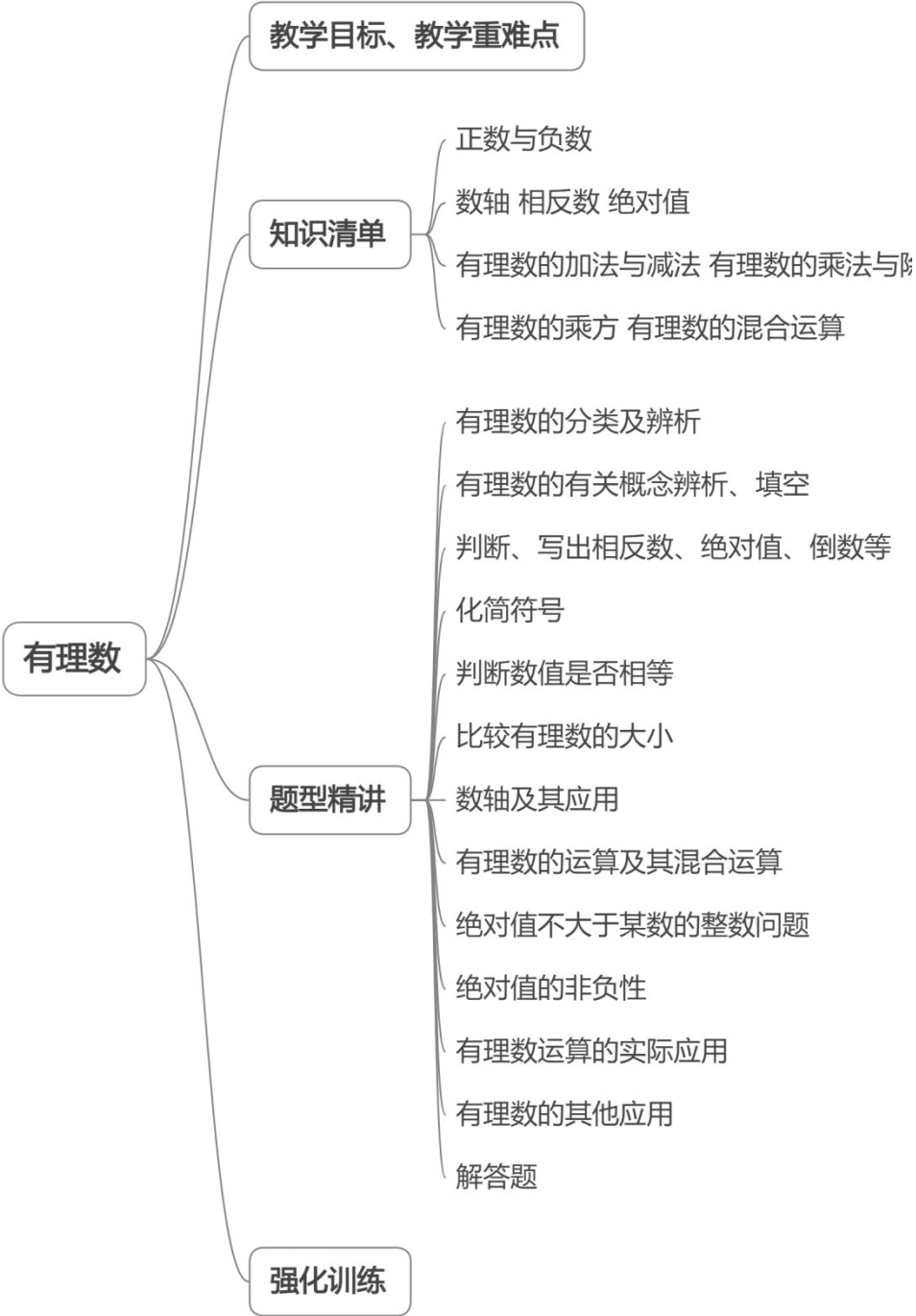


第 1 章 有理数

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 理解正负数的意义，掌握有理数的概念；
------	-----------------------

	2. 理解并会用有理数的加、减、乘、除和乘方五种运算法则进行有理数的混合运算； 3. 学会借助数轴来理解绝对值、有理数比较大小等相关知识。
教学重难点	1.重点 (1) 有理数的有关概念及分类； (2) 数轴、相反数、绝对值的认识及其应用； (3) 有理数的五种运算法则；有理数运算的代数应用及实际应用。 2.难点 (1) 数轴、绝对值等在有理数中综合应用，如判断符号、分类讨论求值等； (2) 有理数运算的简便运算、构造方法等。

知识清单

知识点1 正数与负数

1.具有相反意义的量

①具有相反意义的量

a.零上温度和零下温度是具有相反意义的量.

b.海平面以上高度和海平面以下高度也是具有相反意义的量.

②表示具有相反意义的量

在表示温度时，为了区别零上温度和零下温度，通常规定在零上温度的前面添上符号“+”(读作“正”),而在零下温度的前面添上符号“-”(读作“负”)。零上 5°C ,就记作 $+5^{\circ}\text{C}$,读作“正五摄氏度”;零下 2°C ,就记作 -2°C ,读作“负二摄氏度”

2.正数与负数

①正数：像 $+5$ 、 $+8848.86$ 、 $+3$ 、 $+1.5$ 、 $+\frac{1}{2}$ 、 $+584$ 等大于 0 的数，叫做正数；

②负数：像 -2 、 -154.31 、 -1.5 、 $-\frac{1}{2}$ 、 -584 等在正数前面加“-”号的数，叫做负数。
即小于 0 的数，叫做负数。

3.有理数的概念

①整数：像 71、-12 分别是正整数、负整数，它们和零都是整数；我们把正整数、0、负整数统称整数。

②分数： $5\frac{1}{2}$ 和 $\frac{12}{7}$ 是正分数， $-\frac{3}{4}$ 和 $-\frac{9}{5}$ 是负分数，正分数和负分数都是分数。

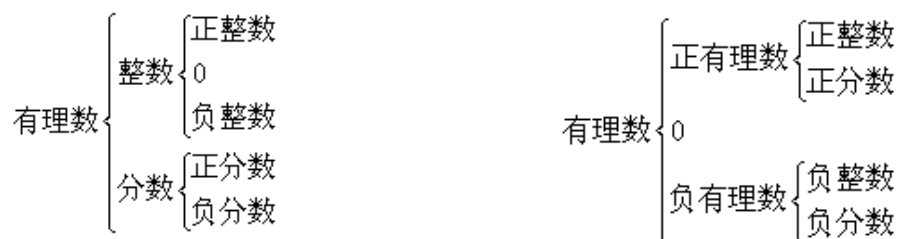
③所有的整数都可以用分数表示：所有的整数都可以写成分母为 1 的分数，如 $3 = \frac{3}{1}$ ， $0 = \frac{0}{1}$

$\frac{b}{a}$

④有理数：能够写成分数 $\frac{b}{a}$ (a, b 是整数, $a \neq 0$) 的数叫有理数。

2.有理数的分类

(1) 按整数、分数的关系分类： (2) 按正数、负数与 0 的关系分类：



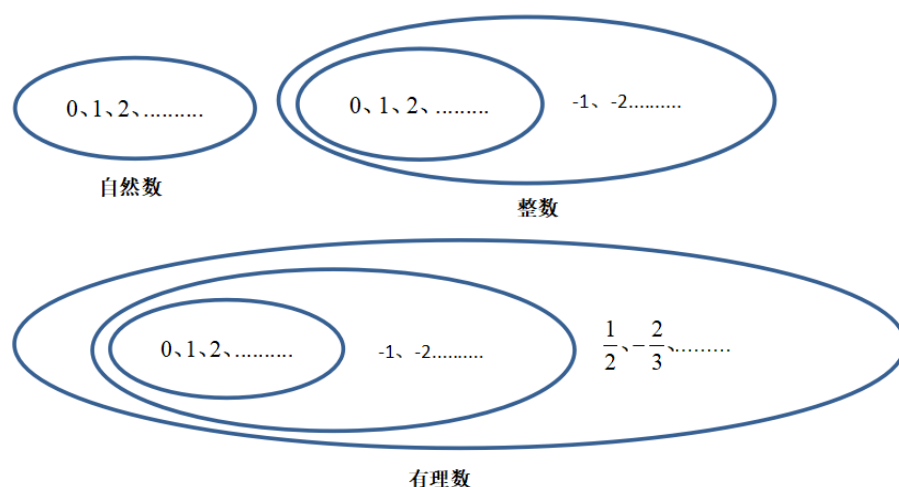
要点：

(1) 分数与有限小数、无限循环小数可以互化，所以有限小数和无限循环小数可看作分数，但无限不循环小数不是分数，例如 π 。

(2) 正数和零统称为非负数；负数和零统称为非正数。

4.自然数、整数、有理数的关系

自然数是整数的一部分、整数是有理数的一部分，它们之间的关系如图所示：



【即学即练】

1. 如果珠穆朗玛峰高出海平面 8848.86m 记作 +8848.86m，那么某海沟低于海平面 1000m，记作_____m。

2. 在 -0.8 ， $+3$ ， $\frac{\pi}{2}$ ， 0 ， $-\frac{5}{3}$ ， $3.010010001\dots$ (每两个 1 之间的 0 个数逐次增加 1) 中，有理数个数共有 ()

A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

3. 下列不具有相反意义的量的是 ()

- A. 前进5米和后退5米 B. 身高增加2厘米和体重减少2千克
C. 超过5克和不足2克 D. 节约10吨水和浪费1吨水

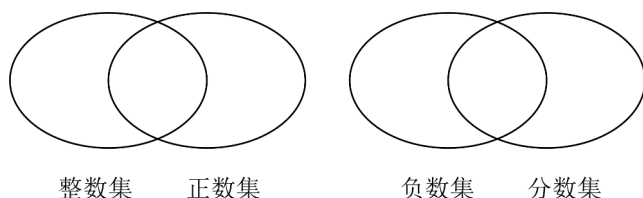
4. 下列说法中正确的有 ()

①一个数前面加上“-”号就是负数；②非负数就是正数；③ 0 既不是正数，也不是负数；④正数和负数统称为有理数；⑤正整数与负整数统称为整数；⑥正分数与负分数统称为分数；⑦ 0 是最小的整数；⑧最大的负数是 -1 。

- A. 5个 B. 4个 C. 3个 D. 2个

5. 下列各数填入表示它所在的数集的圈里：

$+6, -18, 2022, -3.14, 0, 95\%, \frac{22}{7}, -1.8, -\frac{3}{5}$



知识点2 数轴 相反数 绝对值

1. 数轴的画法

- ①如图 1-1-9,画一条直线(一般画成水平的直线),在直线上任取一点表示 O ,把这个点叫作**原点**；
②规定直线的一个方向(一般取从左往右的方向)为**正方向**，并用**箭头**表示；
③再选取适当长度作为一个**单位长度**.在直线上，从原点向右，每隔一个单位长度取一个点，依次表示为 1 、 2 、 3 等；从原点向左，用类似方法依次取点，并表示为 -1 、 -2 、 -3 等。

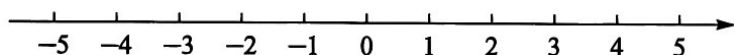


图 1-1-9

2. 数轴

定义：像这样规定了**原点**、**正方向**和**单位长度**的直线叫作**数轴**。

3. 用数轴上的点表示有理数

例如， 2 可以用数轴上位于原点右边、距离原点 2 个单位长度的点表示， 3.4 可以用数轴上位于原点右边、距离原点 3.4 个单位长度的点表示， -3 可用数轴上位于原点左边、距离原点 3 个单位长度的点表示。

4. 数轴与有理数的关系

每一个有理数都可以用**数轴上唯一的一个点**来表示，但数轴上的点不都表示有理数，还可以表示其他数，比如 π 。

5. 相反数 互为相反数

①**举例**：像 3 和 -3 这样，只有符号不同的两个数，我们说其中一个数是另一个数的**相反数**； 3 与 -3 **互为相反数**。

②**相反数的定义**：如果两个数只有符号不同，那么称其中一个数为另一个数的相反数．特别地，0 的相反数是 0．

③一般地，数 a 和数 $-a$ 互为相反数，也就是数 a 的相反数是 $-a$ ，数 $-a$ 的相反数是 a ，这里的 a 表示一个有理数。

6.性质：

(1) 互为相反数的两数的点分别位于原点的两旁，且与原点的距离相等（这两个点关于原点对称）．

(2) 互为相反数的两数和为 0．

7.绝对值

一般地，数 a 在数轴上所对应的点到原点的距离叫作数 a 的**绝对值**，记作 $|a|$ ，读作“绝对值 a ”或“ a 的绝对值”。

要点：

(1) 绝对值的代数意义：一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0．即对于任何有理数 a 都有：

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

反过来，如果一个数的绝对值等于它本身，那么这个数是正数或 0；如果一个数的绝对值等于它的相反数，那么这个数是负数或 0。

(2) 绝对值的几何意义：一个数的绝对值就是表示这个数的点到原点的距离，离原点的距离越远，绝对值越大；离原点的距离越近，绝对值越小．

(3) 一个有理数是由符号和绝对值两个方面来确定的．

8.绝对值性质：

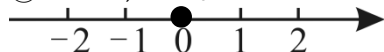
(1) 0 除外，绝对值为一正数的数有两个，它们互为相反数．

(2) 互为相反数的两个数（0 除外）的绝对值相等。

(3) 绝对值具有非负性，即任何一个数的绝对值总是正数或 0．

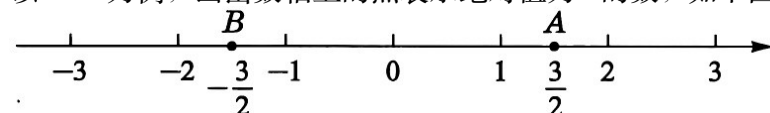
9.用数轴上的点表示绝对值为 a ($a \geq 0$) 的数

① $a=0$ 时，绝对值为 a 的数只有一个，即为 0，用数轴上的点表示如下图所示：



② $a > 0$ 时，绝对值为 a 的数有两个，分别是 a 和 $-a$ 。

以 $a = \frac{3}{2}$ 为例，画出数轴上的点表示绝对值为 a 的数，如下图所示：



10.有理数的大小比较

①.数轴法

每一个有理数都可以用数轴上唯一的一个点表示。用数轴上的点表示有理数时，这些点从左到右的顺序，就是有理数从小到大的顺序，即右边的点表示的数大于左边的点表示的数。

由此可知： $4 > 0, 0 > -2, 2 > -4, \dots$

②.法则比较法：

两个数比较大小，按数的性质符号分类，情况如下：

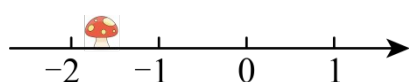
两数同号	同为正号：绝对值大的数大
	同为负号：绝对值大的反而小
两数异号	正数大于负数
- 数为 0	正数与 0：正数大于 0
	负数与 0：负数小于 0

【即学即练】

1. 下列各组数中，互为相反数的是 ()

- A. $-(+7)$ 与 $+(-7)$ B. $-\frac{1}{2}$ 与 $+(-0.5)$
- C. $-\frac{5}{4}$ 与 $\frac{4}{5}$ D. $+(-0.01)$ 与 $-(-0.01)$

2. 如图，数轴上蘑菇盖住的点表示的数，可能是 ()



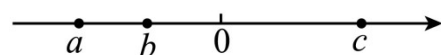
- A. -2.2 B. -1.7 C. 1.68 D. -1.1

3. 比较大小 (用“>”“<”或者“=”填写)： $-\frac{1}{3}$ _____ $-\frac{1}{2}$ ； $-(-2)$ _____ $|-3|$

4. 在下列各数 $-(+5)$, -12 , $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$, $-\frac{3^2}{4}$, $-(-1)^{2024}$, $-|-3|$ 中，负数有 ()

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

5. 已知 a, b, c 为实数，且它们在数轴上对应的点的位置如下图所示。



(1) $b-a$ _____ 0, $b+c$ _____ 0, $a-c$ _____ 0; (填“>”, “<”或“=”)

(2) 化简： $|b-a|+|b+c|-2|a-c|-|a|$.

知识点 3 有理数的加法与减法 有理数的乘法与除法

1.有理数的加法法则

(1) 同号两数相加，取原来加数的符号，并把绝对值相加.

(2) 异号两数相加，绝对值相等时和为 0; 绝对值不相等时，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值.

(3)任何一个数与0相加，仍得这个数.

2.有理数的加法交换律

加法交换律：

$$a+b=b+a.$$

其中 a、b 表示有理数.

3.有理数的加法结合律

加法结合律：

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

其中 a、b、c 表示有理数.

三个或三个以上的有理数相加：

三个或三个以上的有理数相加，既可以按从左到右的顺序计算，也可以根据加法交换律和结合律，任意交换加数的位置，或者先把其中的某几个数相加。

4.有理数的加法运算律小结

有理数加法运算律	加法交换律	文字语言	两个数相加，交换加数的位置，和不变
		符号语言	$a+b=b+a$
	加法结合律	文字语言	三个数相加，先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变
		符号语言	$(a+b)+c=a+(b+c)$

5.有理数的减法法则 减去一个数，等于加上这个数的相反数.

有理数的减法法则可以表示成

$$a-b=a+(-b).$$

6.有理数加减混合运算

将加减法统一成加法运算，适当应用加法运算律简化计算.

【即学即练】

1. 把 $-2-(+3)-(-4)$ 写成省略加号的和的形式，正确的是 ()

- A. $-2+3+4$ B. $-2-3+4$ C. $-2-3-4$ D. $-2+3-4$

2. 计算：

(1) $4-(-3)+(-12)$;

(2) $-5.4+0.2-0.6+1.8$;

(3) $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\times(-36)$;

(4) $(-2)^3 \div \frac{4}{5} + 6 \times \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) - 3 \times (-1)^{2019}$.

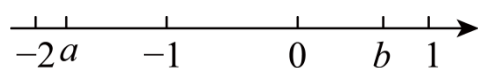
3. -6 的倒数是 ()

- A. 6 B. -6 C. $\frac{1}{6}$ D. $-\frac{1}{6}$

4. 如果 $\frac{|a|}{a} = -1$, 则 a 一定是 ()

- A. 正数 B. 负数 C. 非正数 D. 非负数

5. 已知实数 a, b 在数轴上的对应点的位置如图, 下列结论中正确的是 ()



- A. $a > b$ B. $|a| < |b|$ C. $ab > 0$ D. $-a > b$

知识点4 有理数的乘方 有理数的混合运算

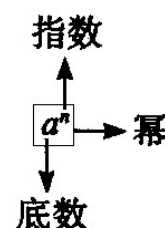
1. 有理数的乘方

一般地, 我们将 n (n 为正整数) 个相同乘数 a 相乘, 即 $\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n \text{ 个 } a}$, 记作 " a^n ", 读作 " a 的 n 次方".
在 " a^n " 中, a 叫做**底数**, n 称为**指数** (当指数 n 为 1 时可以省略不写).

求 n 个相同有理数的积的运算叫作**有理数的乘方**.

要点:

- (1) 乘方的结果叫做**幂**.
- (2) 乘方与幂不同, 乘方是几个相同有理数的乘法运算, 幂是乘方运算的结果.
- (3) 底数一定是相同的有理数, 当底数不是单纯的一个数时, 要用括号括起来.
- (4) 一个数可以看作这个数本身的一次方. 例如, 5 就是 5^1 , 指数 1 通常省略不写.



2. 有理数的混合运算

含有有理数的加、减、乘、除、乘方运算是有理数的混合运算.

有理数的混合运算, 可以按照以下顺序进行:

先算乘方, 再算乘除, 最后算加减. 同级运算, 从左到右进行. 如果有括号, 先进行括号内的运算.

【即学即练】

1. 计算

$$(1) \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \right) \div \left(-\frac{1}{12} \right)$$

$$(2) -1^2 - [2 - (-3)^2] - \left| \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right|$$

$$(3) 0.8 \times 1\frac{4}{9} + 2\frac{3}{4} \times (-10) + 0.8 \times \frac{5}{9} - \frac{3}{4} \times (-10)$$

2. 下列各组数中, 运算结果相同的是 ()

A. 2^3 与 3^2

B. -3^3 与 $(-3)^3$

C. -2^2 与 $(-2)^2$

D. $-\frac{2^3}{3}$ 与 $(-\frac{2}{3})^2$

3. 已知 $|3x-6|+(3+y)^2=0$ ，则 $y=$ _____.

4. 若 $a=-3^2$ ， $b=-(-1)$ ， $c=(-2)^3$ ，则 a 、 b 、 c 的大小关系是 ()

A. $b < c < a$

B. $a < c < b$

C. $c < b < a$

D. $b < a < c$

5. 定义一种新运算 $\odot$ ，规定运算法则为： $a \odot b = a^b + ab$ (a, b 均为整数，且 $a \neq 0$)，例如：

$3 \odot 2 = 3^2 + 3 \times 2 = 15$ ，则 $(-3) \odot 3$ 的值为 _____.

题型精讲

题型 01 有理数的分类及辨析

【典例 1】 在 $-(-2)$ 、 $-(-2)^2$ 、 $-|-2|$ 、 $(-2)^2$ 中，负数的个数为 ()

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

【变式 1】 有理数 -2 ， 0 ， 1 ， $2\frac{1}{2}$ 中，正整数有 () 个.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【变式 2】 在下列有理数 $-(+2)$ 、 -3^2 、 $(-\frac{1}{3})^3$ 、 $-\frac{2^2}{5}$ 、 $-(-1)^{2023}$ 、 $-|-3|$ 中，负数的个数是 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【变式 3】 把下列各数的序号填在适应的大括号内：

① -4 ；② 0 ；③ $\frac{\pi}{3}$ ；④ 10% ；⑤ 2021 ；⑥ $0.010010001..$ (两个 1 之间依次多 1 个 0)；⑦ $\frac{22}{7}$ ；⑧ $-(-0.5)$ ；

⑨ $-|-1\frac{3}{4}|$ ；⑩ $+(-4\frac{1}{3})$.

正分数集合： $\{ \text{_____} \dots \}$ ；

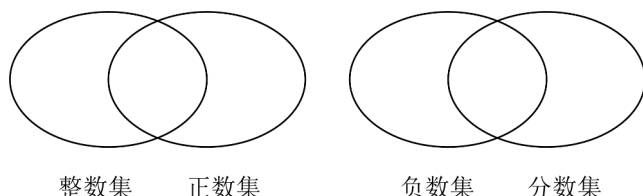
整数集合： $\{ \text{_____} \dots \}$ ；

负数集合： $\{ \text{_____} \dots \}$ ；

非负有理数集合： $\{ \quad \quad \quad \dots \}$.

【变式 4】 . 下列各数填入表示它所在的数集的圈里：

$+6, -18, 2022, -3.14, 0, 95\%, \frac{22}{7}, -1.8, -\frac{3}{5}$



题型 02 有理数的有关概念辨析、填空

【典例 1】 . 某蓄水池的标准水位记作 0m , 如果高于标准水位 0.2m 记作 $+0.2\text{m}$, 那么低于标准水位 0.5m 记作_____ .

【变式 1】 . 下列不具有相反意义的量的是 ()

- A . 前进 5 米和后退 5 米 B . 身高增加 2 厘米和体重减少 2 千克
C . 超过 5 克和不足 2 克 D . 节约 10 吨水和浪费 1 吨水

【变式 2】 . 下列说法正确的是 ()

- A . $-a$ 一定是负数 B . 整数和分数统称为有理数
C . 有理数分为正数, 负数和零 D . 正整数和负整数统称为整数

【变式 3】 . 下列结论中, 正确的是 ()

- A . 绝对值最小的数是 0
B . 绝对值等于它的相反数的数一定是负数
C . 有理数分为正有理数与负有理数两类
D . 倒数等于它本身的数只有 1

题型 03 判断、写出相反数、绝对值、倒数等

【典例 1】 . -6 的绝对值是 ()

- A . $\frac{1}{6}$ B . 6 C . -6 D . $-\frac{1}{6}$

【变式 1】 . 下列各数, 互为倒数的是 ()

A. -1 与 1

B. $1\frac{1}{2}$ 与 $\frac{2}{3}$

C. -0.8 与 0.8

D. -2 与 $\frac{1}{2}$

【变式2】 5 的相反数是_____， $-3\frac{1}{2}$ 的绝对值是_____， -2 的倒数是_____。

【变式3】 在实数 -2 ， 0 ， -1 ， 2 中，相反数是它本身的数是 ()

A. -2

B. 0

C. -1

D. 2

题型 04 化简符号

【典例1】 化简： $-|-6| =$ _____ $-(-3.4) =$ _____ $- \left[+ \left(-\frac{3}{4} \right) \right] =$ _____

$-(-|-5|) =$ _____

【变式1】 把 $(+5) - (+3) - (-1) + (-5)$ 写成省略括号的和的形式是 ()

A. $-5 - 3 + 1 - 5$

B. $5 - 3 - 1 - 5$

C. $5 + 3 + 1 - 5$

D. $5 - 3 + 1 - 5$

题型 05 判断数值是否相等

【典例1】 下列各式中，值相等的是 ()

A. -3^4 与 $(-3)^4$

B. $-(-2)$ 与 $-|-2|$

C. $(-1)^{2024}$ 与 1^{2024}

D. $72 \times (-2) + 120 \times (-2)$ 与 $72 \times 2 + 120 \times 2$

【变式1】 下列各对数中，数值相等的是 ()

A. -3^2 与 -2^3

B. -2^3 与 $(-2)^3$

C. -3^2 与 $(-3)^2$

D. $(-3 \times 2)^2$ 与 -3×2^2

题型 06 比较有理数的大小

【典例1】 比较大小： (1) 1 _____ -1 ， (2) $-\frac{2}{7}$ _____ $-\frac{4}{7}$ ； (3) $-(-3)$ _____ $-|-3|$ (填“>”、“<”或“=”)。

【变式1】 比较大小： 0 _____ -4 ， 60 _____ -24 ， $-\frac{2}{3}$ _____ $-\frac{3}{4}$ (填“>”、“<”或“=”)。

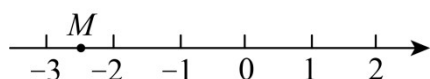
【变式2】. 下列⁴个数中最大的数是 ()

- A . -2 B . -1 C . 0 D . $\frac{1}{2}$

【变式3】. 比较大小： $-\frac{16}{17}$ ——— $-\frac{17}{18}$.

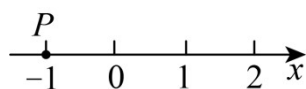
题型 07 数轴及其应用

【典例1】. 如图所示，点 M 表示的数是 ()



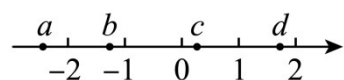
- A . 2.5 B . -1.5 C . -2.5 D . 1.5

【变式1】. 如图，数轴上点 P 向右平移³个单位后表示的数是 ()



- A . -1 B . 0 C . 1 D . 2

【变式2】. 有理数 a , b , c , d 在数轴上的对应点的位置如图所示，这四个数中，绝对值最大的是 () .



- A . a B . b C . c D . d

题型 08 有理数的运算及其混合运算

【典例1】. 计算：

$$(1) -2\frac{2}{3} + \left(-1\frac{3}{8}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(+5\frac{3}{8}\right)$$

$$(2) \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) \times (-36)$$

$$(3) -10 + 8 \div (-2)^2 - (-4) \times (-3)$$

$$(4) -1^4 - \frac{1}{6} \times [2 - (-3)^2] + -2$$

【变式1】. 计算：

$$(1) -12 + 7 - 20 + 9$$

$$(2) (+125) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+1\frac{3}{4}\right)$$

$$(3) \left[6 - \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{6} - 1\frac{7}{12}\right) \times 24\right] \div \left(-4 + 2\frac{3}{4}\right)$$

$$(4) -3^2 \times \frac{1}{2} - \left[(-5)^2 \times \left(-\frac{3}{5}\right) - 240 \div (-4) \times \frac{1}{4} - 2\right]$$

【变式2】 . 怎样简便就怎样算 .

$$(1) 3 - \frac{1}{9} \times 1\frac{1}{2} + \frac{5}{6} ;$$

$$(2) 0.9 - \left(0.15 + 0.35 \div \frac{5}{7}\right) ;$$

$$(3) 7.25 - 3\frac{3}{7} + 3.75 - 6\frac{4}{7} ;$$

$$(4) \left(2 - \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right) \div \left(\frac{1}{12} + \frac{4}{15}\right) ;$$

$$(5) \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{7}\right) \times (-5) \times 7 ;$$

$$(6) 299 \div \left(299 + \frac{299}{300}\right) .$$

【变式3】 . 计算 $(-7) \div (-\frac{1}{7}) \times 7$ 的结果为 ()

A . 1

B . -7

C . 7

D . 343

【变式4】 . 在数学课上，老师让 A 、 B 、 C 、 D 四位同学分别做了一道有理数运算题，你认为做对的是 ()

A . $9 - 3^2 \div 8 = 0 \div 8 = 0$

B . $24 - (4 \times 3^2) = 24 - 4 \times 6 = 0$

C . $(36 - 12) \div \frac{3}{2} = 36 \times \frac{2}{3} - 12 \times \frac{2}{3} = 16$

D . $(-3)^2 \div \frac{1}{3} \times 3 = 9 \div 1 = 9$

题型 09 绝对值不大于某个数的整数问题

【典例1】 . 绝对值大于 3 且小于 5 的所有整数的和是_____ .

【变式1】 . 绝对值不大于 5 的整数有

题型10 绝对值的非负性

【典例1】 . 已知 $|3x-6|+(3+y)^2=0$, 则 $y=$ _____ .

【变式1】 . 若 $|a-2|+|2b+6|=0$, 则 $\frac{a}{b}=$ _____ .

【变式2】 . 若 $|a+1|$ 与 $(b-2)^2$ 互为相反数, 则 ab 的值为_____ .

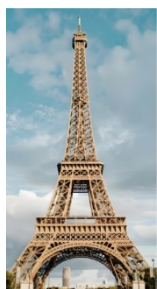
【变式3】 . 当 $|2m+7|-5$ 的值最小时, $m=$ _____ .

题型11 有理数运算的实际应用

【典例1】 . 一辆汽车 $\frac{2}{5}$ 小时行 24 千米, 照这样的速度 1 小时行_____千米;

【变式1】 . 陕西的拉面是一道美味佳肴, 细腻爽滑的面条搭配上丰富的调料, 令人回味无穷. 某拉面馆的师傅用一根很粗的面条, 拉一次变成 2 根, 拉 2 次变成 4 根, 拉 3 次变成 8 根, 照这样下去, 拉 6 次后, 师傅手中的拉面的根数是_____根.

【变式2】 . 如图, 这是法国巴黎的埃菲尔铁塔, 是世界著名的城市地标. 你知道吗? 它的高度并不固定, 钢铁受热胀冷缩影响, 长度会有细微的伸缩变化. 研究表明, 温度每升高 1°C , 埃菲尔铁塔就会增高 3mm . 据气象部门统计, 巴黎一年的温差能够达到 40°C , 则埃菲尔铁塔一年内的高度差可以达到_____cm.

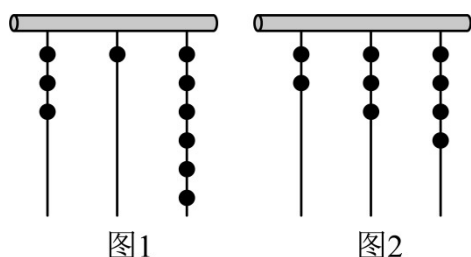


【变式3】 . 一张纸的厚度为 0.09mm , 假设连续对折始终是可能的. 若要使对折后的纸的厚度超过 1.62m , 则至少要对折_____次.

【变式4】 . 某种细胞开始有两个, 1 小时后分裂成 4 个并死去一个, 2 个小时后分裂成 6 个并死去一个, 3 小时后分裂成 10 个并死去 1 个, 按此规律, 请你计算经过 9 个小时后, 细胞存活的个数为_____个.

【变式5】 . 我国古代《易经》一书中记载, 远古时期, 人们通过在绳子上打结来记录数量, 即“结绳记数”. 如图, 一位母亲在从右到左依次排列的绳子上打结, 满七进一, 用来记录孩子自出生后的天数, 如图

¹，孩子出生后的天数 $= 3 \times 7^2 + 1 \times 7^1 + 6 = 147 + 7 + 6 = 160$ (天)，请根据图²，计算孩子自出生后的天数是

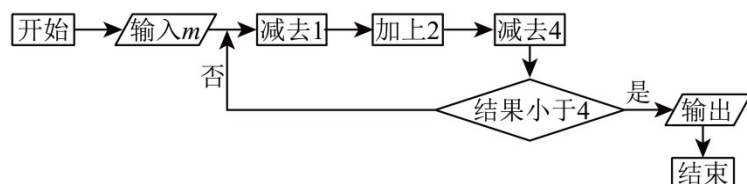


题型 12 有理数的其他应用

【典例 1】. 若 $|x| = 2$ ， $|y| = 3$ ，且 $xy < 0$ ，则 $x + y$ 的值为 ()

- A. 5 B. 5 或 1 C. 1 D. 1 或 -1

【变式 1】. 如图所示，根据程序计算，若输入 m 的值是 8，则输出的值为_____.



【变式 2】. 为求 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2023} + 2^{2024}$ 的值，可令 $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2023} + 2^{2024}$ ，则

$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2024} + 2^{2025}$ ，然后 $2S - S$ ，可以得到 $2S - S = 2^{2025} - 1$ ，则

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2023} + 2^{2024} = 2^{2025} - 1$. 仿照计算 $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2023} + 5^{2024}$ 的值是 ()

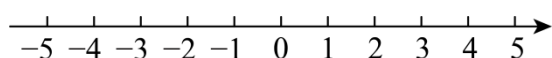
- A. $5^{2024} - 1$ B. $5^{2025} - 1$ C. $\frac{5^{2025}}{4} - 1$ D. $\frac{5^{2025} - 1}{4}$

【变式 3】. 若 a, b 都是不为零的数，则 $\frac{|a|}{a} + \frac{b}{|b|} + \frac{|ab|}{ab}$ 的结果为 ()

- A. 3 或 -3 B. 3 或 -1 C. -3 或 1 D. 3 或 -1 或 -3

题型 13 解答题

【典例 1】. 已知下列各有理数： $-(+2.5)$ ， $-|3|$ ， $\frac{3}{2}$ ，4.

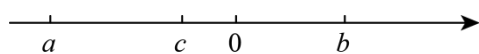


(1) 请在数轴上标出这些数表示的点；

(2) 用“>”号把这些数连接起来.

【变式1】 . 画出数轴，在数轴上表示下列各数，并用“<”连接， $-4.5, 2\frac{1}{2}, -|-2|, |-4|, (-1)^3, -(-3)$

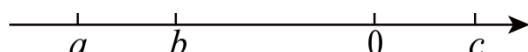
【变式2】 . 有理数 a, b, c 在数轴上的位置如图所示：



(1) 请在数轴上标出 $-a, -b, -c$ ；

(2) 比较 $a, b, c, -a, -b, -c$ 的大小（用“<”将它们连接起来）。

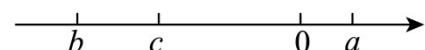
【变式3】 . 已知有理数 a, b, c 在数轴上的位置如图所示：



(1) 比较大小： a _____ 0 ； $b+c$ _____ 0 （填“>”“<”或“=”）；

(2) 化简： $|c-a| - |a+b|$ 。

【变式4】 . 有理数 a, b, c ，在数轴上的位置如图所示。



(1) $a+b$ _____ 0 ； $c-b$ _____ 0 ； $c-a$ _____ 0 ；（用“>”“<”“=”填空）

(2) 化简： $|a+b|$ = _____； $|c-b|$ = _____； $|c-a|$ = _____。

【变式5】 . 随着人们生活水平的提高，家用轿车越来越多地进入家庭。小明家买了一辆小轿车，他记录了连续7天中每天行驶的路程（如下表，单位：km），以50km为标准，多于50km的记为“+”，不足50km的记为“-”，刚好50km的记为“0”。

第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天	第七天
-8	-11	-14	0	-16	+38	+18

(1) 这七天中，行程最多的一天比行程最少的一天多行驶了多少千米？

(2) 请求出这七天中平均每天行驶多少千米；

(3) 若行驶100km需用汽油6L，汽油价为8元/L，请估计小明家一个月（按30天计算）的汽油费用是多少元？

【变式6】 . 某工厂要加工一批相同型号的零件，计划每天加工20件，但由于各种原因，实际每天的加工量与计划量相比会有所差异。下表是工厂在某周的加工情况（超过20件记为正，不足20件记为负）：

星期	一	二	三	四	五	六	日
增减 (件)	+5	-2	-4	+3	-1	+8	-7

(1) 求工厂当周一共加工的零件总数；

(2) 若每件零件的加工成本为 0.5 元，求该工厂当周的加工总成本；

(3) 为鼓励生产，工厂所在城市出台了如下奖惩制度：工厂每加工一件零件奖励 10 元，若某天超过了计划加工量，则当天再给予 200 元奖金，若某天没有达到计划加工量，则当天需缴纳 100 元罚金，求该工厂当周的奖励总额。

【变式 7】 . 我们规定一种新定义： $a \times b = 2ab - \frac{b}{2}$ ，其中符号“ $\times$ ”是我们规定的一种新定义，如

$$3 \times (-2) = 2 \times 3 \times (-2) - \frac{-2}{2} = -12 + 1 = -11, \text{ 根据新定义计算:}$$

$$(1) (-5) \times 4;$$

$$(2) (-3) \times (-6).$$

【变式 8】 . 阅读解题： $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ，...

$$\text{计算: } \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{2004 \times 2005} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005} = 1 - \frac{1}{2005} = \frac{2004}{2005} \text{ 理解以}$$

上方法的真正含义，计算：

$$(1) \frac{1}{10 \times 11} + \frac{1}{11 \times 12} + \cdots + \frac{1}{100 \times 101}$$

$$(2) \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{2005 \times 2007}$$

$$(3) \frac{1}{32} + \frac{1}{96} + \frac{1}{192} + \frac{1}{320} + \frac{1}{480}$$

【变式 9】 . 观察下列等式 $\frac{1}{1 \times 2} = 1 - \frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ，将以上三个等式两边分别相加得：

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

(1) 猜想并写出 $\frac{1}{n(n+1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 直接写出下列各式的计算结果：

① $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{2008 \times 2009} = \underline{\hspace{2cm}}$.

② $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 探究并计算： $\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \cdots + \frac{1}{2008 \times 2010}$.

强化训练

一、单选题

1. 在 $-\frac{1}{2}, 0, -2, \frac{1}{3}, 1$ 这五个数中，最小的数为 ()

A. $\frac{1}{3}$

B. 0

C. $-\frac{1}{2}$

D. -2

2. 下列各组数中，互为相反数是 ()

A. $|- \frac{2}{3}|$ 与 $-(- \frac{2}{3})$

B. $|- \frac{2}{3}|$ 与 $-| - \frac{3}{2}|$

C. $|- \frac{2}{3}|$ 与 $+(- \frac{2}{3})$

D. $|- \frac{3}{2}|$ 与 $|- \frac{2}{3}|$

3. 下列运算正确的是 ()

A. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 3 = 0 \times 3 = 0$

B. $3 \times 2^2 = (3 \times 2)^2 = 6^2 = 36$

C. $6 \div (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 6 \div \frac{1}{6} = 36$

D. $15 \div 6 \div 2 = 15 \div (6 \div 2) = 5$

4. 下列说法中错误的有 () 个 .

① 0 是绝对值最小的有理数；② 绝对值等于本身的数是正数；③ 数轴上原点两侧的数互为相反数；④ 两个数相互比较绝对值大的反而小；⑤ 若 $ab > 0$ ， $a + b < 0$ ，则 $a < 0$ ， $b < 0$ ；⑥ 若两个有理数的差是负数，则被

减数和减数中必有一个负数 .

A . 2 个

B . 3 个

C . 4 个

D . 5 个

二、填空题

5 . 比较大小 : $-\frac{1}{7}$ _____ $-\frac{1}{8}$

6 . 计算 : $-2 \div \frac{1}{2} =$ _____ .

7 . 绝对值小于 π 的正整数是 _____ .

8 . 若 a, b 互为相反数 , c, d 互为倒数 , 且 $|c| = 1$, 则 $\frac{a+b}{c} + c^2 - cd$ 的值为 _____ .

9 . 已知点 A 和点 B 都在同一条数轴上 , 点 A 表示 3 , 又知点 B 和点 A 相距 5 个单位长 , 则点 B 表示的数是 _____ .

10 . 我们常用的数是十进制数 , 计算机程序使用的是二进制数 (只有数码 0 和 1) , 二进制是逢 2 进 1 的计数制 , 两者之间可以互相换算 , 如将 $(101)_2$, $(1011)_2$ 换算成十进制数为 : ($(101)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 4 + 0 + 1 = 5$, $(1011)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 + 1 = 11$, 按此方式 , 则 $(1111)_2 =$ _____ .

三、解答题

11 . 认真阅读材料后 , 解决问题 :

计算 : $\frac{1}{30} \div (\frac{2}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5})$.

分析 : 利用通分计算 $\frac{2}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5}$ 的结果很麻烦 , 可以采用以下方法进行计算 .

解 : 原式的倒数是 $(\frac{2}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5}) \div \frac{1}{30}$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5} \right) \times 30$$

$$= \frac{2}{3} \times 30 - \frac{1}{10} \times 30 + \frac{1}{6} \times 30 - \frac{2}{5} \times 30$$

$$= 20 - 3 + 5 - 12 = 10 ,$$

故原式 = $\frac{1}{10}$.

仿照阅读材料计算： $\left(-\frac{1}{20}\right) \div \left(-\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{9}{10} - \frac{3}{2}\right)$.

12. 10月1日这一天下午，警车司机小张在东西走向的江北大道上值勤．如果规定向东为正，警车的所有行程如下（单位：千米）：

+5，-4，+3，-6，-2，+10，-3，-7

(1) 最后，警车司机小张在距离出发点的什么位置？

(2) 若警车每行驶10千米的耗油量为0.8升，那么这一天下午警车共耗油多少升？

(3) 如现在油价为每升7.34元，那么花费了多少油钱？

13. 探索研究：

(1) 比较下列各式的大小（用“<”“>”或“=”连接）

① $|3| + |-2|$ _____ $|3-2|$;

② $\left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{3}\right|$ _____ $\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right|$;

③ $|6| + |-3|$ _____ $|6-3|$.

(2) 通过以上比较，请你归纳出当 a, b 为有理数时 $|a| + |b|$ 与 $|a+b|$ 的大小关系．（直接写出结果）

(3) 根据(2)中得出的结论，当 $|x| + 2015 = |x - 2015|$ 时， x 的取值范围是_____．若

$|a_1 + a_2| + |a_3 + a_4| = 15$, $|a_1 + a_2 + a_3 + a_4| = 5$, 则 $a_1 + a_2 =$ _____ .