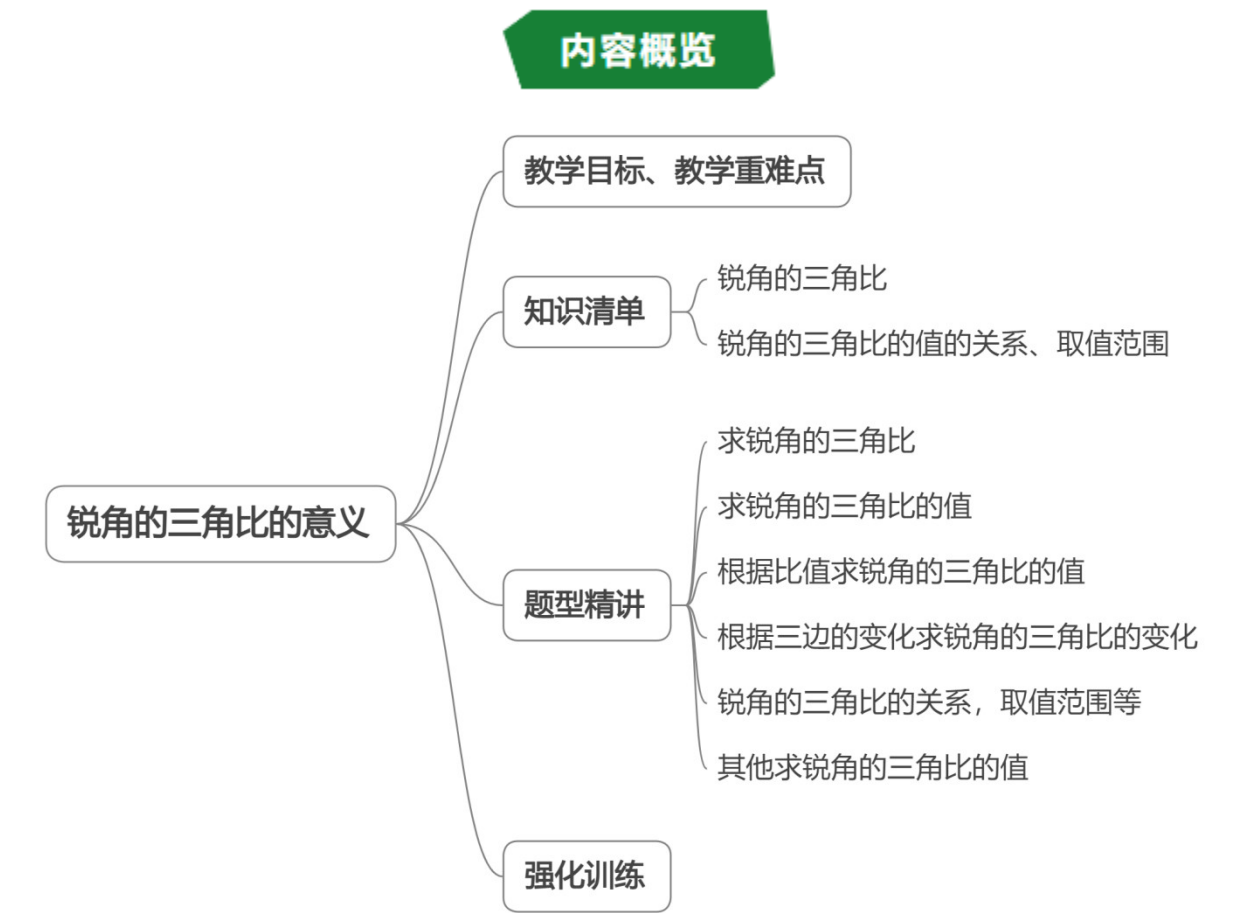


专题 25.1 锐角的三角比的意义



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 理解锐角三角比的几何意义； 2. 会求一个锐角的锐角三角比； 3. 掌握锐角三角比是否会随角度变化。 4. 知道锐角三角比的取值范围。。
教学重难点	1.重点 (1) 由特殊到一般情形，引出一个锐角的正切、余切，正弦、余弦； (2) 求一个锐角的锐角三角比； (3) 了解一些锐角的三角比之间的特殊关系； 2.难点 (1) 辨析锐角的三角比概念，并知道及其几何意义；

(2) 探索锐角的三角比之间的关系、取值范围等；

知识清单

知识点1 锐角的三角比

一、锐角的三角比——正切、余切

I、先看特殊情景：

①在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$, 则 $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

给定一个锐角A $\longrightarrow$ $\frac{\text{锐角}A\text{的对边}}{\text{锐角}A\text{的邻边}} = \text{一个确定值}$

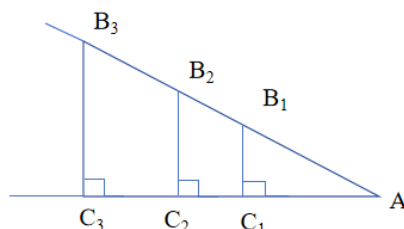
②在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle B=60^\circ$, 则 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$

给定一个锐角B $\longrightarrow$ $\frac{\text{锐角}B\text{的对边}}{\text{锐角}B\text{的邻边}} = \text{一个确定值}$

思考：对于一个直角三角形，如果给定了它的一个锐角的大小，那么它的对边与邻边的比值是否是一个确定的值？

II、再看一般情景：

如图所示，任意画一个锐角A，在角A的一边上任意取点，例如取 B_1 、 B_2 、 B_3 三点，再分别过这三个点向另一边作垂线，垂足依次为点 C_1 、 C_2 、 C_3 ，从而得到三个直角三角形，即 $\triangle AB_1C_1$ 、 $\triangle AB_2C_2$ 和 $\triangle AB_3C_3$



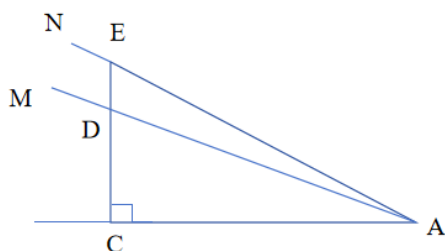
因为这三个直角三角形有公共的锐角A，所以 $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2 \sim \triangle AB_3C_3$

于是得 $\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3}$

由此可见，如果给定直角三角形的一个锐角，那么这个锐角的对边与邻边的长度的比值就是一个确定的数。

III、

如图，当直角三角形中一个锐角的大小变化时，这个锐角的对边与邻边的长度的比值随着变化吗？

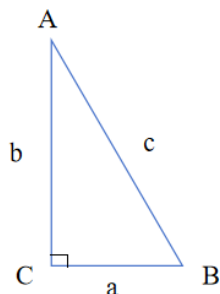


提示：比较 $\angle DAC$ 、 $\angle EAC$ 的对边与邻边的比值来确定是否变化。

IV、

通过上面的讨论，可以得到：如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中 ($\angle C=90^\circ$)，当锐角 A 的大小确定后，不论 $Rt\triangle ABC$ 的边长怎样变化， $\angle A$ 的对边 BC 与邻边 AC 的比值总是确定的，即

$$\frac{\text{锐角}A\text{的对边}}{\text{锐角}A\text{的邻边}} = \text{一个确定值}$$



我们把直角三角形中一个锐角的对边与邻边的比叫做这个锐角的正弦. 锐角 A 的正切记作 $\tan A$,

$$\tan A = \frac{\text{锐角}A\text{的对边}}{\text{锐角}A\text{的邻边}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

同理，在 $Rt\triangle ABC$ 中 ($\angle C=90^\circ$)，当锐角 A 的大小确定后，不论 $Rt\triangle ABC$ 的边长怎样变化， $\angle A$ 的邻边 BC 与斜边 AB 的比值也总是确定的

我们把直角三角形中一个锐角的邻边与对边的比叫做这个锐角的余弦. 锐角 A 的余切记作 $\cot A$,

$$\cot A = \frac{\text{锐角}A\text{的邻边}}{\text{锐角}A\text{的对边}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

我们把直角三角形中一个锐角的对边与斜边的比叫做这个锐角的正弦. 锐角 A 的正弦记作 $\sin A$,

$$\sin A = \frac{\text{锐角}A\text{的对边}}{\text{斜边}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

同理，在 $Rt\triangle ABC$ 中 ($\angle C=90^\circ$)，当锐角 A 的大小确定后，不论 $Rt\triangle ABC$ 的边长怎样变化， $\angle A$ 的邻边 BC 与斜边 AB 的比值也总是确定的

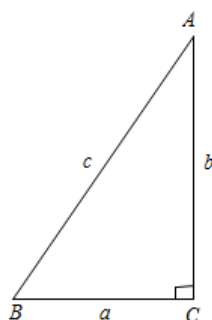
我们把直角三角形中一个锐角的邻边与斜边的比叫做这个锐角的余弦. 锐角 A 的余弦记作 $\cos A$,

$$\cos A = \frac{\text{锐角}A\text{的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

【即学即练】

1. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$. (1) 斜边 = _____ ; (2) $\angle B$ 的对边 = _____

; (3) $\angle B$ 的邻边 = _____ ; (4) $\frac{\angle B\text{的对边}}{\text{斜边}} = \frac{\quad}{\quad}$.



2. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 那么锐角 A 的正弦等于 ()
- A. $\frac{\text{锐角A的对边}}{\text{锐角A的邻边}}$ B. $\frac{\text{锐角A的对边}}{\text{斜边}}$ C. $\frac{\text{锐角A的邻边}}{\text{斜边}}$ D. $\frac{\text{锐角A的邻边}}{\text{锐角A的对边}}$
3. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 如果 $\angle C = 90^\circ$, 那么 $\frac{AC}{BC}$ 表示 $\angle A$ 的 ()
- A. 正弦 B. 正切 C. 余弦 D. 余切
4. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$. 当 $\angle A$ 确定时, 它的正弦值是否随之确定? 余弦值呢? 正切值呢? 为什么?
5. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于点 D, 下列式子表示 $\sin B$ 错误的是 ()
- A. $\frac{CD}{BC}$ B. $\frac{AC}{AB}$ C. $\frac{AD}{AC}$ D. $\frac{CD}{AC}$

知识点 2 锐角三角比的值的关系、比值范围

1. 由正切、余切的意义可以得到,

$$\tan A = \frac{1}{\cot A}$$

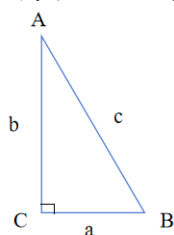
2. 一个锐角的正切、余切、正弦、余弦统称为这个锐角的三角比

3. 任何一个锐角的三角比的值都是正实数, 其中正弦和余弦的值小于 1 (为什么?).

$$0 < \sin A < 1, 0 < \cos A < 1.$$

提示: 我们可以画一个三角形, 已知 $\angle C = 90^\circ$, 当锐角 A 无限接近 90° 时, a 无限接近 c, b 无限接近 0;

当锐角 A 无限接近 0° 时, b 无限接近 c, a 无限接近 0



4. 锐角 A 的三角比 $\tan A$ 、 $\cot A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ 中,
 $\tan A > 0, \cot A > 0; 0 < \sin A < 1, 0 < \cos A < 1.$

【即学即练】

1. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 若 $\triangle ABC$ 的三边都缩小 5 倍, 则 $\sin A$ 的值 ()
- A. 放大 5 倍 B. 缩小 5 倍 C. 不变 D. 无法确定
2. 在直角三角形中, 各边的长度都扩大到原来的 3 倍, 则锐角 A 的三角比的值 ()
- A. 都扩大到原来的 3 倍 B. 都缩小为原来的 $\frac{1}{3}$ 倍

C. 都保持原来的数值不变 D. 有的变大，有的缩小

3. 已知 α 、 β 都是锐角，如果 $\sin \alpha = \cos \beta$ ，那么 α 与 β 之间满足的关系是 ()

A. $\alpha = \beta$; B. $\alpha + \beta = 90^\circ$; C. $\alpha - \beta = 90^\circ$; D. $\beta - \alpha = 90^\circ$.

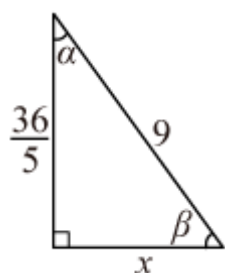
4. $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，下列关系中正确的是 ()

A. $\tan A = \frac{1}{\cot A}$ B. $\tan A = \frac{1}{\cot B}$ C. $\tan A \cdot \cot B = 1$ D. $\cot A \cdot \tan B = 1$

题型精讲

题型 01 求锐角的三角比

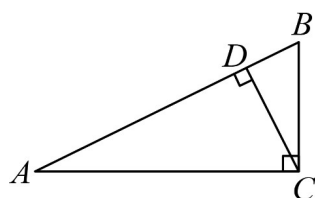
【典例 1】. 如图，分别求 $\angle \alpha$ 和 $\angle \beta$ 的正弦、余弦和正切.



【变式 1】. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么 $\cot A$ 等于 ()

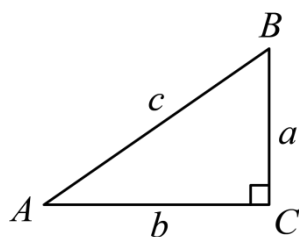
A. $\frac{AC}{BC}$ B. $\frac{AC}{AB}$ C. $\frac{BC}{AC}$ D. $\frac{BC}{AB}$

【变式 2】. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， CD 是斜边 AB 上的高， $\angle A \neq 45^\circ$ ，则下列比值中不等于 $\sin A$ 的是 ()



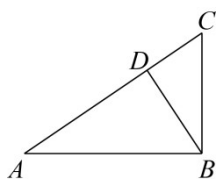
A. $\frac{CD}{AC}$ B. $\frac{BD}{CB}$ C. $\frac{CB}{AB}$ D. $\frac{CD}{CB}$

【变式 3】. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = a$ ， $AC = b$ ， $AB = c$ ，则下列选项正确的是 ()



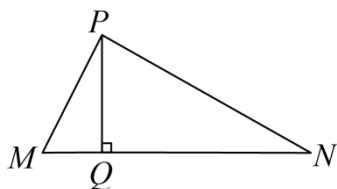
- A. $\sin A = \frac{b}{c}$ B. $\cos B = \frac{b}{c}$ C. $\tan A = \frac{a}{c}$ D. $\tan B = \frac{b}{a}$

【变式4】 . 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， BD 为斜边 AC 的高， D 为垂足，则下列结论中正确的是 ()



- A. $\sin A = \frac{AD}{AB}$ B. $\cos A = \frac{BC}{AC}$
C. $\tan A = \frac{AB}{BC}$ D. $\tan A = \frac{BD}{AD}$

【变式5】 . 如图，在 $\text{Rt}\triangle MNP$ 中， $\angle MPN = 90^\circ$ ， $PQ \perp MN$ ，垂足为点 Q .

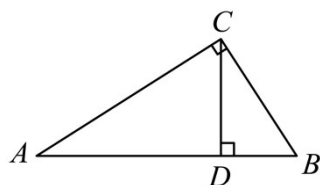


(1) $\tan M = \frac{(\quad)}{MQ} = \frac{NP}{(\quad)}$.

(2) $\frac{PQ}{QN} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\frac{MP}{PN} = \underline{\hspace{2cm}}$. (用正切或余切表示)

【变式6】 . 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是斜边 AB 上的高，下列线段的比值等于 $\cos A$ 的值的有_____个

(1) $\frac{AD}{AC}$; (2) $\frac{AC}{AB}$; (3) $\frac{BD}{BC}$; (4) $\frac{CD}{BC}$.



【变式 7】. $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 下列关系中正确的是 ()

- A. $\tan A = \frac{a}{c}$ B. $\tan A = \frac{a}{b}$ C. $\tan A = \frac{b}{c}$ D. $\tan A = \frac{b}{a}$

题型 02 求锐角的三角比的值

【典例 1】. $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$, 下列说法正确的是 ()

- A. $\angle A$ 的余切值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\angle A$ 的对边与邻边之比为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. $\angle B$ 的余弦值 $\frac{1}{2}$ D. $\angle B$ 的正弦值不确定

【变式 1】. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 4$, 则 $\sin A =$

【变式 2】. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 12$, 则 $\cos C =$ _____.

【变式 3】. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 4$, 那么 $\tan A =$

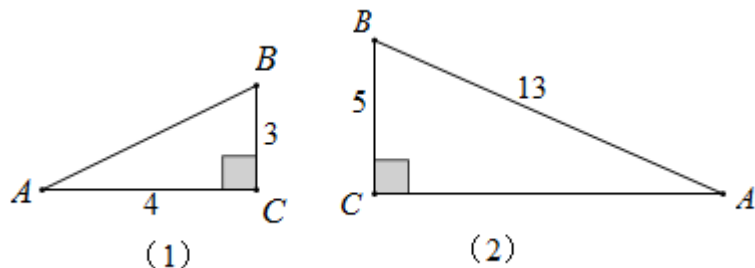
【变式 4】. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 13$, $AC = 5$, $\cot B =$ _____.

【变式 5】. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $a = 2$, $c = 6$, 求 $\sin A$, $\cos A$ 和 $\tan A$ 的值.

【变式 6】. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 若 $AC = 3$, $AB = 5$, 则 $\angle B$ 的正切值为 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【变式 7】. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 求 $\sin A$ 和 $\sin B$ 的值.

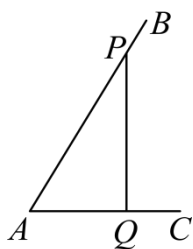


题型 03 根据比值求锐角的三角比的值

【典例 1】. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $a : b = 2 : 1$ ，则 $\tan A =$ _____， $\cos A =$ _____， $\sin B =$ _____.

【变式 1】. 如图，点 P 是锐角 $\angle BAC$ 的边 AB 上任意一点，过点 P 作 $PQ \perp AC$ 于点 Q . 若 $\frac{AQ}{PQ} = \frac{1}{2}$ ，则

$\tan A =$ ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

题型 04 根据三边的变化求锐角三角比的变化

【典例 1】. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\triangle ABC$ 的三边都缩小 $\frac{1}{3}$ ，则 $\sin A$ 的值 ()

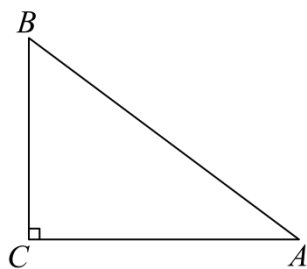
- A. 缩小 $\frac{1}{3}$ B. 放大 3 倍 C. 不变 D. 无法确定

【变式 1】. 在直角三角形中，各边的长度都扩大到原来的 3 倍，则锐角 A 的三角函数值 ()

- A. 都扩大到原来的 3 倍 B. 都缩小为原来的 $\frac{1}{3}$ 倍
C. 都保持原来的数值不变 D. 有的变大，有的缩小

题型 05 锐角三角比之间的关系，取值范围等

【典例 1】. $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，则 ()



- A. $\sin A > \cos A$ ，且 $\tan A > \cos B$

B. $\sin A < \cos A$, 且 $\tan A > \cos B$

C. $\sin A > \cos A$, 且 $\tan A < \cos B$

D. $\sin A < \cos A$, 且 $\tan A < \cos B$

【变式1】. 对于锐角 α , 下列等式中成立的是 ()

A. $\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tan \alpha$

B. $\cos \alpha = \tan \alpha \cdot \cot \alpha$

C. $\tan \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha$

D. $\cot \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

【变式2】. 若 $\angle A$ 是锐角, 且 $\sin A = \frac{1}{3}$, 则 ()

A. $0^\circ < \angle A < 30^\circ$

B. $30^\circ < \angle A < 45^\circ$

C. $45^\circ < \angle A < 60^\circ$

D. $60^\circ < \angle A < 90^\circ$

【变式3】. 如果 α 是锐角, 则下列成立的是 ()

A. $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$

B. $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$

C. $\sin \alpha + \cos \alpha < 1$

D. $\sin \alpha + \cos \alpha \leq 1$

【变式4】. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 则 $\sin A + \cos A$ 的值 ()

A. 大于1

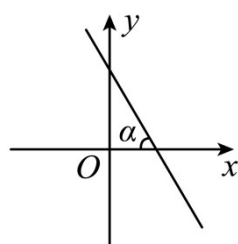
B. 等于1

C. 小于1

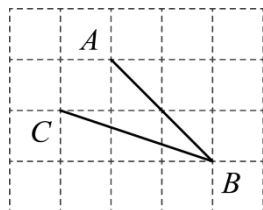
D. 不确定, 与 $\angle A$ 的值有关

题型 06 其他求锐角三角比的值

【典例1】. 如图是直线 $y = -2x + 5$ 的图像, 求锐角 α 的三个三角函数值.



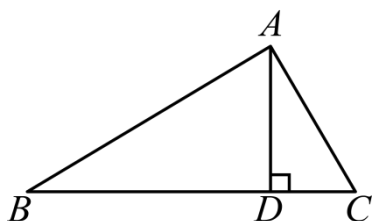
【变式1】. 如图, 在正方形网格中, 点 A 、 B 、 C 都在格点上, 则 $\angle ABC$ 的正切值是



强化训练

一、单选题

- 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，各边的长度都扩大²倍，那么锐角A的余弦值()
 A. 扩大³倍 B. 保持不变 C. 扩大⁹倍 D. 缩小³倍
- 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，则 $\frac{b}{c}$ 是 $\angle A$ 的()
 A. 正弦 B. 余弦 C. 正切 D. 以上都不对
- 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=10$ ， $AC=6$ ，则 $\sin A=()$
 A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$
- 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=2$ ， $BC=1$ ，则 $\tan\angle A$ 的值为()
 A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $BC=3$ ，则 $\tan B$ 的值是()
 A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{4}$
- $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $CD\perp AB$ 于D，下列比值中不等于 $\tan A$ 的是()
 A. $\frac{BC}{AC}$ B. $\frac{CD}{AD}$ C. $\frac{BD}{CD}$ D. $\frac{AC}{AB}$
- 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，如果 $\angle A$ 的正弦值是 $\frac{1}{4}$ ，那么下列各式正确的是()
 A. $AB=4BC$ B. $AB=4AC$ C. $AC=4BC$ D. $BC=4AC$
- 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AD\perp BC$ 于点D，下列结论正确的是()



- A. $\sin C = \frac{CD}{AC}$ B. $\sin C = \frac{AD}{DC}$ C. $\sin C = \frac{AB}{BC}$ D. $\sin C = \frac{AD}{AB}$
- 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，a，b，c分别为 $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 的对边，下列关系中错误的是()

A. $b = c \cdot \cos B$ B. $b = a \cdot \tan B$ C. $b = c \cdot \sin B$ D. $a = b \cdot \tan A$

10. 已知下列说法：①如果 α 是锐角，则 $\sin \alpha$ 随着角度的增大而增大；②如果 α 是锐角，则 $\cos \alpha$ 随着角度的增大而增大；③如果 α 是锐角，则 $\tan \alpha$ 随着角度的增大而增大；④如果 α 是锐角，则 $\cos \alpha < 1$ ， $\sin \alpha < 1$ ， $\tan \alpha < 1$ ，其中正确的有 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题

11. 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $AC = 12$ ， $BC = 8$ ，则 $\tan A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 如果 $\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90^\circ$ ，那么 $\frac{BC}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ (填 $\angle B$ 的三角比)

13. 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 4$ ，则 $\sin A = \underline{\hspace{2cm}}$

14. 在以 O 为坐标原点的直角平面内有一点 $A(2, 4)$ ，如果 AO 与 x 轴正半轴的夹角为 α ，那么 α 的余弦值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

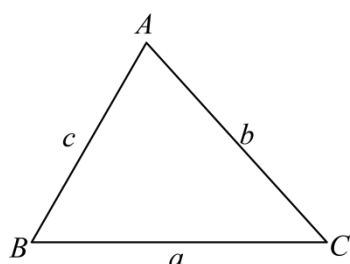
15. 如果方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的两个根分别是 $\text{Rt} \triangle ABC$ 的两条边， $\triangle ABC$ 最小的角为 A ，那么 $\tan A$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、解答题

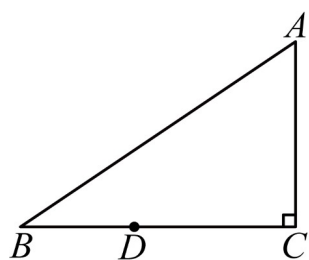
16. 已知 $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ，其中 α 为锐角，求 $\cos \alpha$ 、 $\tan \alpha$ 、 $\cot \alpha$ 的值。

17. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $a:b = 3:5$ ，求 $\angle A$ 、 $\angle B$ 的正切值。

18. 如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，探究 $\frac{a}{\sin A}$ ， $\frac{b}{\sin B}$ ， $\frac{c}{\sin C}$ 之间的关系。(提示：分别作 AB 和 BC 边上的高。)



19. 如图，在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ 。



- (1) 在 BC 边上取一点 D , 使得 $BD = DC$, 则 $\tan \angle ABC$ 和 $\tan \angle ADC$ 有什么大小关系 ?
- (2) 在 BC 边上取一点 D , 使得 $BD = 2DC$, 则 $\tan \angle ABC$ 和 $\tan \angle ADC$ 有什么大小关系 ?
- (3) 在 BC 边上取一点 D , 使得 $BD = nDC (n > 0)$, 则 $\tan \angle ABC$ 和 $\tan \angle ADC$ 有什么大小关系 ?