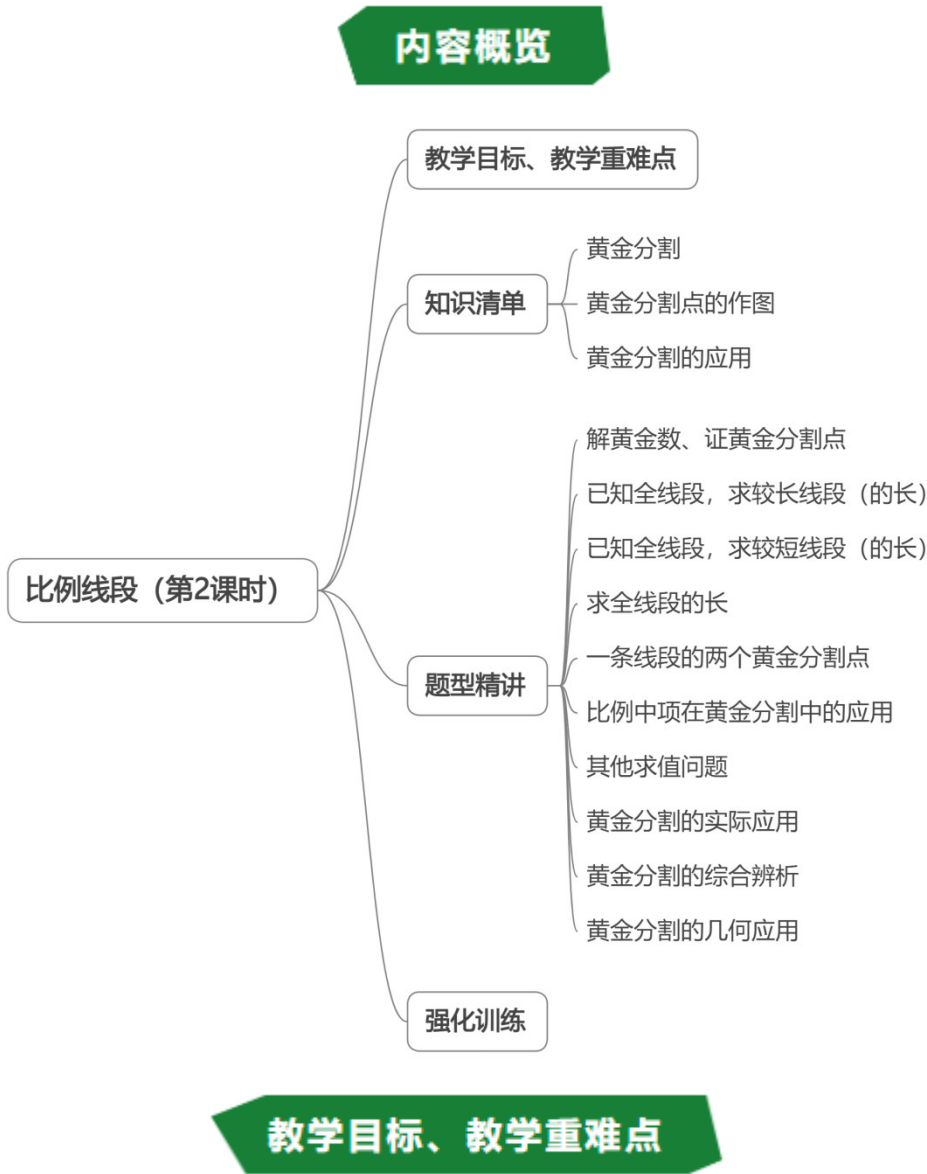


专题 24.3 比例线段（第 2 课时）



- | |
|--|
| (1) 比例线段性质、黄金分割结合的化简、变形等；
(2) 黄金分割的综合应用；
(3) 分类讨论思想。 |
|--|

知识清单

知识点1 黄金分割

例题 如图 24—9, 已知线段 AB 的长度是 l , 点 P 是线段 AB 上的一点, $\frac{PB}{AP} = \frac{AP}{AB}$, 求线段 AP 的长.

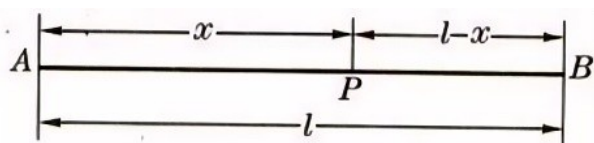


图 24—9

解 设线段 AP 的长为 x , 那么线段 PB 的长为 $l-x$, 得到关于 x 的方程

$$\frac{l-x}{x} = \frac{x}{l}$$

即 $x^2 + lx - l^2 = 0$.

$$\text{解得 } x = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = \frac{-l \pm \sqrt{5}l}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}l$$

因为 $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}l > 0$, $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}l < 0$ (舍去), 所以, 线段 AP 的长是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}l$

由 $AB=l$, $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}l$, 得 $\frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$

在比例式 $\frac{PB}{AP} = \frac{AP}{AB}$ 中, 两个内项都是线段 AP, 这时线段 AP 称为线段 AB 与 PB 的**比例中项**.

如果点 P 把线段 AB 分割成 AP 和 PB ($AP > PB$) 两段 (如图 24-9), 其中 AP 是 AB 和 P 的比例中项, 那么称这种分割为**黄金分割**, 点 P 称为线段 AB 的**黄金分割点**.

注意: 一般来说, 一条线段的黄金分割点有两个.

AP 与 AB 的比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 称为**黄金分割数** (简称**黄金数**). 黄金分割数是一个**无理数**, 在应用时常取它的近

似值 0.618.

【即学即练】

1. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点，那么 $AP:BP = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点， $AB = 10$ ，且 $AP > BP$ ，则 $AP = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > PB$)， $AP = 4$ ，那么 AB 的长是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 已知点 P 是线段 AB 上的一点，且 $BP^2 = AP \cdot AB$ ，如果 $AB = 8\text{cm}$ ，那么 $BP = \underline{\hspace{2cm}} \text{cm}$.
5. 若点 P 把线段 AB 分成 AP 和 PB 两段，且 AP 是 AB 和 BP 的比例中项，则 $AP:BP$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.
6. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $BP > AP$ ，那么下列结论正确的是 ()

A. $BP^2 = AP \cdot AB$

B. $AP^2 = BP \cdot AB$

C. $\frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

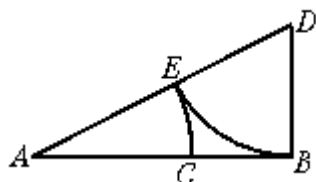
D. $\frac{BP}{AP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

知识点 2 黄金分割点的作图

作一条线段的黄金分割点：

如图，已知线段 AB ，按照如下方法作图：

- (1) 经过点 B 作 $BD \perp AB$ ，使 $BD = \frac{1}{2} AB$.
- (2) 连接 AD ，在 DA 上截取 $DE = DB$.
- (3) 在 AB 上截取 $AC = AE$ ，则点 C 为线段 AB 的黄金分割点.

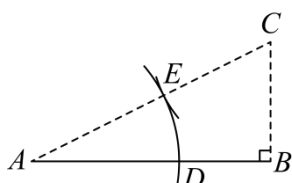


【即学即练】

1. 已知线段 AB ，试用尺规作图画出线段 AB 的黄金分割点 C ，使得 $AC > BC$ ，保留作图痕迹，不写作法.



2. 如图，已知线段 AB ，用尺规作图法按如下步骤作图.



- (1) 过点 B 作 AB 的垂线，并在垂线上取 $BC = \frac{1}{2} AB$.

(2) 连接 AC ，以点 C 为圆心， CB 为半径画弧，交 AC 于点 E 。

(3) 以点 A 为圆心， AE 为半径画弧，交 AB 于点 D 。则点 D 是线段 AB 的黄金分割点，请说明其中的道理。

知识点3 黄金分割的应用

1. 古今中外，人们把黄金分割誉为“天赋的比例法则”。符合这种分割的物体或几何图形，使人感到和谐悦目，被认为是最优美的。黄金分割被广泛地应用于建筑设计、美术、音乐、艺术及几何作图等方面。

例如古希腊的帕特农神殿(见下图),是黄金分割应用的杰作，成为人类建筑史中的经典建筑。



2. 黄金分割和勾股定理，被誉为几何学中的“双宝”。

【即学即练】

1. 古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是黄金分割数

($\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$)，著名的“断臂维纳斯”便是如此。若某人满足上述黄金分割比例，且肚脐至足底的长度为 100

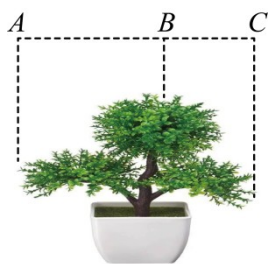
厘米则其身高约是 ()



- A . 152cm B . 162cm C . 172cm D . 182cm

2. 大自然是美的设计师，一个盆景也会产生最具美感的黄金分割比。如图，点 B 为 AC 的黄金分割点

($AB > BC$)，则 $\frac{BC}{AB} = ()$



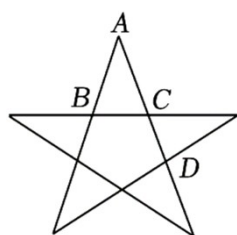
A. $\frac{AB}{AC}$

B. $\frac{AC}{BC}$

C. $\frac{AB}{BC}$

D. $\frac{AB^2}{AC^2}$

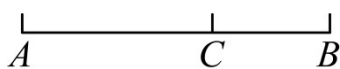
3. 如图，正五角星中包含了许多黄金三角形，许多线段之间构成了黄金比，如点 C 是线段 AD 的黄金分割点 ($AC > CD$)。已知 $BC = (\sqrt{5} - 1)$ 厘米，那么 $AC =$ _____ 厘米。



题型精讲

题型 01 解黄金数、证黄金分割点

【典例 1】. 如图，点 C 是线段 AB 的黄金分割点，计算线段 AB 的黄金比 $\frac{AC}{AB}$ 的值。



【变式 1】. 已知线段 $MN = 1$ ，在 MN 上有一点 A ，如果 $AN = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ，求证：点 A 是 MN 的黄金分割点。

题型 02 已知全线段，求较长线段 (的长)

【典例 1】. 已知线段 $AB = 6 \text{ cm}$ ， P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，那么 $AP =$ _____ cm 。

【变式 1】. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > PB$)，如果 $AB = 4 \text{ cm}$ ，那么线段 $AP =$ _____ cm 。

【变式 2】. 点 C 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AC > BC$ ， $AB = 4$ ，则 AC 的长为 _____。

题型 03 已知全线段，求较短线段 (的长)

【典例 1】. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$)， $AP = 10$ ，则 $BP =$ _____。

【变式1】. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$) , 如果 $AB = 1$, 那么 BP 的长是_____ .

【变式2】. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$) , 若 $AB = 2$, 则 $AP - BP =$ _____ .

题型4 求全线段的长

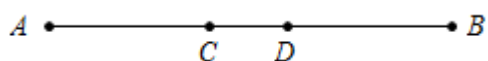
【典例1】. 已知, 线段 $AC = 1\text{cm}$, C 是 AB 的黄金分割点, 且 $AC > BC$, 则 $AB =$ _____ cm .

【变式1】. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > PB$) , $AP = 4$, 那么 AB 的长是_____ .

【变式2】. 已知线段 $BP = 4$, 点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 且 $AP < BP$, 那么 AB 的长为_____ .

题型5 一条线段的两个黄金分割点

【典例1】. 如图, C 、 D 是线段 AB 的两个黄金分割点, 且 $CD = 1$, 则线段 AB 的长为_____ .



【变式1】. 已知线段 $AB = 10\text{cm}$, P 、 Q 是线段 AB 的黄金分割点, 则 $PQ =$ _____ .

【变式2】. 已知线段 $AB = 4$, 点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 则 AP 的长为_____ .

题型6 比例中项在黄金分割中的应用

【典例1】. 已知线段点 P 是线段 AB 上的一点, AB 长 8 厘米且 $BP^2 = AP \cdot AB$, 那么 AP 的长是_____ 厘米 .

【变式1】. 已知点 C 是线段 AB 上一点, 并且 $BC^2 = AC \cdot AB$, 如果 $AB = 2\sqrt{5}$, 那么 BC 、 AC 中较短的那条长为_____ .

【变式2】. 若点 P 把线段 AB 分成 AP 和 PB 两段, 且 AP 是 AB 和 BP 的比例中项, 则 $AP:BP$ 的值等于_____ .

【变式3】. 已知点 C 是线段 AB 上的一个点, 且满足 $AC^2 = BC \cdot AB$, 则下列式子成立的是..... ()

A. $\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; B. $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; C. $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; D. $\frac{CB}{AC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

题型7 其他求值问题

【典例1】. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$) , 若 $AB = 4$, 则 $AP - BP =$ _____ .

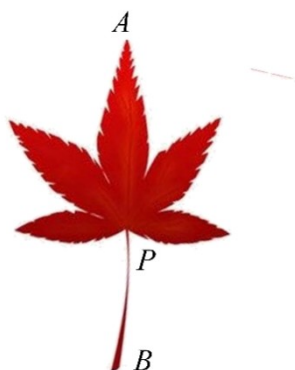
【变式1】. 已知点 P 是线段 AB 的一个黄金分割点, 且 $AP > BP$, 那么 $AP:AB$ 的比值为_____ .

【变式2】. 已知 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，那么 $\frac{AP-BP}{BP}$ 的值为_____.

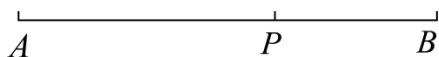
【变式3】. 线段 AB 的长度是 8，点 P 为线段 AB 上的一点， $\frac{PB}{AP} = \frac{AP}{AB}$ ，则线段 AP 的长是_____.

题型8 黄金分割的实际应用

【典例1】. 大自然巧夺天工，一片小枫叶也蕴含着“黄金分割”，如图， P 为 AB 的黄金分割点 ($AP > PB$)，如果 AP 的长度为 8cm，那么 AB 的长度是_____cm.



【变式1】. 主持人在舞台上主持节目时，站在黄金分割点上，观众看上去感觉最好. 若舞台长 $AB = 20$ 米，主持人从舞台一侧 B 进入，她至少走_____米时恰好站在舞台的黄金分割点上. (结果保留根号)



题型9 黄金分割的综合辨析

【典例1】. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $BP > AP$ ，那么下列结论正确的是 ()

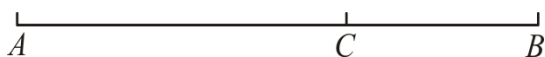
A. $BP^2 = AP \cdot AB$

B. $AP^2 = BP \cdot AB$

C. $\frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D. $\frac{BP}{AP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【变式1】. 如图，点 C 是线段 AB 的黄金分割点 ($AC > BC$)，下列结论错误的是 ()



A. $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$

B. $BC^2 = AB \cdot AC$

C. $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D. $\frac{BC}{AC} \approx 0.618$

【变式2】. 已知 P 、 D 是线段 AB 上的两个黄金分割点，其中 $AP < BP$ ，那么下列结论中，错误的是 ()

$$A. \frac{AP}{PB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad B. \frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad C. \frac{AP}{AD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad D. \frac{AP}{PD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

【变式3】 . 已知 M 是线段 AB 上的黄金分割点，且 $AM > BM$. 那么下列各项正确的是 ()

$$A. \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad B. \frac{AM}{MB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad C. \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad D. BM \text{ 是 } AM \text{ 与 } AB \text{ 的比例中}$$

项

【变式4】 . 点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > PB$ ，则下列等式不成立的是 ()

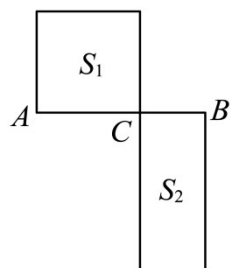
$$A. \frac{PB}{AP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad B. \frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$C. AP^2 = AB \cdot BP \quad D. AB^2 = AP^2 + PB^2$$

题型10 黄金分割的几何应用

【典例1】 . 如图，点 C 是线段 AB 的黄金分割点，即 $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$ ，若 S_1 表示以 CA 为一边的正方形的面积，

S_2 表示长为 AB ，宽为 CB 的矩形的面积，则 S_1 与 S_2 的大小关系是 ()

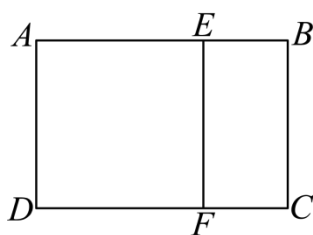


$$A. S_1 = \frac{1}{2} S_2 \quad B. S_1 = 2 S_2 \quad C. S_1 = S_2 \quad D. S_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} S_2$$

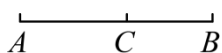
【变式1】 . 如果一个矩形的宽长之比 $(\sqrt{5}-1):2$ 时，则称这个矩形是黄金矩形，如图所示，四边形

$ABCD$ 是黄金矩形且 $\frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，将矩形 $ABCD$ 剪裁掉一个正方形 $ADEF$ 后，剩余的四边形 $BCEF$ 是否

是黄金矩形？请说明理由.



【变式2】 . 作黄金分割点：



如图，已知线段 AB ，按照如下方法作图：

①经过点 B 作 $BD \perp AB$ ，使 $BD = \frac{1}{2} AB$ 。

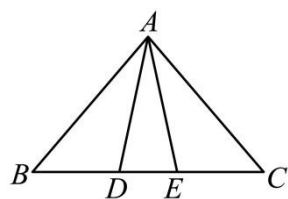
②连接 DA ，在 DA 上截取 $DE = DB$ 。

③在 AB 上截取 $AC = AE$ 则点 C 为线段 AB 的黄金分割点。

【变式3】 . 古希腊数学家欧多克索斯在深入研究比例理论时，提出了分线段的“中末比”问题：点 G 将线段 MN 分为两线段 MG ， GN ，使得其中较长的一段 MG 是全长 MN 与较短的一段 GN 的比例中项，即满足

$\frac{MG}{MN} = \frac{GN}{MG} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，后人把 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 这个数称为“黄金分割”数，把点 G 称为线段 MN 的“黄金分割”点。如图，

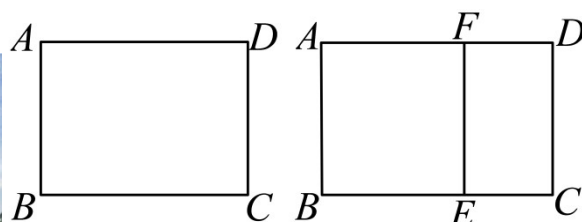
在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB = AC = 3$ ， $BC = 4$ ，若 D ， E 是边 BC 的两个“黄金分割”点，则 $\triangle ADE$ 的面积为__。



【变式4】 . 巴台农神庙的设计代表了古希腊建筑艺术上的最高水平，它的平面图可看作宽与长的比是

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的矩形，我们将这种宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的矩形叫黄金矩形。如图①，已知黄金矩形 $ABCD$ 的宽

$AB = 1$ 。



图①

图②

(1) 黄金矩形 $ABCD$ 的长 $BC =$ ；

(2) 如图②，将图①中的黄金矩形裁剪掉一个以 AB 为边的正方形 $ABEF$ ，得到新的矩形 $DCEF$ ，猜想矩形 $DCEF$ 是否为黄金矩形，并证明你的结论；

(3) 在图②中，连接 AE ，求点 D 到线段 AE 的距离。

强化训练

一、单选题

1. 已知点 P 为线段 AB 的黄金分割点 ($AP > PB$)，如果 $AB = 10$ ，那么 AP 的长度为 ()

- A. $\sqrt{5} - 1$ B. $2\sqrt{5} - 2$ C. $5\sqrt{5} - 5$ D. $10\sqrt{5} - 10$

2. 如果 C 是线段 AB 的黄金分割点 C ，并且 $AC > CB$ ， $AB = 1$ ，那么 AC 的长度为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

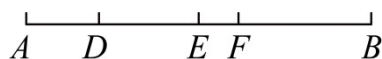
3. 已知 $AB = 2$ ，点 P 是线段 AB 的黄金分割点且 $AP > BP$ ，则线段 PA 的长为 ()

- A. $(\sqrt{5}-1)$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $(\sqrt{5}-1)$ 或 $(3-\sqrt{5})$ D. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

4. 如果点 C 是线段 AB 的黄金分割点，那么下列线段的值不可能是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的为 ()

- A. $\frac{AC}{BC}$ B. $\frac{BC}{AC}$ C. $\frac{BC}{AB}$ D. $\frac{AB}{BC}$

5. 如图，线段 $AB = 60$ ， $AD = 13$ ， $DE = 17$ ， $EF = 7$ ，最接近线段 AB 的黄金分割点是 ()



- A. D B. E C. F D. D 或 F

6. 如果点 C 是线段 AB 的黄金分割点 (且 $BC > AC$)，那么下列结论错误的为 ()

- A. $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. BC 是 AC 和 AB 的比例中项

- C. $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

二、填空题

7. 已知线段 $AB = 10\text{cm}$ ，点 C 是线段 AB 的黄金分割点 ($AC > BC$)，则 AC 的长为_____.

8. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，如果 $BP = \sqrt{5} - 1$ ，那么 $AP =$ _____.

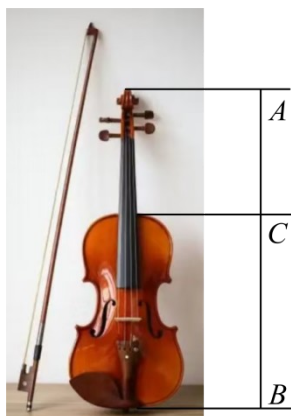
9. 已知点 P 是线段 CD 的黄金分割点 ($CP < DP$)，若 $DP = 6$ 厘米，那么 $CP =$ _____厘米.

10. 点 P 在线段 AB 上，且 $BP^2 = AP \cdot AB$ ， $AB = 6$ ，那么 BP 的长为_____.

11. 已知 P 点为线段 AB 的黄金分割点， $AP = 4\text{cm}$ ，且 $AP > BP$ ，则 $AB =$ _____ cm

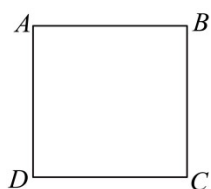
12. 点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$)，则 $\frac{BP}{AP} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 悦悦同学在晨间音乐会中表演了小提琴演奏，同学们发现，小提琴的设计中，蕴含着数学知识，如图，点 C 是小提琴长 AB 的黄金分割点 ($BC > AC$)，已知悦悦的琴长 $AB = 56\text{cm}$ ，则琴身 BC 的长为 cm .



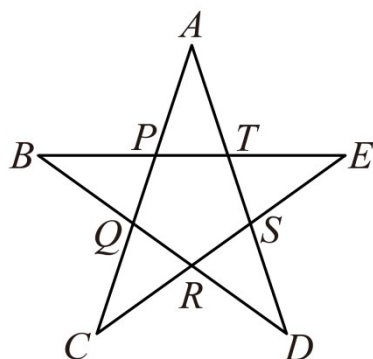
14. 已知点 C 是线段 AB 的黄金分割点，若 $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，则 $\frac{CB}{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\frac{CB}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 如图，点 E 是正方形 $ABCD$ 边 AD 上的一点 (E 与 A 不重合)，将线段 BE 绕着它的一个端点旋转，使另一个端点落在 DA 的延长线上的 F 处，并作正方形 $AFGH$ ，若 H 是线段 AB 的一个黄金分割点，且 $AH > BH$ ，则 $AE:AB$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



16. 正五角星是一个非常优美的几何图形，在如图所示的正五角星中，以 A 、 B 、 C 、 D 、 E 为顶点的多边形为正五边形，其余各点都是对角线的交点，下列 4 个结论：① $\angle A = 36^\circ$ ，② $PB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} PE$ ，③

$PA = \frac{3-\sqrt{5}}{2} AD$ ，④ $PT = \frac{3-\sqrt{5}}{2} PA$.



请填写你认为正确的结论序号：_____。

三、解答题

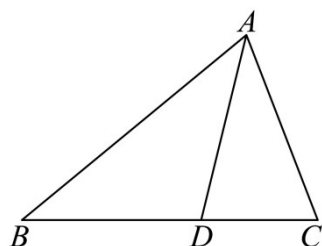
17. 已知线段 AB 的长度为 l ，点 P 在线段 AB 上， $\frac{PB}{AP} = \frac{AP}{AB}$ ，求线段 AP 的长。

18. 已知点 C 在线段 AB 上，且满足 $AC^2 = AB \cdot BC$ 。

(1) 若 $AB=1$ ，求 AC 的长；

(2) 若 AC 比 BC 大 2，求 AB 的长。

19. $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 上一点，若 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}$ ，则称 AD 为 $\triangle ABC$ 的黄金分割线。



(1) 求证：若 AD 为 $\triangle ABC$ 的黄金分割线，则 D 是 BC 的黄金分割点；

(2) 若 $S_{\triangle ABC} = 20$ ，求 $\triangle ACD$ 的面积。（结果保留根号）

20. 【探究与证明】

【问题情境】：宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ （约为 0.618）的矩形叫做黄金矩形，黄金矩形给我们以协调、匀称的美感，世界各国许多著名的建筑，为取得最佳的视觉效果，都采用了黄金矩形的设计，下面，我们用宽为

2 的矩形纸片折叠黄金矩形。（提示： $MN=2$ ）

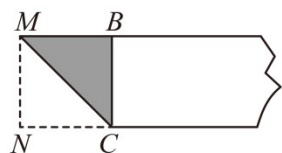
【操作发现】

第一步，在矩形纸片一端，利用图①的方法折出一个正方形，然后把纸片展平。

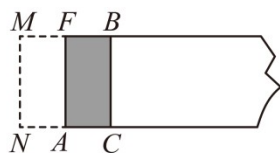
第二步，如图②，把这个正方形折成两个相等的矩形，再把纸片展平．

第三步，折出内侧矩形的对角线 AB ，并把 AB 折到图③中所示的 AD 处．

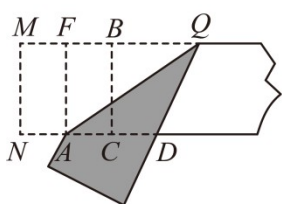
第四步，展平纸片，按照所得的点 D 折出 DE ，使 $DE \perp ND$ ，则图④中就会出现黄金矩形．



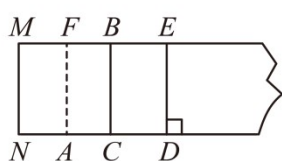
图①



图②



图③



图④

【问题解决】

- (1) 图③中 $AB =$ _____ (保留根号) ；
- (2) 如图③，判断四边形 $BADQ$ 的形状，并说明理由；
- (3) 如图④矩形 $BCDE$ 就是黄金矩形，图④的矩形_____也是黄金矩形；
- (4) 请你选择图④的其中一个黄金矩形来说明理由．