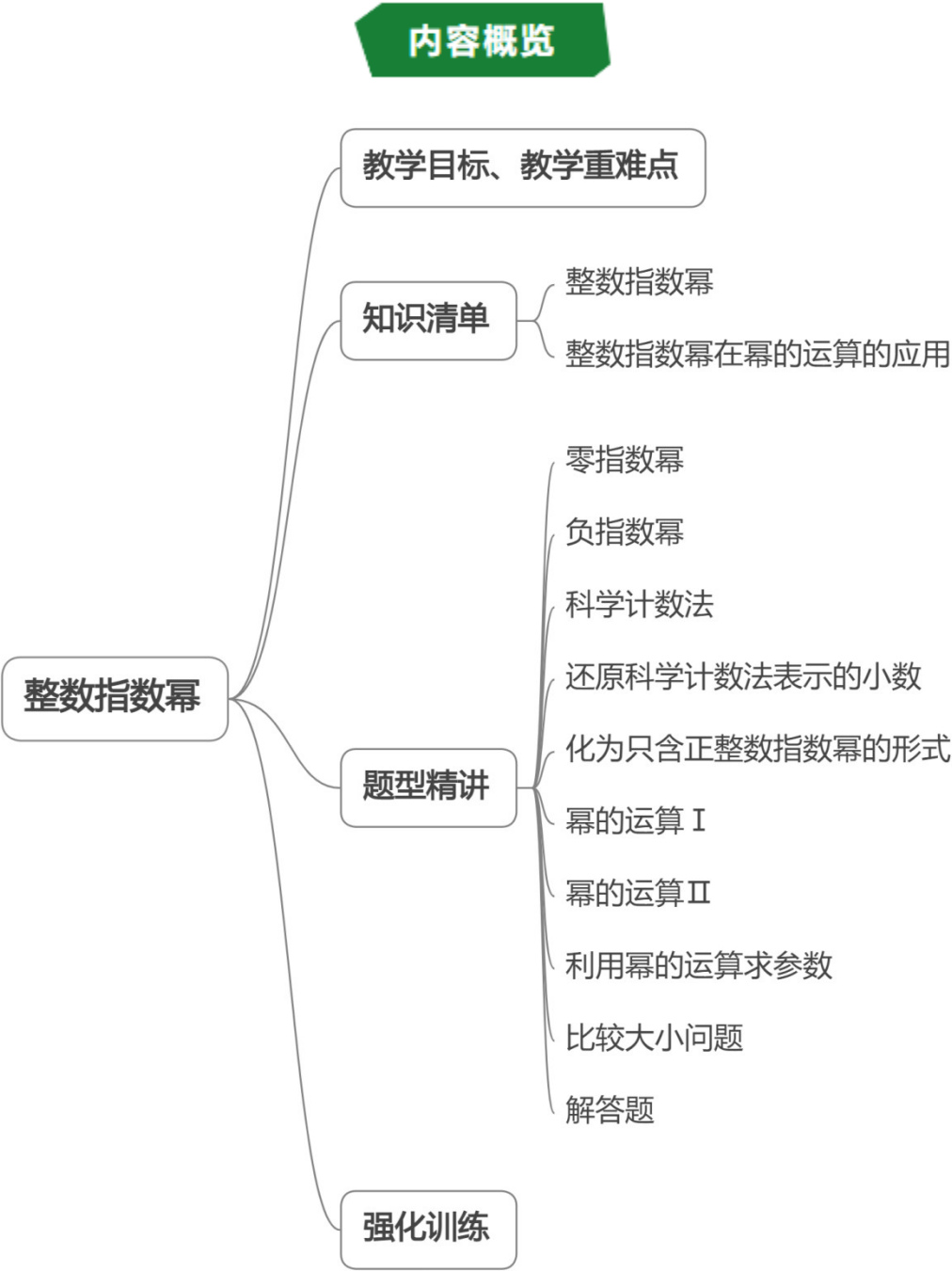


专题 13.4 整数指数幂



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 知道零指数幂； 2. 了解负指数幂． 3. 掌握科学计数法． 4. 整数指数幂的综合计算。
------	--

教学重难点	1.重点 (1) 知道负指数幂的意义； (2) 整数指数幂在幂的运算的应用； (3) 根据整数指数幂的运算求参数、比较大小等。 2.难点 (1) 整数指数幂有关化简、变形、求值问题等； (2) 整数指数幂的综合应用。
-------	---

知识清单

知识点1 整数指数幂

一、零指数幂

任何不等于零的数的零次幂都等于1，即 $a^0 = 1 (a \neq 0)$ 。

要点：同底数幂的除法法则可以推广到整数指数幂。即 $a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0, m, n \text{ 为整数})$ 当 $m = n$ 时，得到 $a^0 = 1 (a \neq 0)$ 。

二、负整数指数幂

任何不等于零的数的 $-n$ (n 为正整数) 次幂，等于这个数的 n 次幂的倒数，即 $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0, n \text{ 是正整数})$ 。

引进了零指数幂和负整数指数幂后，指数的范围已经扩大到了全体整数，以前所学的幂的运算性质仍然成立。

要点： $a^{-n} (a \neq 0)$ 是 a^n 的倒数， a 可以是不等于0的数，也可以是不等于0的代数式。例如 $(2xy)^{-1} = \frac{1}{2xy} (xy \neq 0)$ ， $(a+b)^{-5} = \frac{1}{(a+b)^5} (a+b \neq 0)$ 。

三、科学记数法的一般形式

(1) 把一个绝对值大于10的数表示成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 n 是正整数， $1 \leq |a| < 10$

(2) 利用10的负整数次幂表示一些绝对值较小的数，即 $a \times 10^{-n}$ 的形式，其中 n 是正整数， $1 \leq |a| < 10$ 。

用以上两种形式表示数的方法，叫做科学记数法。

【即学即练】

1. $(-3)^0$ 等于 ()

A. -3

B. 3

C. 1

D. 0

2. 若 $(x-2025)^0=1$ 成立，则 x 的取值范围是 ()

- A. $x = -2025$ B. $x = 2025$ C. $x \neq -2025$ D. $x \neq 2025$

3. 某零件的精度极高，它的某个零件的精度小于 0.00000208 毫米，则 0.00000208 用科学记数法表示为__

4. 某病毒的平均直径为 124 纳米 (1 米 = 10^9 纳米)，124 纳米用科学记数法表示为_____米。

知识点 2 整数指数幂在幂的运算的应用

前面我们学过幂的运算与整式的除法，下面我们根据教材系统的梳理整数指数幂在幂的运算的应用。

1.同底数幂相除

当 m 、 n 是正整数且 $m < n$ 时，

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m \div a^m}{a^n \div a^m} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{m-n}.$$

因此，

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m, n \text{ 是正整数}).$$

2.同底数幂相乘

思考：当 $a \neq 0$ 时， $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 是否对任意整数 m 、 n 都成立？

下面我们先讨论 m 是任意整数且 n 是负整数的情况：

(1)当 $m > 0$ 时，由 $-n$ 是正整数，得

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n};$$

(2) 当 $m=0$ 时，

$$a^m \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^{0+n} = a^{m+n};$$

(3)当 $m < 0$ 时，由 $-m$ 、 $-n$ 是正整数，得

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

综上所述，当 m 是任意整数且 n 是正整数或 0 时，也可以验证 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 是成立的。

3.幂的运算综合

随着指数的取值范围由正整数扩大到全体整数，前面学过的正整数指数幂的运算性质也推广到了整数指数幂.

当 a 、 b 不为 0 时，对于整数指数幂，有

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$(2) (ab)^n = a^n b^n;$$

$$(3) (a^m)^n = a^{mn}.$$

【即学即练】

1. 下列计算结果正确的是 ()

A. $\left[(-4)^0\right]^{-3} = 4$

B. $(x^2)^{-3} \div x^2 = x^3$

C. $(x^{-2})^3 \cdot x^3 = \frac{1}{x^3}$

D. $(-a^{-3})^2 = -\frac{1}{a^5}$

2. 计算： $a^3 b (a^{-1} b)^{-2} = ()$

A. ab^{-1}

B. $a^5 b$

C. $a^5 b^{-1}$

D. $a^2 b^{-2}$

3. 计算： $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)^{-3} \div (ab)^{-2}$

4. 计算： $(x^{-2} + y^{-2})^2 - (x^{-2} - y^{-2})^2$

题型精讲

题型 01 零指数幂

【典例 1】. 若 $(x-1)^0 = 1$ ，则 ()

A. $x = 1$

B. $x \leq 1$

C. $x \neq 1$

D. $x \neq 0$

【变式 1】. 如果 $(m-3)^m = 1$ ，那么 m 的值不能取 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

【变式 2】. 关于代数式 $(a+1)^0$ ，下列说法正确的是 ()

A. $(a+1)^0$ 的值一定是 0

B. $(a+1)^0$ 的值一定是 1

C. 当 $a \neq 0$ 时, $(a+1)^0$ 的值是 1

D. 当 $a \neq -1$ 时, $(a+1)^0$ 的值是 1

题型 02 负指数幂

【典例 1】. $(\pi-3)^0 + 2^{-2} =$ _____.

【变式 1】. 计算: $3^{-2} =$ _____.

【变式 2】. 计算: $2^0 + 3^{-1} =$ _____.

【变式 3】. 计算: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + (\pi-2020)^0 =$ _____.

题型 03 科学计数法

【典例 1】. 科学记数法: (1) 23500000 = _____, (2) 0.00000658 = _____.

【变式 1】. 用科学记数法表示: $-0.0000000305 =$ _____.

【变式 2】. 很多小朋友都爱玩吹泡泡的游戏, 科学家测得某个泡泡的厚度约为 6×10^{-6} 米, 则 6×10^{-6} 用小数表示为 ()

A. -0.000006

B. 0.000006

C. -0.00006

D. 0.00006

题型 04 还原科学计数法表示的小数

【典例 1】. 支原体是世界上最小的微生物, 其大小通常在 0.1 到 0.05 微米之间, 比细菌还要小很多. 1 微米 = 0.000001 米, 那么 0.05 微米用科学记数法表示为 ()



A. 0.5×10^{-6} 米

B. 0.5×10^{-7} 米

C. 5×10^{-8} 米

D. 50×10^{-9} 米

【变式 1】. 用科学记数法表示的数的原来的数: $2.35 \times 10^{-2} =$ _____.

【变式 2】. 下列是用科学记数法表示的数, 写出其原数:

(1) $1.23 \times 10^{-6} =$ _____;

(2) $-6.068 \times 10^{-7} =$ _____ .

题型 05 化为只含有正整数指数幂的形式

【典例 1】 . 将下列各式写成分式的形式：

(1) $-a^{-4} =$ _____ .

(2) $m^2 n^{-3} =$ _____ .

(3) $2x^{-3} y^{-2} =$ _____ .

【变式 1】 . 计算 $(2m^2)^{-3} (mn^{-3})^{-2}$, 把结果化为只含有正整数指数幂的形式为_____ .

【变式 2】 . 计算：把结果化为只含有正整数指数幂的形式： $(a^{-3})^{-2} \cdot (ab^2)^{-2} =$ _____ .

【变式 3】 . 计算下列各式，并且把结果化为只含有正整数指数的形式 .

(1) $(a^{-3} bc^2)^{-2}$;

(2) $(x^{-3} y)^{-2} \cdot (x^2 y^{-2})^2$;

(3) $2xy^2 z \div (-4x^{-3} yz^{-1})$;

(4) $(2ab^2)^{-2} \cdot (a^{-2} b)^{-1}$.

题型 06 幂的运算I

【典例 1】 . 计算： $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$ _____.

【变式 1】 . 计算： $\left(-\frac{a}{b^3}\right)^{-2} =$ _____ . (结果只含正整数指数幂)

【变式 2】 . 计算： $(a^2 \cdot a^{-3})^{-4} =$ _____ .

【变式 3】 . 化简 $(-a^{-2} b^2)^{-3} \div \left(-\frac{1}{2} ab\right)^{-1} =$ _____ .

【变式 4】 . 计算： $(m^2 n^{-3})^2 \cdot \left(-\frac{1}{3} m^2 n\right)^{-1} =$ _____ .

题型 07 幂的运算II

【典例 1】. 计算： $\frac{a^{-2}b^2 \cdot (-3a^{-1}b^2)}{6a^{-3}b^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【变式 1】. 计算： $\frac{a^{-2}b^3 \cdot (-2a^{-3}b^{-1})}{2^{-1}a^2b^{-3}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

题型 08 利用幂的运算求参数

【典例 1】. 若 $3^3 \times 3^{-1} = 3^p$ ，则 p 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【变式 1】. (1) 当 $m \neq 0$ 时，如果 $m^0 \times m^{-5}m^n = 1$ ，则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$. (2) 计算 $(10^2)^p = 10^8$ ，则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$.

题型 09 比较大小问题

【典例 1】. 已知 $a = -(0.3)^2$ ， $b = -3^{-2}$ ， $c = (-\frac{1}{3})^{-2}$ ， $d = (-\frac{1}{3})^0$ ，用“<”连接 a 、 b 、 c 、 d 为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【变式 1】. 若 $a = -0.2^2$ ， $b = -2^{-2}$ ， $c = (-\frac{1}{4})^{-2}$ ， $d = (-\frac{1}{4})^0$ ，则 a ， b ， c ， d 的大小关系是 ()

A. $a < b < c < d$ B. $b < a < d < c$ C. $a < d < c < b$ D. $c < a < d < b$

【变式 2】. 已知 $a = 1.01 \times 10^{-9}$ ， $b = 9.98 \times 10^{-8}$ ， $c = 1.02 \times 10^{-8}$ ， $d = -9.99 \times 10^7$ ，则 a ， b ， c ， d 的大小关系为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (用“<”号连接).

题型 10 解答题

【典例 1】. (1) 计算： $-2^{-2} + (-\frac{1}{3})^{-1} + (-890)^0 - \frac{1}{8^{-1}}$ ；

(2) $(-\frac{1}{2a}) \div (\frac{b}{2a})^{-2} \times \frac{3b^2}{a^2} \div (-2a^2b)^3$.

【变式 1】. 计算： $(x^{-1} - y^{-1}) \div (x^{-2} - y^{-2}) - xy(x + y)^{-1}$

【变式 2】. 已知： $x + x^{-1} - 3 = 0$ ，求 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的值.

【变式 3】. 已知 a 是大于 1 的实数，且有 $a^3 + a^{-3} = p$ ， $a^3 - a^{-3} = q$ 成立.

(1) 若 $p + q = 4$ ，求 $p - q$ 的值；

(2) 当 $q^2 = 2^{2n} + \frac{1}{2^{2n}} - 2$ ($n \geq 1$ ，且 n 是整数) 时，比较 p 与 $(a^3 + \frac{1}{4})$ 的大小，并说明理由.

强化训练

一、单选题

1. 若 $(a-2)^0 = 1$ 成立，则 a 的取值范围是 ()
 A. $a \neq 0$ B. $a \neq 2$ C. $a \neq -1$ D. $a \neq 1$
2. 计算： $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} =$ ()
 A. -6 B. 6 C. $-\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{6}$
3. 计算 $(a^3)^2 \cdot a^{-2}$ 的结果是 ()
 A. a^7 B. a^4 C. a^3 D. a^{-12}
4. 若 $10^{2a} = 25$ 则 10^{-a} 等于 ()
 A. $\frac{1}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{50}$ D. $\frac{1}{625}$
5. 用小数或分数表示 $(-0.1)^4$ ，错误的是 ()
 A. $\frac{1}{10^{-4}}$ B. $\frac{1}{10000}$ C. 0.0001 D. $\frac{1}{10^4}$
6. 计算： $-2a^{-2}b^3 \div \left(-\frac{3a^3}{2b^2}\right)^{-2} =$ ()
 A. $-\frac{9a^4}{2b}$ B. $\frac{9a^4}{2b}$ C. $\frac{9a^2}{2b}$ D. $-\frac{9a^2}{2b}$
7. 若 $a < 0$ ，要使 $3a^n a^3 < 0$ ，则 n 的值 ()
 A. 应是偶数 B. 应是奇数
 C. 奇数和偶数都不可能 D. 奇数和偶数都成立
8. 将 $3^{-1}x(x+y)^{-3}$ 写成只含有正整数指数幂的形式是 ()
 A. $\frac{x}{3x+y^3}$ B. $\frac{x}{3(x+y)^3}$ C. $\frac{3x}{x+y^3}$ D. $\frac{3x}{(x+y)^3}$
9. 已知 $a = (-3)^0$ ， $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ ， $c = 2^2$ ，则 a, b, c 的大小关系为 ()
 A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

10. 我们知道： $2^1 = 2$ ， $2^2 = 4$ ，……， $2^{10} = 1024$ ，那么 2^{-30} 接近于()

- A. 10^{-10} B. 10^{-9} C. 10^{-8} D. 10^{-7}

二、填空题

11. 填空

(1) $3^0 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $3^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) $(-3)^0 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $(-3)^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(3) $b^0 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($b \neq 0$) .

12. $a^2b^3(2a^{-1}b)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $(a^{-3}b^2x^{-2})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. $(a^{-3})^2(ab^2)^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $(3a^2b^{-2})^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $(-a^{-2}b)^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$. (结果化成只含有正整数指数幂形式)

14. 若 $|a| = 2$ ，且 $(a-2)^0 = 1$ ，则 2^a 的值为_____ .

15. 计算，使结果中只含正整数指数幂： $(a^{-3}b^{-2})^{-2} \cdot (a^{-1}b^3)^{-3} =$

16. 已知： $\left(\frac{1}{3}\right)^{-m} = 2$ ， $\frac{1}{3^n} = 5$ ，则 9^{2m-n} 的值为_____ .

17. 已知 $x^m = 2$ ， $y^n = 3$ ，则 $(x^{-2m}y^{-n})^{-4} =$ _____ .

18. 把各式化为不含负指数幂的形式： $\frac{3^{-2}b^{-3}}{2^{-1}a^4c^{-2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ $2x^{-5} = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $\frac{2c^{-3}}{5a^{-4}b^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

$(x-1)^1 + x(1-x)^1 = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

三、解答题

19. $a^{-3} \cdot a^4 \cdot b^{-4} + b^{-2} \cdot (a^{-1})^1 \cdot (a^{-3})^0$

20. 计算： $\frac{x-y^{-1}}{x^{-1}-1}$ (结果不含负整数指数幂)

21. 计算下列各式，并把结果化成只含有正整数指数幂的形式：

(1) $(a^2b^{-3})^{-2}(a^{-2}b^3)^2$ ； (2) $(x^{-5}y^{-2}z^{-3})^2$ ； (3) $(5m^{-2}n^{-3})^{-3}(-mn^{-2})^{-2}$.

22. 计算下列各式：

$$(1) \frac{(2x^2y^2)^2 \cdot (-3x^{-1}y^3)}{6x^{-2}y^{-3}(3x^2y^3)} ;$$

$$(2) \frac{a^{-2}b^{-2}(-3a^{-3}b^3)}{6a^{-4}b^{-5}} ;$$

$$(3) \left(\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}} \right)^2 \cdot (a^{-1}+b^{-1})^{-2} ;$$

$$(4) \frac{x^2+xy}{x} \div \left(\frac{x-y}{x} \cdot \frac{x}{y-x} \right)^{-5} .$$