $AN \perp AB$ 于点 A , 点 C 是射线上一动点, 分别以 AC 、 BC 为直角边作等腰直角三角形, 得 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCE$ 中, 连接 DE 交射线 AN 于点 M , 则 CM 的长为_____.

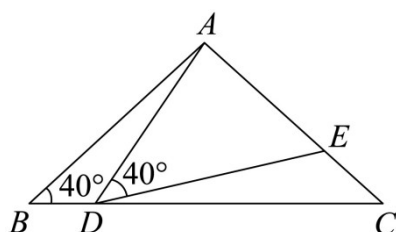


2. (24-25 七年级下·上海·期末) 已知: $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 为直线 BC 上一点, 过点 B 作 $BG \perp$ 直线 AD 于点 G , 过点 C 作 $CF \perp$ 直线 AD 于点 F .



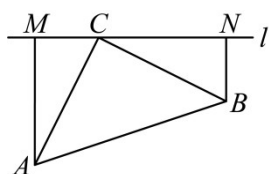
- (1) 如图 1, 若 $BG = 7$, $CF = 2$, 则 $GF =$ _____;
- (2) 当点 D 在直线 BC 上运动时, $FG = 10$, $BG = 6$, 则 $CF =$ _____.
3. (24-25 七年级下·上海·期末) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2$, $\angle B = 40^\circ$, 点 D 在线段 BC 上运动 (D 不与 B , C 重合), 连接 AD , 作 $\angle ADE = 40^\circ$, DE 交线段 AC 于 E .
- (1) 当 $\angle BDE = 115^\circ$ 时, $\angle BAD =$ _____, 点 D 从 B 向 C 运动时, $\angle BAD$ 逐渐变_____(填“大”或“小”);
- (2) 当 DC 等于多少时, $\triangle ABD \cong \triangle DCE$, 请说明理由;

(3) 在点 D 的运动过程中, $\triangle ADE$ 的形状也在改变, 判断当 $\angle BAD$ 等于多少时, $\triangle ADE$ 是等腰三角形.

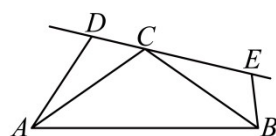


4. (24-25 七年级下·上海·期末) 如图①, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$ 过点 C 在 $\triangle ABC$ 外作直线

l , $AM \perp l$ 于点 M , $BN \perp l$ 于点 N .



图①



图②

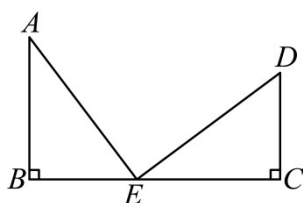
(1) 试说明: $MN = AM + BN$;

(2) 如图②, 将 (1) 中条件改为 $\angle ADC = \angle CEB = \angle ACB = \alpha$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$), $AC = BC$, 请问 (1) 中的结

论 $DE = AD + BE$ 是否还成立? 请说明理由.

5. (24-25 七年级下·上海·期末) 如图, $AB \perp BC$, $DC \perp BC$, 垂足分别是点 B 、 C , 点 E 是线段 BC 上一

点, 且 $AE \perp ED$, $AE = ED$.



(1) 求证： $AB = EC$ ；

(2) 若 $BE = 3$ ， $AB + BC = 11$ ，求 AB 的长。

6. (24-25 七年级下·黑龙江·期末) 通过对下面数学模型的研究学习，解决下列问题：

【模型呈现】

某兴趣小组在从汉代数学家赵爽的弦图（如图¹，由外到内含三个正方形）中提炼出两个三角形全等模型

图（如图²、图³），即“一线三等角”模型和“K字”模型。



赵爽

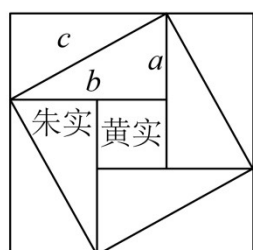


图1

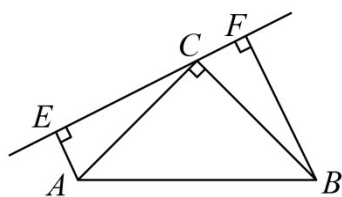


图2

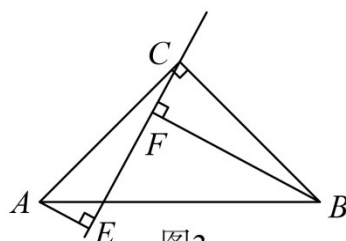


图3

【问题发现】（¹）如图²，已知 $\triangle ABC$ 中， $CA = CB$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，一直线过顶点 C ，过 A ， B 分别作其

垂线，垂足分别为 E ， F ，求证： $\triangle AEC \cong \triangle CFB$ ；

（²）如图³，若改变直线的位置，其余条件与（¹）相同，请写出 EF ， AE ， BF 之间的数量关系，并说

明理由；

【问题提出】

(3) 在 (2) 的条件下，若 $BF = 4AE$ ， $EF = 5$ ，求 $\triangle BFC$ 的面积。

7. (24-25 七年级下·上海黄浦·期末) (1) 观察理解：如图 1， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，直线

l 过点 C ，点 A ， B 在直线 l 同侧， $BD \perp l$ ， $AE \perp l$ ，垂足分别为 D ， E ，由此可得：

$\angle AEC = \angle CDB = 90^\circ$ ，所以 $\angle CAE + \angle ACE = 90^\circ$ ，又因为 $\angle ACB = 90^\circ$ ，所以 $\angle BCD + \angle ACE = 90^\circ$ ，所以

$\angle CAE = \angle BCD$ ，又因为 $AC = BC$ ，所以 $\triangle AEC \cong \triangle CDB$ _____；（请填写全等判定的方法）

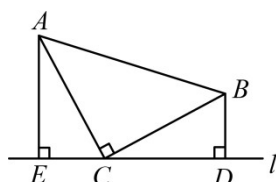


图1

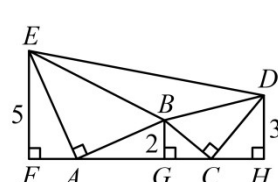


图2

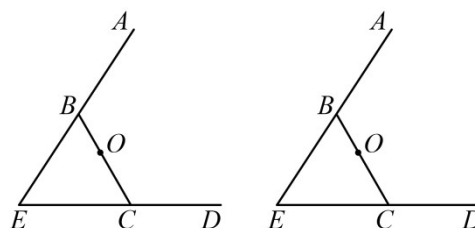


图3

(2) 理解应用：如图 2， $AE \perp AB$ ，且 $AE = AB$ ， $BC \perp CD$ ，且 $BC = CD$ ，利用 (1) 中的结论，请按照图

中所标的数据计算图中 $\triangle ABC$ 的面积是_____；

(3) 拓展提升：如图 3，等边 $\triangle EBC$ 中， $EC = 8\text{cm}$ ，点 O 在 BC 上，且 $OC = 5\text{cm}$ ，动点 P 在射线 EC 上，

连接 OP ，将线段 OP 绕点 O 逆时针旋转 120° 得到线段 OF 。

①当 $OF \parallel ED$ 时， OP 的长是_____。

②当点 F 恰好落在射线 EB 上时，请直接写出 EP 的长．

8. (24-25 七年级下·上海·期末) (1) 课本习题回放：“如图①， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， $AD \perp CE$ ，

$BE \perp CE$ ，垂足分别为 D ， E ， $AD = 2.5\text{cm}$ ， $DE = 1.7\text{cm}$ ．求 BE 的长”，请直接写出此题答案： BE 的长

为_____．

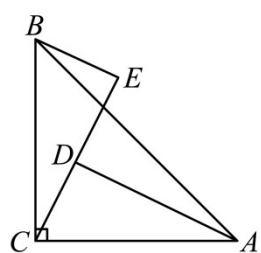
(2) 探索证明：如图②，点 B ， C 在 $\angle MAN$ 的边 AM 、 AN 上， $AB = AC$ ，点 E ， F 在 $\angle MAN$ 内部的

射线 AD 上，且 $\angle BED = \angle CFD = \angle BAC$ ．求证： $\triangle ABE \cong \triangle CAF$ ．

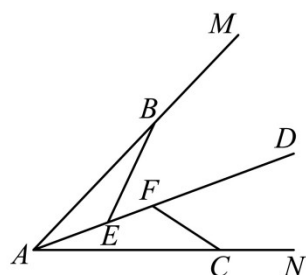
(3) 拓展应用：如图③，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $AB > BC$ ．点 D 在边 BC 上， $CD = 2BD$ ，点 E 、 F 在

线段 AD 上， $\angle BED = \angle CFD = \angle BAC$ ．若 $\triangle ABC$ 的面积为 15，则 $\triangle ACF$ 与 $\triangle BDE$ 的面积之和为_____．

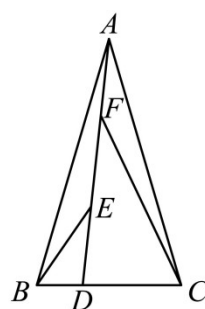
(直接填写结果，不需要写解答过程)



图①



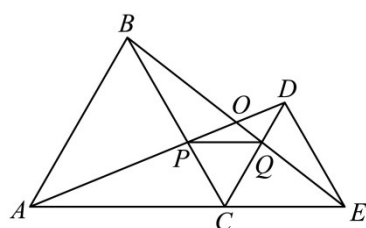
图②



图③

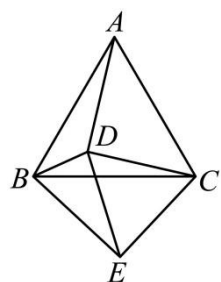
知识点 05 手拉手模型

1. 如图， C 为线段 AE 上一动点（不与点 A, E 重合），在 AE 同侧分别作等边 $\triangle ABC$ 和等边 $\triangle ECD$ ， AD 与 BE 交于点 O ， AD 与 BC 交于点 P ， BE 与 CD 交于点 Q ，连接 PQ 。以下结论不正确的是（ ）

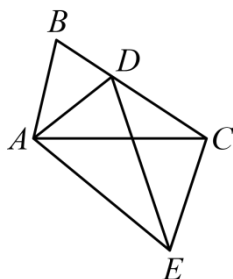


- A. $AD = BE$ B. $DE = DP$ C. $AP = BQ$ D. $\angle AOB = 60^\circ$

2. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 是等边三角形且 $\angle DBE = 67^\circ$ ，则 $\angle ADB = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。



3. 已知：如图，点 D 在线段 BC 上， $AD = AB$ ， $\angle BAD = \angle CAE$ ， AD 平分 $\angle BDE$ 。求证：



- (1) $\triangle ACE$ 是等腰三角形。

- (2) $\angle CAE = \angle CDE$ 。

4. 如图， $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 的顶点 O 重合， $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$ ， $OA = OB$ ， $OC = OD$ ，连接 AD 、 BC ，

将 $\triangle COD$ 绕点 O 旋转。

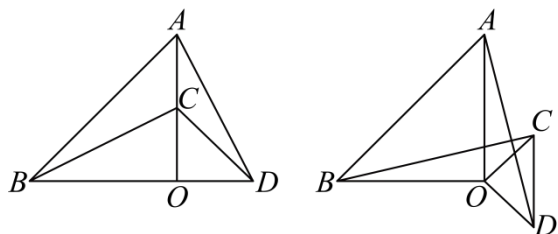


图1

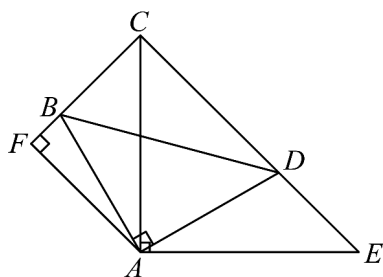
图2

(1) 如图1， BC 和 AD 的关系为_____。

(2) 如图2，将 $\triangle COD$ 绕点 O 转动至如图2所示位置时，探究 (1) 中的结论是否仍然成立？若成立，请

写出证明过程；若不成立，请说明理由。

5. 如图， $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 是等腰直角三角形， $\angle BAD = \angle CAE = 90^\circ$ ， $AF \perp CB$ ，垂足为 F 。



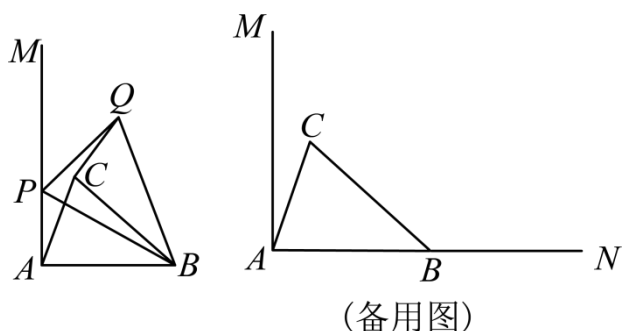
(1) 求证： $\angle ABF = \angle ADC$ ；

(2) 判断 AF 和 CE 的位置关系，并说明理由；

(3) 求证： $CD = 2BF + DE$ 。

6. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ， $\angle ABC = \alpha$ ($0 < \alpha < 60^\circ$) 射线 $AM \perp AB$ ，点 P 为射线 AM 上的动点

(点 P 不与点 A 重合)，连接 BP ，将线段 BP 绕点 B 顺时针旋转角度 α 后，得到线段 BQ ，连接 PQ 、 QC 。



(1) $\triangle PAB$ 与 $\triangle QCB$ 全等吗？试说明理由；

(2) 延长 QC 交射线 AM 于点 D ，在点 P 的移动过程中， $\angle QDM$ 的大小是否发生变化？若改变请说明理由，

若不改变，请求出 $\angle QDM$ 的大小（用含 α 的代数式表示）；

(3) 当 $BQ \parallel AC$ 时， $AB = m$ ， $AP = n$ 过点 Q 作 QE 垂直射线 AB ，垂足为 E ，那么 $S_{\triangle AEQ} =$ _____（用 m 、 n 的代数式表示）。

7. 已知 $\triangle ABC$ ，分别以 AB 、 AC 为边作 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ ，且 $AD = AB$ ， $AC = AE$ ， $\angle DAB = \angle CAE$ ，连接 DC 与 BE ， G 、 F 分别是 DC 与 BE 的中点。

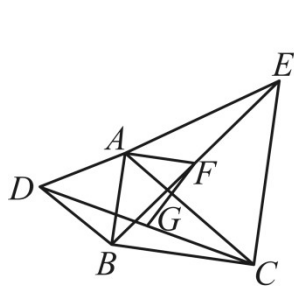


图1

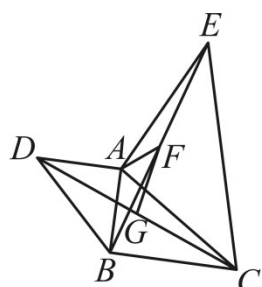


图2

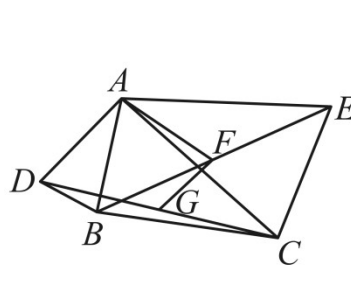


图3

(1) 如图1，若 $\angle DAB = 60^\circ$ ，则 $\angle AFG =$ _____；

(2) 如图2，若 $\angle DAB = 90^\circ$ ，则 $\angle AFG =$ _____；

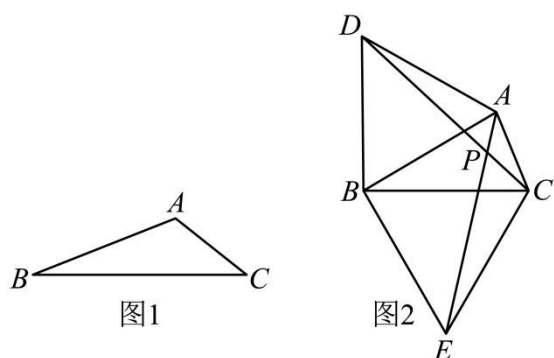
(3) 如图3，若 $\angle DAB = \alpha$ ，试探究 $\angle AFG$ 与 α 的数量关系，并给予证明。

8. 设平面上的三个点 A 、 B 、 C . 需确定点 P 的位置, 使 $PA + PB + PC$ 最小. 当点 A 、 B 、 C 共线时, 点 P

应取三点中居中的点. 当点 A 、 B 、 C 不共线时, 分成两类; $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 120° 和 $\triangle ABC$ 的

三个内角均小于 120° . 约 1640 年, 法国数学家费马 (PierredeFermat, 1601 - 1665) 提出了这个问题, 此

问题中求得的点 P 也称为费马点, 并由意大利数学家托里拆利首次证明.



下面来探究当点 A 、 B 、 C 不共线时的情况:

(1) 如图 1, 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$ 时, _____ 为所求费马点.

(2) 如图 2, 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, 最大角 $\angle BAC < 120^\circ$ 时, 我们可以快速找到这类三角形的费马点, 作法如

下: 分别以 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 BC 为边向外作等边三角形 ABD 和等边三角形 BCE , 此时 CD 和 AE 交于一点

P , 点 P 就是所求的费马点.

①请找出图中与 AE 相等的线段, 并说明理由;

②为了验证作图中找到的点 P 就是费马点, 连接 BP , 求证: $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$.