

专题 02 一次函数中的数学思想方法

题型归纳

题型一：数形结合思想

题型二：方程思想

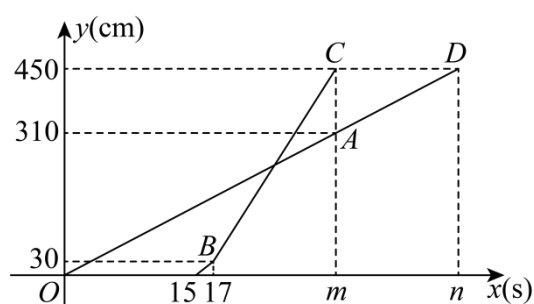
题型三：分类讨论思想

题型专练

题型 01 数形结合思想

数形结合是学习函数的核心思想之一，指把抽象的数、数量关系与函数图像特征相互转化、结合使用，以“以形助数、以数解形”的方式简化问题、破解难点。

【典例 1】 甲、乙两台智能机器人从同一地点出发，沿着笔直的路线行走了 450cm。甲比乙先出发，并且匀速走完全程，乙出发一段时间后速度提高为原来的 2 倍。设甲行走的时间为 $x(s)$ ，甲、乙行走的路程分别为 $y_1(cm)$ 、 $y_2(cm)$ ， y_1 、 y_2 与 x 之间的函数图像如图所示，根据图像所提供的信息解答下列问题：

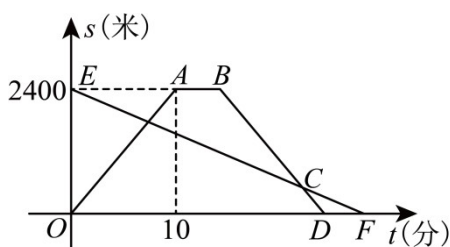


(1) 乙比甲晚出发_____s，乙提速前的速度是每秒_____cm， $m = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $n = \underline{\hspace{1cm}}$ ；

(2) 当 x 为_____时，乙追上了甲；

(3) 何时乙在甲的前面？

【典例 2】 小明租用共享单车从家出发，匀速骑行到相距 2400 米的邮局办事．小明出发的同时，他的爸爸以每分钟 96 米的速度从邮局沿同一条道路步行回家，小明在邮局停留了 2 分钟后沿原路按原速返回．设他们出发后经过 t （分）时，小明与家之间的距离为 s_1 （米），小明爸爸与家之间的距离为 s_2 （米），图中折线 $OABD$ 、线段 EF 分别表示 s_1 、 s_2 与 t 之间的函数关系的图像．

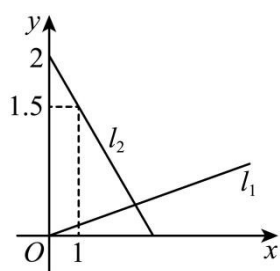


(1) 当 $t =$ _____ 分钟时，小明爸爸正好回到家；

(2) s_2 与 t 之间的函数表达式为 _____；

(3) 当 $t =$ _____ 分钟时，小明和爸爸第一次相遇．（第 (3) 需要写出过程）

【变式 1】 A ， B 两地相距 2 千米，甲步行从 A 地出发到 B 地，同时乙骑自行车从 B 地出发到 A 地，乙到达 A 地 12 分钟后甲到达 B 地，如图， l_1 ， l_2 分别表示甲、乙离 A 地的距离 y （千米）和所用时间 x （分钟）之间的函数关系．下列结论：① l_1 的表达式为 $y = \frac{1}{8}x$ ；② l_2 的表达式为 $y = -0.5x + 2$ ；③ 甲、乙相遇时，距 B 地 $\frac{2}{5}$ 千米；其中正确的有（ ）



A . ①②

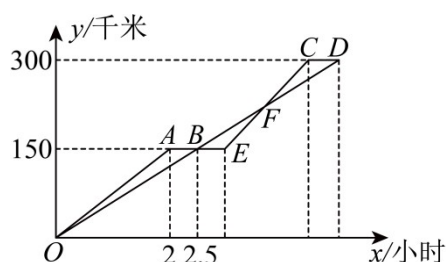
B . ②③

C . ①③

D . ①②③

【变式2】端午节是我国的传统节日，人们素有吃粽子的习俗．端午节前夕，某超市打算购进甲、乙两种

畅销的粽子，已知购进²箱甲种粽子和¹箱乙种粽子需用¹²⁸元；购进¹箱甲种粽子和⁴箱乙种粽子需用¹⁷⁶元．



(1)求甲种粽子每箱的进价和乙种粽子每箱的进价各是多少元；

(2)超市计划用不超过⁷⁶⁸⁰元的资金购进甲、乙两种粽子共²⁰⁰箱，其中甲种粽子的数量不低于乙种粽子

数量的³/₅，则超市共有几种购进方案？当购进两种粽子各多少箱时，所需资金最少？最少资金是多少元？

(3)该超市租用大、小两辆货车运输粽子，两车同时出发，途经休息区时大货车休息¹小时后加速行驶，而

小货车没有休息继续原速行驶，结果大货车比小货车早到达超市^{0.5}小时，大、小两车离出发地的路程^y

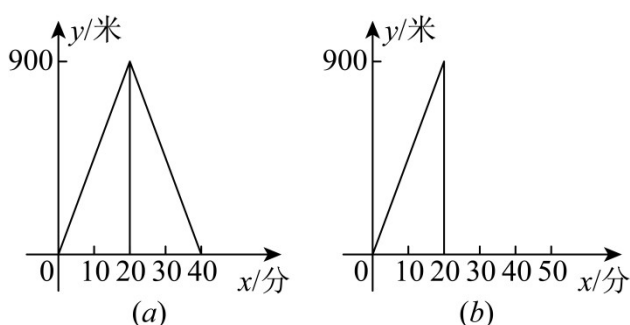
(单位：千米)与小货车出发的时间^x(单位：小时)的函数图象如图所示，请结合图象解答下列问题：

①大货车休息前的速度为_____千米/时；小货车的速度为_____千米/时；

②请直接写出小货车出发多少小时两车相距³⁰千米。

【变式3】小明的父母出去散步（均为匀速步行），从家走了20分钟到一个离家900米的报亭。母亲随即

按原来的速度返回，如（a）图所示。父亲在报亭看报10分钟，然后用15分钟返回家。



(1)请在（b）图中补全父亲离家的距离与所用时间的函数图象；

(2)由题意可知，小明的父母从家到报亭散步的速度是_____，若设小明家到报亭的距离 y 与小明的父母一

起散步所用时间 x 之间的函数关系式为 $y=kx$ ，则 k 的值是_____，由此可发现， k 表示：

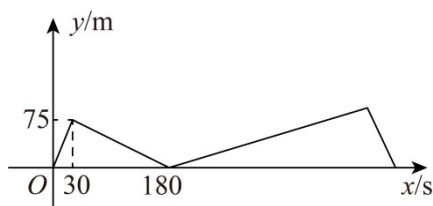
_____；

(3)求父亲返程的速度。

【变式4】甲、乙两人在直线道路上同起点、同终点、同方向，分别以不同的速度匀速跑步1500米，先到

终点的人原地休息，已知甲先出发³⁰秒后，乙才出发，在跑步的整个过程中，甲、乙两人的距离 y （米）

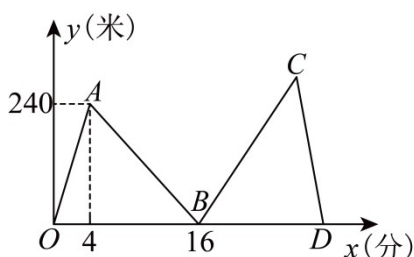
与甲出发的时间 x (秒) 之间的关系如图所示, 则乙到终点时, 甲距终点的距离是_____米.



【变式 5】 甲、乙两人在笔直的湖边公路上同起点、同终点、同方向匀速步行 2400 米, 先到终点的人原地

休息. 已知甲先出发 4 分钟, 在整个步行过程中, 甲、乙两人间的距离 y (米) 与甲出发的时间 x (分) 之

间的关系如图中折线 $OA-AB-BC-CD$ 所示.



(1) 求线段 AB 的表达式, 并写出自变量 x 的取值范围;

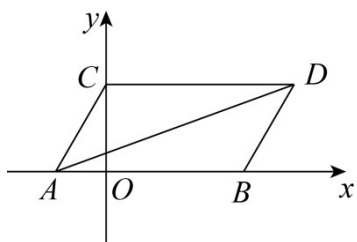
(2) 求乙比甲早几分钟到达终点?

题型 02 方程思想

方程思想是初中数学最基础、最核心的解题思想: 当问题中未知量无法直接求出时, **设未知数**, 根据题目里的**等量关系**列出方程 (或方程组、不等式), 通过解方程求交点坐标、动点问题、存在性问题, 联立解析式列方程求解。

【典例 1】 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A, B 的坐标分别为 $(-1, 0)$ 和 $(3, 0)$, 现将线段 AB 平移得到线

段 CD ，且点 A 的对应点 C 的坐标为 $(0,2)$ ，连接 AD 。



(1) 直接写出点 D 的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ， $\triangle ABD$ 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 平移线段 AD 得线段 EF ，点 A 的对应点 E 的坐标为 $E(a,b)$ ，如果 $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ 是方程 $2x+y=-3$ 的解，且点 F

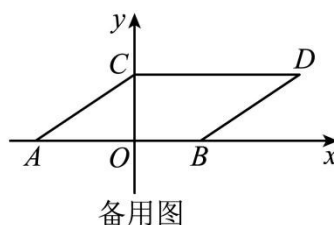
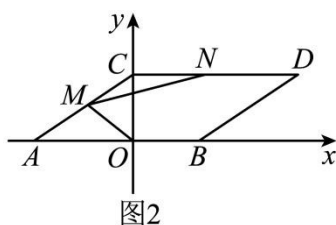
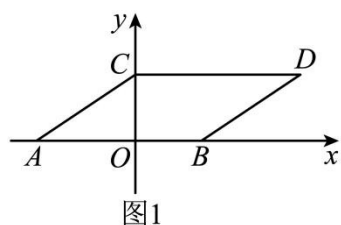
在第一象限内，并且横纵坐标相等，求 a,b 的值；

(3) 点 $P(t,0)$ 是 x 轴上位于点 A 右侧的动点，连接 PC ，将线段 PC 向右平移得线段 QD ，其中点 P 的对应点为 Q ，点 C 的对应点为 D ， H 是 QD 的中点，如果 $\triangle BDH$ 和 $\triangle PBD$ 面积相等，求 t 的值。

【变式1】 如图¹，在平面直角坐标系中，点 A, B 的坐标分别为 $A(a,0)$ ， $B(b,0)$ ，且 a, b 满足

$|a+6| + \sqrt{3a-2b+26} = 0$ ，现将线段 AB 先向上平移 4 个单位长度，再向右平移 6 个单位长度得到线段 CD ，

其中点 A 对应点为 C ，点 B 对应点为 D ，连接 AC ， BD 。



(1) 请直接写出 A, B 两点的坐标；

(2)如图 2，点 M 是线段 AC 上的一个动点，点 N 是线段 CD 的一个定点，连接 MN ， MO ，当点 M 在线段

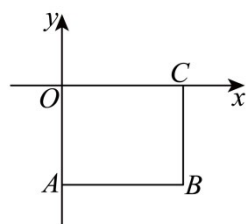
AC 上移动时（不与 A ， C 重合），探究 $\angle DNM$ ， $\angle OMN$ ， $\angle MOB$ 之间的数量关系，并说明理由；

(3)在坐标轴上是否存在点 P ，使三角形 PBC 的面积与三角形 ABD 的面积相等？若存在，请求出点 P 的坐

标；若不存在，试说明理由．

【变式 2】 如图，点 O 为平面直角坐标系的原点，在矩形 $OABC$ 中，两边 OC 、 OA 分别在 x 轴和 y 轴上，

且点 $B(a,b)$ 满足 $\sqrt{a-4\sqrt{3}}+(b+4)^2=0$ ．



(1)求点 B 的坐标 (_ , _)；

(2)若过点 B 的直线 BP 与矩形 $OABC$ 的 OC 边交于点 P ，且将矩形 $OABC$ 的面积分为 1:3 两部分：

①求直线 BP 的解析式；

②在直线 BP 确定一点 Q ，使得 $\triangle ACQ$ 的面积等于矩形 $OABC$ 的面积，求点 Q 的坐标．

【变式³】【数学活动回顾】七年级下册教材中我们曾探究过“以方程 $x-y=0$ 的解为坐标（ x 的值为横坐标， y 的值为纵坐标）的点的特性”，了解了二元一次方程的解与它的图像上点的坐标的关系。

规定：以方程 $x-y=0$ 的解为坐标的所有点的全体叫做方程 $x-y=0$ 的图像。

结论：一般地，在平面直角坐标系中，任何一个二元一次方程的图像都是一条直线。示例：如图¹，我们

在画方程 $x-y=0$ 的图像时，可以取点 $A(-1,-1)$ 和 $B(2,2)$ 作出直线 AB 。

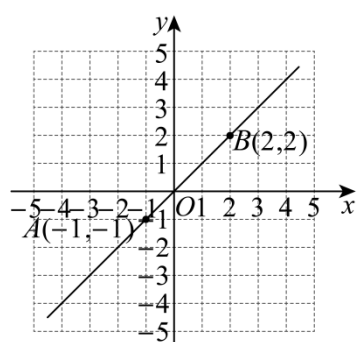


图1

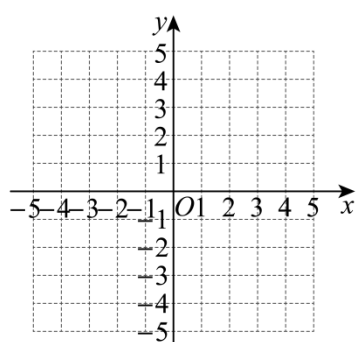


图2

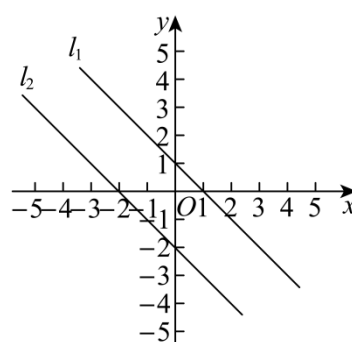


图3

【解决问题】（¹）请在图²所给的平面直角坐标系中画出二元一次方程组 $\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ 中的两个二元一次方程的图像。

（²）观察图²所画的图像，两条直线的交点坐标是——，由此得出这个二元一次方程组的解是——。

【拓展延伸】（³）①在同一平面直角坐标系中，二元一次方程 $x+y=1$ 的图像 l_1 和 $x+y=-2$ 的图像 l_2 如图

³所示。请根据图像，直接判断方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=-2 \end{cases}$ 的解的情况是——。（填“有解”或“无解”）

②已知点 $A(3,-2)$ ， $B(-1,2)$ 在二元一次方程 $ax+by=5$ 的图像上，求 a ， b 的值。

③在②的条件下，以关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 2x+3y=15-15m \\ 3x+2y=8+10m \end{cases}$ 的解为坐标的点在方程 $ax+by=5$ 的图像上，当

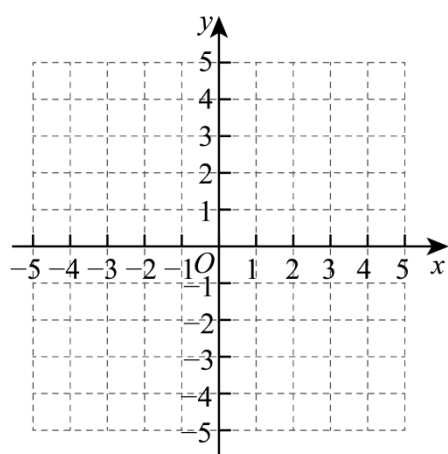
$n < m$ 时，化简： $|19-5n| - \sqrt{(5n-18)^2}$.

【变式4】 活动：二元一次方程的“图象”，在平面直角坐标系中，二元一次方程 $x-y=0$ 的一个解 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 可

以用一个点 $(1,1)$ 表示出来．标出一些以方程 $x-y=0$ 的解为坐标的点，过这些点中的任意两点作直线，可

以发现这些点落在同一条直线上．在这条直线上任取一点，这个点的坐标就是方程 $x-y=0$ 的解．一般地，

以一个二元一次方程的解为坐标的点的全体叫作这个方程的图象．二元一次方程的图象是一条直线．



(1)根据上述结论，在同一平面直角坐标系画出二元一次方程组 $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 中的两个二元一次方程的图象；

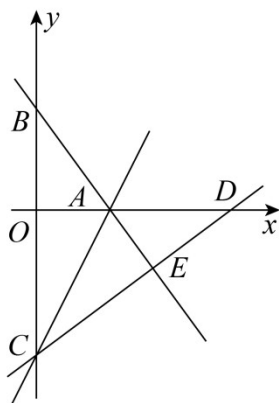
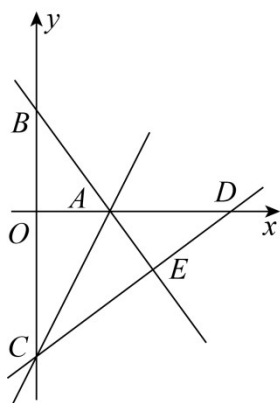
(2)点 $P(t,m)$ 、 $Q(1-2t,n)$ 分别是 $2x+y=4$ 、 $x-y=-1$ 图象上的点．

① $m-n$ 是否为定值？若是，则求出 $m-n$ 的值；若不是，则说明理由。

② 点 R 在坐标轴上，当 $t=2$ 时， $S_{\triangle PQR}=2$ ，求出 R 的坐标。

【变式 5】 如图，在平面直角坐标系中，直线 $AB: y = -\frac{4}{3}x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A ， B ，点 C 在 y 轴

的负半轴上，若将 $\triangle CAB$ 沿直线 AC 折叠，点 B 恰好落在 x 轴正半轴上的点 D 处。



备用图

(1) 点 A 的坐标是 _____，点 B 的坐标是 _____， AB 的长为 _____；

(2) 求点 C 的坐标；

(3) 点 M 是 y 轴上一动点，若 $S_{\triangle MAB} = \frac{1}{3} S_{\triangle OCD}$ ，直接写出点 M 的坐标；

(4) 在第一象限内是否存在点 P ，使 $\triangle PAB$ 为等腰直角三角形，若存在，直接写出点 P 的坐标；若不存在，

请说明理由。

题型 03 分类讨论思想

当一道题答案不唯一、情况有多种、条件不确定时，不能一概而论，要按统一标准分成不同类别，一类一

类分别分析、计算，最后汇总所有结果，做到不重复、不遗漏。

【典例 1】——增减性不确定

(24-25 八年级上·安徽·期中) 一次函数 $y=kx+b$ ，当 $-3 \leq x \leq 1$ 时，对应的 y 值为 $1 \leq y \leq 9$ ，则 kb 的值为()。

- A . 14 B . -6 C . -1 和 21 D . -6 和 14

【分析】一次函数可能是增函数也可能是减函数，应分两种情况进行讨论，根据待定系数法求出解析式即可。

【典例 2】——经过的象限不确定

(23-24 八年级下·湖北武汉·期末) 若一次函数 $y=kx+b$ (k, b 是常数) 的图象不经过第三象限，则一次函数 $y=-x+kb$ 的图象 ()

- A . 经过二、三、四象限 B . 不经过第一象限
C . 经过一、二、四象限 D . 不经过第三象限

【分析】直线不经过第三象限，包含只过二、四象限和经过一、二、四象限两种情况。

【典例 3】——与坐标轴的交点不确定

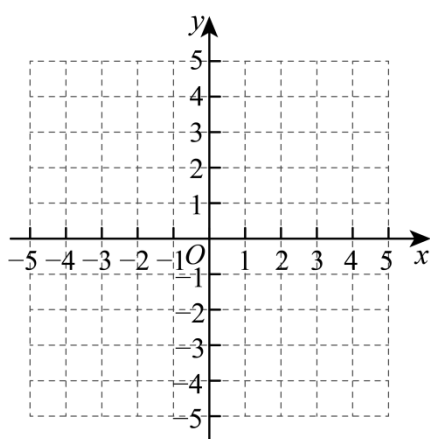
(24-25 八年级下·全国·单元测试) 已知一次函数的图象经过点 $(0, -2)$ ，且与两坐标轴围成的三角形的面积为 2，则此一次函数的解析式为_____。

【分析】直线与 x 轴的交点位置可能在原点左边，也可能在原点右边。

【典例 4】——等腰三角形的腰与底边不确定

(25-26 八年级上·贵州·期中) 已知一次函数与 x 轴交于点 $A(a,0)$ 与 y 轴交于点 $B(0,b)$. 且 a 与 b 满足

$$|b-2| + (a-3)^2 = 0$$



- (1) 求出点 A , 点 B 的坐标 ;
- (2) 求出一函数的表达式 , 并画出图象 ;
- (3) 在 x 轴上是否存在一点 C , 使三角形 ABC 是以 AB 为腰的等腰三角形 , 若不存在 , 请说明理由 ; 若存在 , 求出符合题意的点 C 的坐标 .

【分析】 (1) 由非负数的性质即可求 a 与 b 的值 ;

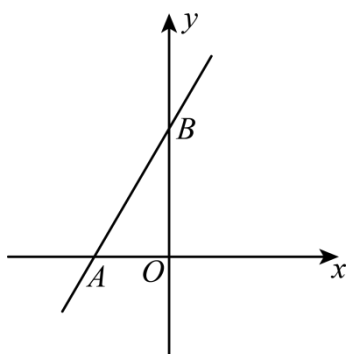
(2) 根据两点确定一条直线即可画图 ;

(3) 求出 AB , 分 $AB = AC$, $AB = BC$ 两种情况讨论 .

【典例 5】——平行四边形的对角线不确定

(24-25 九年级上·黑龙江绥化·月考) 如图，一次函数 $y = kx + b$ 与 x 轴相交于点 $A(-2, 0)$ ，与 y 轴相交于点

$B(0, 4)$



(1) 求一次函数的解析式；

(2) 请在平面内标注点 $C(1, 1)$ ，平面内是否存在一点 D ，使 A, B, C, D 四点构成平行四边形？若存在，直接写出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由。

【分析】(1) 点 $A(-2, 0)$ 和点 $B(0, 4)$ 的坐标代入 $y = kx + b$ ，用待定系数法求出一函数的解析式即可；

(2) 本题中需要分两种情况讨论： AB 为平行四边形的边、 AB 为平行四边形的对角线；

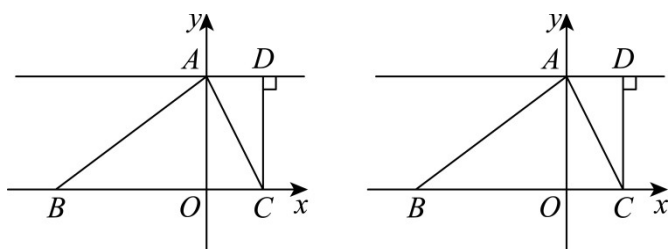
【典例 5】——动点跨越转折点求分段函数解析式

(24-25 七年级下·黑龙江·月考) 如图，在平面直角坐标系中，点 $A(0, n)$ ， $B(m, 0)$ 中的 m, n 是方程组

$\begin{cases} m+n=-2 \\ m-n=-14 \end{cases}$ 的解，点 C 在 x 轴的正半轴上，且 $OA=2OC$ ， $AB=10$ ，过点 A 作 $AD \perp y$ 轴，过点 C 作

$CD \perp AD$ 于点 D ，动点 P 从点 D 出发，以每秒 2 个单位长度的速度在射线 DA 上运动，同时另一动点 Q 从

点 B 出发向终点 A 运动，速度是每秒 3 个单位长度，设运动时间为 t 秒。



备用图

(1) 求出点 A 、 B 、 C 的坐标；

(2) 连接 PC ，请用含 t 的关系式来表示 $\triangle PAC$ 的面积 S ；

(3) 是否存在某一时刻 t ，使 $\triangle PAC$ 的面积等于 $\triangle BOQ$ 面积的一半，若存在，请求出 t 值；若不存在，请说

明理由。

【分析】题目主要考查解二元一次方程组，确定函数关系式，一元一次方程的应用，理解题意，结合题意

求解是解题关键。

(1) 根据题意解二元一次方程组求解即可；

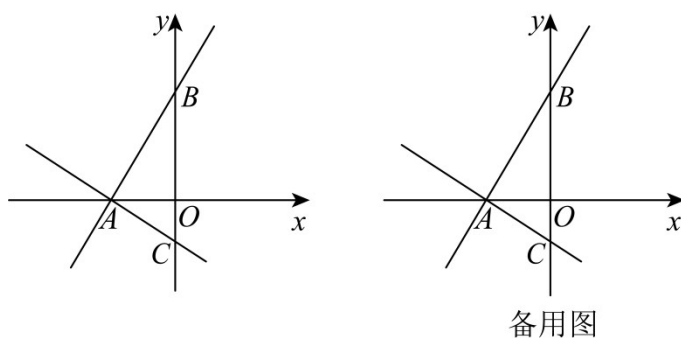
(2) 根据题意分两种情况分析：当 P 在 A 点右边时，当 P 在 A 点左边时，结合图形求面积即可；

(3) 作 $OH \perp AB$ 于点 H ，根据题意得出 $OH=4.8$ ，然后分两种情况分析：当 $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ 时，当 $\frac{3}{2} < t \leq \frac{10}{3}$ 时，

列出方程求解即可．

【变式1】（²⁴⁻²⁵ 八年级上·浙江杭州·期末）已知一次函数 $y = (m-2)x + m+3$ 的图像不经过第三象限，则 m 的取值范围是_____．

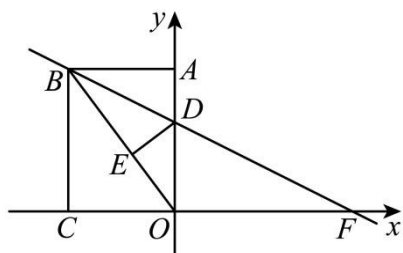
【变式2】（²⁵⁻²⁶ 八年级下·陕西西安·月考）如图，在平面直角坐标系中，直线 $AB : y = kx + 2$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 与 y 轴交于点 $B(0, 2)$ ．



(1) 求直线 AB 的表达式；

(2) 在 y 轴上是否存在点 P ，使以 A ， B ， P 三点为顶点的三角形是等腰三角形？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

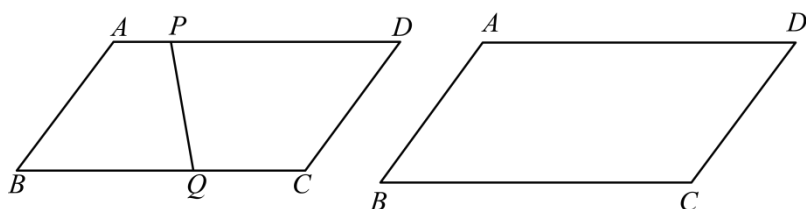
【变式3】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·湖南永州·期中）如图，矩形 $ABCO$ 中，点 C 在 x 轴上，点 A 在 y 轴上，点 B 的坐标是 $(-3, 4)$ ．矩形 $ABCO$ 沿直线 BD 折叠，使得点 A 落在对角线 OB 上的点 E 处，折痕与 y 轴、 x 轴分别交于点 D 、 F ．



- (1) $BO = \underline{\hspace{1cm}}$;
- (2) 求点 D 的坐标 ;
- (3) 若点 M 在 x 轴上 , 则在直线 BD 上是否存在点 N , 使得以 M 、 N 、 A 、 D 为顶点的四边形是平行四边形 ? 若存在 , 请直接写出满足条件的点 N 的坐标 ; 若不存在 , 请说明理由 .

【变式4】 (23-24 八年级下·吉林长春·期末) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB=5, BC=9, \square ABCD$ 的面积为 36,

动点 P 从 A 点出发，以 1 个单位长度的速度沿线段 AD 向终点 D 运动，同时动点 Q 从点 B 出发以 3 个单位长度的速度在 BC 间往返运动（点 Q 不与点 B 、 C 重合），当点 P 到达点 D 时，动点 P 、 Q 同时停止运动，连接 PQ ，设运动时间为 t 秒。



- (2) 当点 Q 从点 C 向点 B 运动时, 设四边形 $ABQP$ 的面积为 S , 求 S 与 t 之间的函数关系式, 并写出自变量 t

的取值范围．

(3) 当线段 PQ 经过 $\square ABCD$ 的对称中心时，求 t 的值．

(4) 直接写出四边形 $ABQP$ 的面积 S 随 t 的增大而增大时， t 的取值范围是——．