

专题 01 坐标系中与直线相关的位置关系

题型归纳

题型一：两直线平行

题型二：两直线垂直

题型三：两直线对称

题型专练

题型 01 两直线平行

在直角坐标系中两直线平行，意味着两条直线的斜率 K 相同。

【典例 1】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·上海·期中）若直线 $y = (m^2 - 4)x + 3$ 与 $y = (m + 2)x - 5$ 平行，则 $m =$

_____ .

【变式 1】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·上海·月考）已知一次函数 $y = kx + b$ 经过点 $A(0, -2)$ ，并且与直线 $y = -4x$ 平

行，那么这个一次函数的解析式为_____ .

【变式 2】（²²⁻²³ 八年级下·上海普陀·期中）已知直线 l_1 与直线 $l_2: y = \frac{1}{5}x - 4$ 平行，且直线 l_1 过点 $A(5, 3)$.

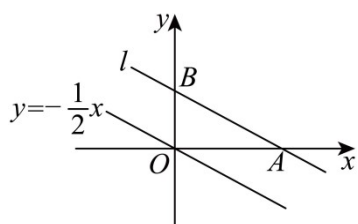
求：

(1) 直线 l_1 的表达式；

(2) 直线 l_1 与坐标轴围成的三角形面积.

【变式 3】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·上海嘉定·期末）如图，在平面直角坐标系中，直线 $l: y = kx + b$ 与直线

$y = -\frac{1}{2}x$ 平行，且截距为 3，分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 和点 B 。



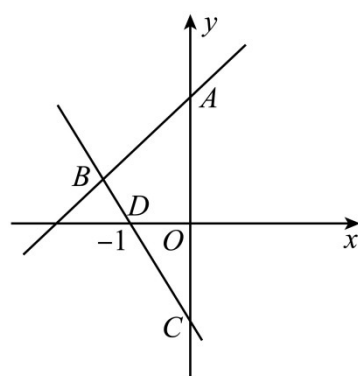
(1) 求直线 l 的解析式和点 A 的坐标：

(2) 如果点 C 是线段 AB 上的点，且 $\triangle AOC$ 的面积为 6，求点 C 的坐标；

(3) 在 (2) 条件下，点 P 是直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 上的点，在坐标平面内是否存在点 Q ，使以 O 、 C 、 P 、 Q 为顶点

的四边形是菱形？若存在，请直接写出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。

【变式 4】 (24-25 八年级·上海·期中) 如图，在平面直角坐标系中，直线 AB 和直线 BC 相交于点 $(-2, 2)$ ，直线 AB 与 y 轴相交于点 $A(0, 4)$ ，直线 BC 与 x 轴、 y 轴分别交于点 $D(-1, 0)$ ，点 C 。



(1) 求直线 AB 的解析式。

(2) 过点 A 作 BC 的平行线交 x 轴于点 E ，求点 E 的坐标。

(3) 在 (2) 的条件下，点 P 是直线 AB 上一个动点，且点 P 在 x 轴的上方，如果以点 D 、 E 、 P 、 Q 为顶点的

平行四边形的面积等于三角形 ABC 的面积。

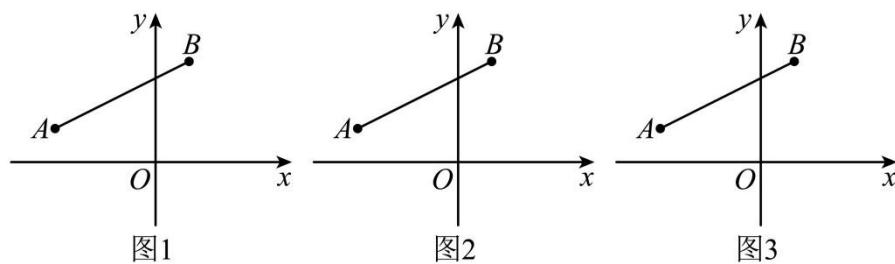
①求出点 P 的坐标。

②画出所有情况并直接写出点 Q 的坐标。

【变式 5】 (24-25 八年级下·辽宁沈阳·期末) 已知 y_1 和 y_2 都是关于自变量 x 的函数，若当 $x \geq 0$ 时，

$y_1 = kx + b$ ($k \neq 0$, k, b 为常数)，当 $x < 0$ 时， $y_2 = -\frac{1}{k}x + b$ ($k \neq 0$, k, b 为常数)，此时，函数 y_1 的图

象与函数 y_2 的图象互相垂直，则称函数 y_2 为函数 y_1 的“垂直函数”。



(1) 请直接写出函数 $y_1 = 3x$ ($x \geq 0$) 的“垂直函数”的函数表达式并写出自变量 x 的取值范围；

(2) 如图 1，函数 $y_1 = 2x + b$ ($x \geq 0$) 和它的“垂直函数” y_2 组成的图象记为 G ，图象 G 与 y 轴交点记为点 C ，线段 AB 的两个端点坐标分别为 $A(-3, 1)$ ， $B(1, 3)$ 。

①当图象 G 与线段 AB 有两个公共点时，求 b 的取值范围；

②如图 2，分别过 A, B 两点作 y 轴的平行线交图象 G 于点 E, F ，连接 AE, BF ，当以 A, B, E, F 四个点为顶点的四边形是平行四边形时，求这个平行四边形的面积；

③如图 3，连接 AC, BC ，当 $|AC - BC|$ 的值最大时，直接写出 b 的值。

题型 02 两直线垂直

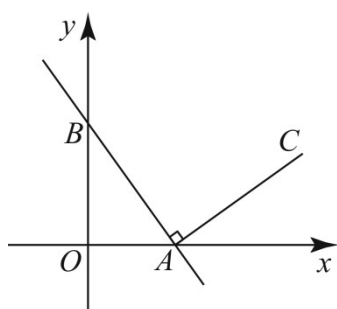
知识点拓展：两条直线互相垂直，则斜率 $k_1 \cdot k_2 = -1$ ；

方法归纳：关于一次函数初中阶段教学时是不讲斜率的，所以可以用几何的方法来求解

- 作辅助线构造“一线三垂直”证全等→转化求线段长→求距离→确定点的坐标→求直线表达式；
- 万能通用：勾股定理逆定理兜底；

【典例 1】（²⁴⁻²⁵ 八年级·辽宁沈阳·期中）如图，一次函数 $y = -2x + 2$ 的图象分别与 x 轴， y 轴交于 A ， B

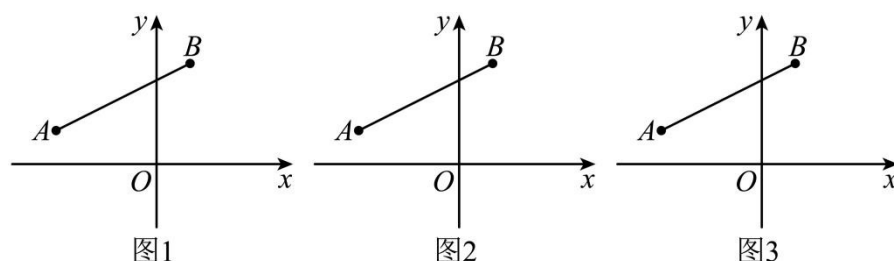
两点，点 C 在第一象限， AC 与 AB 垂直，且 $AC = AB$ ，则点 C 的坐标为_____。



【典例 2】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·辽宁沈阳·期末）已知 y_1 和 y_2 都是关于自变量 x 的函数，若当 $x \geq 0$ 时，

$y_1 = kx + b$ （ $k \neq 0$ ， k, b 为常数），当 $x < 0$ 时， $y_2 = -\frac{1}{k}x + b$ （ $k \neq 0$ ， k, b 为常数），此时，函数 y_1 的图

象与函数 y_2 的图象互相垂直，则称函数 y_2 为函数 y_1 的“垂直函数”。



(1) 请直接写出函数 $y_1 = 3x$ （ $x \geq 0$ ）的“垂直函数”的函数表达式并写出自变量 x 的取值范围；

(2) 如图 1，函数 $y_1 = 2x + b (x \geq 0)$ 和它的“垂直函数” y_2 组成的图象记为 G ，图象 G 与 y 轴交点记为点 C ，线

段 AB 的两个端点坐标分别为 $A(-3, 1)$ ， $B(1, 3)$ 。

① 当图象 G 与线段 AB 有两个公共点时，求 b 的取值范围；

② 如图 2，分别过 A, B 两点作 y 轴的平行线交图象 G 于点 E, F ，连接 AE, BF ，当以 A, B, E, F 四个

点为顶点的四边形是平行四边形时，求这个平行四边形的面积；

③ 如图 3，连接 AC, BC ，当 $|AC - BC|$ 的值最大时，直接写出 b 的值。

【变式 1】（²⁴⁻²⁵ 八年级上“江苏连云港”期末）【背景提出】

(1) 如图 1，等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CB = CA$ ，直线 ED 经过点 C ，过点 A 作 $AD \perp ED$ 于点 D ，

过点 B 作 $BE \perp ED$ 于点 E ，求证： $\triangle BEC \cong \triangle CDA$ 。

【迁移应用】

(2) 如图 2，已知直线 $l_1: y = \frac{5}{3}x + 5$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，将直线 l_1 绕点 A 逆时针旋转 45°

至直线 l_2 ，求直线 l_2 的函数表达式。

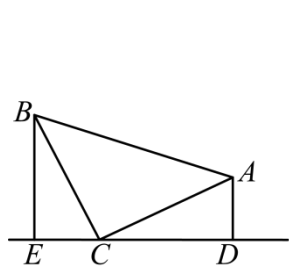


图1

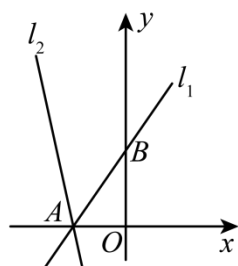


图2

【变式2】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·黑龙江齐齐哈尔·期末）综合与探究

【模型建立】

如图¹，三个直角三角形的直角顶点都在同一条直线上，这一模型叫作“一线三垂直”型．这种模型是证明三角形全等的常见模型，在数学解题中被广泛使用．如图，一次函数 $y = -x + 8$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于

B, A 两点．

【模型探索】

(1) 如图²，求证： $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形．

(2) 如图³， M, N 是直线 $y = kx$ 上的两动点，连接 BM, AN ．若 $BM \perp MN$ ， $BM = 6$ ，求 AN 的长的最小值．

【模型应用】

(3) 如图⁴，经过点 B 的直线 $y = \frac{1}{2}x + m$ 与 y 轴交于点 C ， H 为线段 OB 上的一点，作射线 CH ．若

$\angle BCH = 45^\circ$ ，请直接写出 m 的值及直线 CH 的函数解析式．

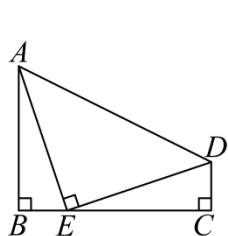


图1

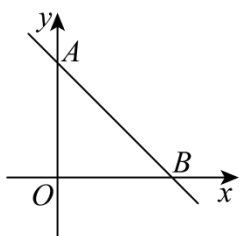


图2

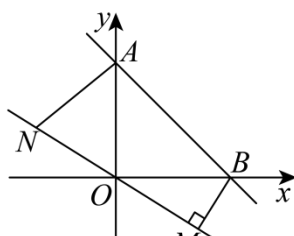


图3

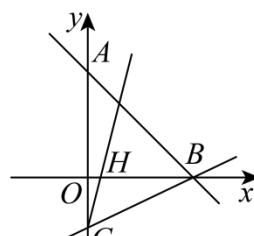


图4

【变式3】 (20-21 八年级下·广西南宁·期末) 阅读理解：已知直线 l_1 的解析式为 $y_1 = k_1x + b_1$ ($k_1 \neq 0$, k_1, b_1

为常数)，直线 l_2 的解析式为 $y_2 = k_2x + b_2$ ($k_2 \neq 0$, k_2, b_2 为常数)，若 $l_1 \perp l_2$ ，则有 $k_1k_2 = -1$ 。

(1) 已知直线 $y = 4x + 1$ 与直线 $y = kx - 1$ 垂直，求 k 的值；

(2) 若直线 l 经过点 $A(-2, -5)$ ，且与直线 $y = -\frac{1}{3}x + 3$ 垂直，求直线 l 的函数解析式；

(3) 已知直线 $y = 2x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A, B ，求线段 AB 的垂直平分线所对应的函数解析式。

题型 03 直线的对称

在坐标系中两条直线（一次函数的图象）对称常见的类型有：关于坐标轴对称、关于某条特定的直线对称；无论哪种类型对称，解题思路都是先找对称点，再求直线解析式。

【典例1】 阅读材料：

通过一次函数的学习，小明知道：当已知直线上两个点的坐标时，可以用待定系数法，求出这个一次函数

的表达式。有这样一个问题：如图1，直线 l_1 的表达式为 $y = -2x + 4$ ，直线 l_1 与 x 轴、 y 轴交于 A, B 两点，

若直线 l_2 与直线 l_1 关于 y 轴对称，求直线 l_2 的表达式。下面是小明的解题思路。

第一步：求出直线 l_1 与 x 轴的交点 A 的坐标为 $(2, 0)$ ，与 y 轴的交点 B 的坐标为 $(0, 4)$ ；

第二步：在平面直角坐标系中，作出直线 l_1 ；

第三步：求点 A 关于 y 轴的对称点 C 的坐标为 $(-2, 0)$ ；

第四步：由点 $B(0, 4)$ ，点 $C(-2, 0)$ ，利用待定系数法，可得直线 l_2 的表达式 $y = 2x + 4$ 。

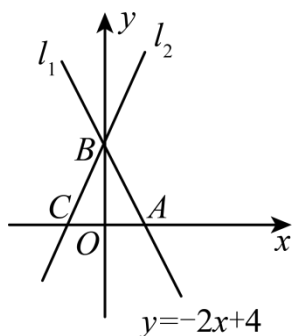


图1

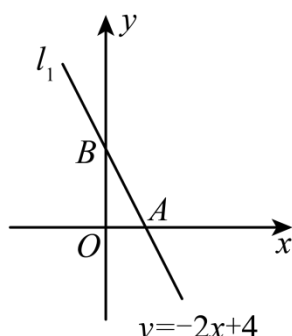


图2

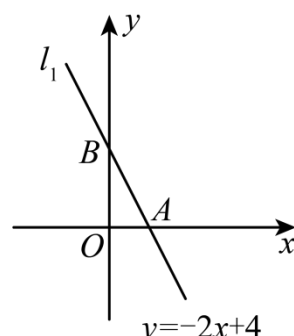


图3

(1)参考小明的解题思路和结论，解决问题：直线 $y = -x + 2$ 关于 y 轴对称的直线的表达式为_____；

(2)如图2，若过点 $(-1, 0)$ 且平行于 y 轴的直线叫做直线 $x = -1$ ，直线 l_3 与直线 $y = -2x + 4$ 关于直线 $x = -1$ 对称，求直线 l_3 的表达式；

(3)如图3，直线 l_4 与直线 $y = -2x + 4$ 关于直线 $y = x$ 对称，求直线 l_4 的表达式。

【变式1】关于一次函数 $y = x - 1$, $y = -x + 1$ 的图象，下列说法正确的是()

A. 关于直线 $y = -x$ 对称

B. 关于 x 轴对称

C. 关于 y 轴对称

D. 关于直线 $y = x$ 对称

【变式2】定义：一次函数 $y = mx + n (m \neq 0)$ 与一次函数 $y = px + q (p \neq 0)$ 的图象关于直线 l 成轴对称，且

直线 $l \perp x$ 轴，那么我们称这两个一次函数是成轴对称一次函数，对称轴为直线 l ，这两个一次函数图象的

交点称为“对称和谐点”。例如，如图1，一次函数 $y = x - 1$ 与一次函数 $y = -x + 5$ 的图象关于直线 $x = 3$ 成轴对

称，那么一次函数 $y = x - 1$ 与一次函数 $y = -x + 5$ 是成轴对称一次函数，对称轴是直线 $x = 3$ ，交点 $A(3, 2)$ 是

这两个一次函数的“对称和谐点”。

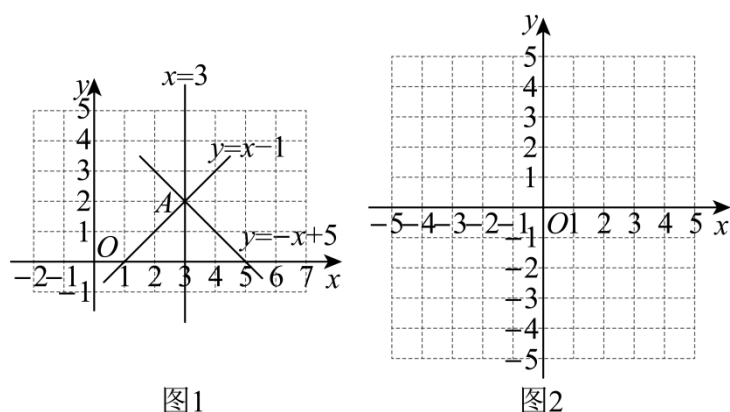


图1

图2

(1)判断下面两组一次函数，是成轴对称一次函数的是_____（填“①”或“②”）。

① $y = x - 2$ 与 $y = -x + 2$ ；② $y = 3x$ 与 $y = 2x + 3$ 。

(2)请你写出一组成轴对称一次函数，并写出它们的对称轴直线与“对称和谐点”。（写出一个即可，不与题中出现的函数重复）

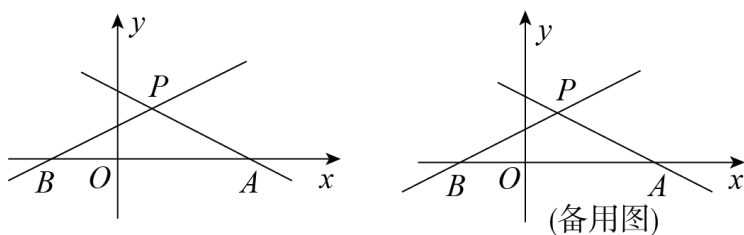
(3)若一次函数 $y = mx + n$ ($m \neq 0$) 与一次函数 $y = 2x + k$ 是成轴对称一次函数，对称轴是 y 轴，“对称和谐点”

是 $(0, 4)$ 。请在图2中画出一一次函数 $y = mx + n$ 与一次函数 $y = 2x + k$ 的图象，用字母 A 表示“对称和谐点”。

（用无刻度的直尺画出图形，不需要尺规作图）

【变式3】如图，直线 AP 与直线 BP 相交于点 $P(1, m)$ ，两条直线与 x 轴分别交于点 A 、点 B ，且点 A 和点

B 关于直线 $x = 1$ 对称，已知直线 AP 的函数关系式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 。



(1) 请直接写出：

① $m =$ _____；

② 直线 BP 的函数关系式_____；

(2) 若点 Q 是直线 BP 上的一个动点，当 $S_{\triangle QAB} = 3S_{\triangle PAB}$ 时，请求出点 Q 的坐标；

【变式 4】综合与探究

【研究主题】一次函数图象成轴对称的问题探究．

【特例感知】

探究直线 $l_1: y = \frac{1}{2}x + 1$ 关于 x 轴成轴对称的直线 l_2 的关系式的过程如下：

步骤 1：如图 1，在平面直角坐标系中，画出直线 $l_1: y = \frac{1}{2}x + 1$ 的图象；

步骤 2：求出 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$ ，与 y 轴交于点 $B(0, 1)$ ；

步骤 3：点 $B(0, 1)$ 关于 x 轴对称的点 C 的坐标是_____；

步骤 4：画出直线 AC ，并由 A 、 C 两点坐标可求得 l_2 的关系式为_____．

归纳：问题解决策略是将“直线的对称问题”转化为“_____的对称问题”．

(1) 补全上述探究过程中的空格；

(2) 直线 $l_1: y = \frac{1}{2}x + 1$ 关于 y 轴成轴对称的直线的关系式是——；

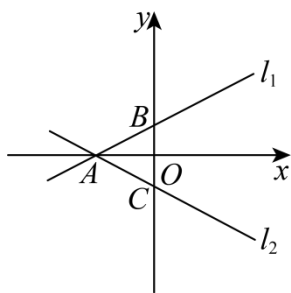


图1

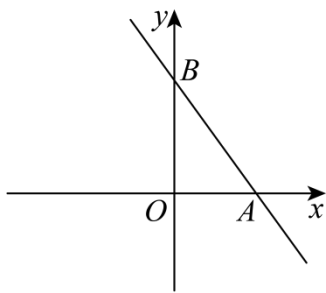


图2

【类比迁移】

(3) 如图2，已知直线 $AB: y = -\frac{4}{3}x + 8$ 的图象与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B 。若直线 AB 关于直线 l_3

的对称后的直线恰好与 x 轴重合，请求出对称轴 l_3 的解析式。

【拓展提升】

(4) 结合上述探究所得的结论和经验，尝试完成下列问题：

① 直线 $y = kx (k \neq 0)$ 关于直线 $y = x$ 成轴对称的直线解析式是——；

② 直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 关于直线 $y = x + 1$ 成轴对称的直线解析式是——。