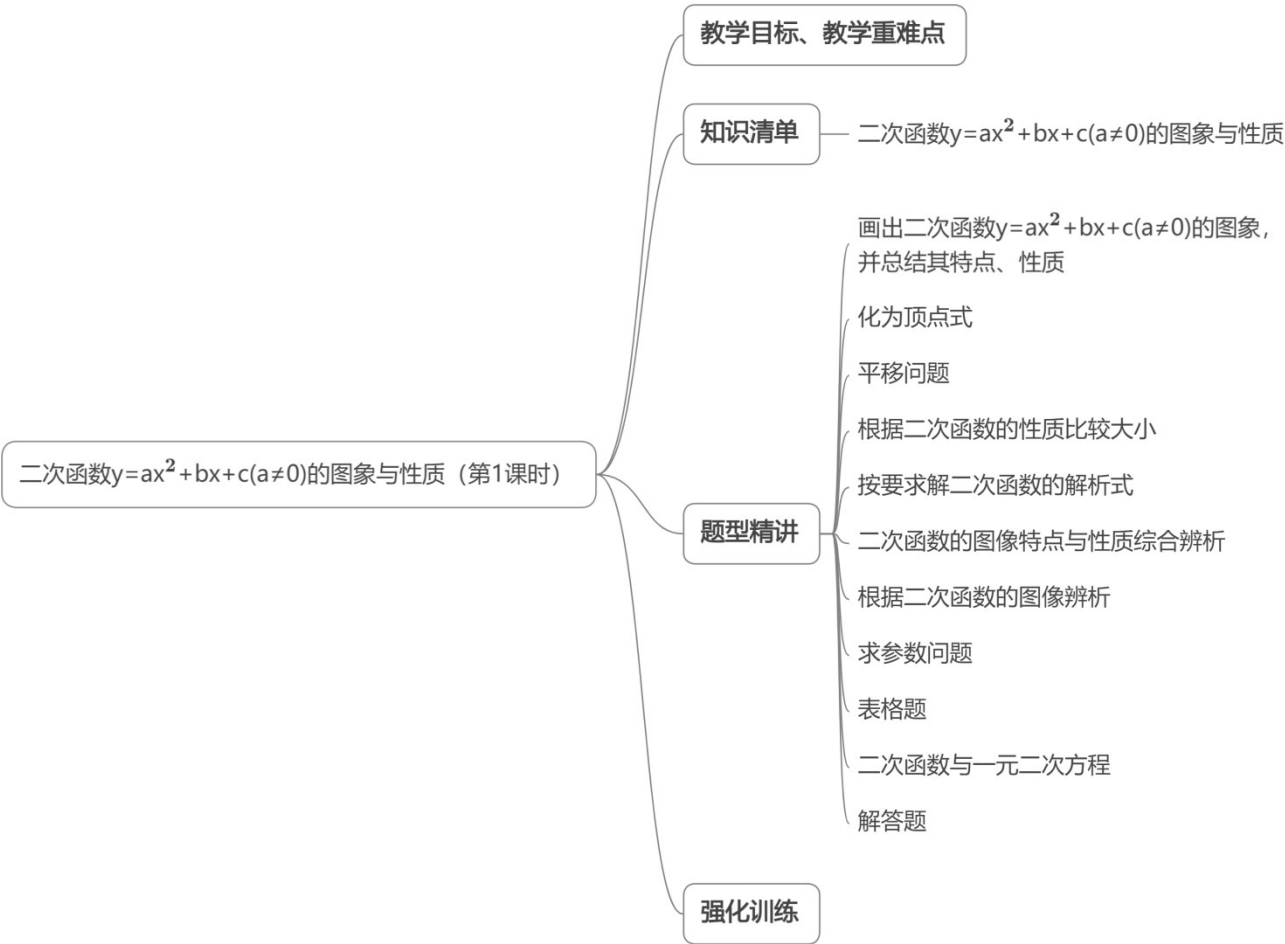


专题 26.4 二次函数  $y=ax^2+bx+c$  的图像与性质（第 1 课时）

内容概览



教学目标、教学重难点

|       |                                                                                                                                                   |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 教学目标  | 1. 学会二次函数一般式与顶点式的相互联系；<br>2. 知道二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与性质；<br>3. 掌握二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图像与性质的应用。                                                    |
| 教学重难点 | 1.重点<br>( 1 ) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与 $y=a ( x+m ) ^2+k ( a\neq 0 )$ 之间的相互关系；<br>( 2 ) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与性质；<br>( 3 ) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的参数问题； |

## 2.难点

(1) 新定义题；最值问题等；

(2) 二次函数  $y=ax^2+bx+c$  的几何应用。

## 知识清单

### 知识点1 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的图象与性质

一、二次函数  $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$  与  $y=a(x+m)^2+k(a \neq 0)$  之间的相互关系

#### 1.顶点式化成一般式

从函数解析式  $y=a(x+m)^2+k$  我们可以直接得到抛物线的顶点  $(-m, k)$ ，所以我们称  $y=a(x+m)^2+k$  为顶点式，将顶点式  $y=a(x+m)^2+k$  去括号，合并同类项就可化成一般式  $y = ax^2 + bx + c$ 。

#### 2.一般式化成顶点式

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

$$\text{对照 } y=a(x+m)^2+k, \text{ 可知 } m = -\frac{b}{2a}, k = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

$\therefore$  抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  的对称轴是直线  $x = -\frac{b}{2a}$ ，顶点坐标是  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ 。

要点：

1. 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  的对称轴是直线  $x = -\frac{b}{2a}$ ，顶点坐标是  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ，可以当作公式加以记忆和运用。

2. 求抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  的对称轴和顶点坐标通常用三种方法：配方法、公式法、代入法，这三种方法都有各自的优缺点，应根据实际灵活选择和运用。

### 二、二次函数 $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 的图象的画法

#### 1.一般方法：列表、描点、连线；

#### 2.简易画法：五点定形法.

其步骤为：

(1)先根据函数解析式，求出顶点坐标和对称轴，在直角坐标系中描出顶点 M，并用虚线画出对称轴。

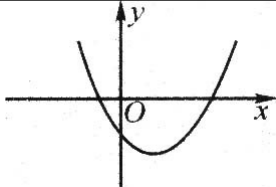
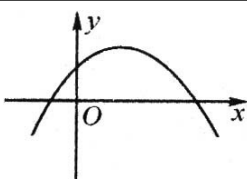
(2)求抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与坐标轴的交点，

当抛物线与 x 轴有两个交点时，描出这两个交点 A、B 及抛物线与 y 轴的交点 C，再找到点 C 关于对称轴的对称点 D，将 A、B、C、D 及 M 这五个点按从左到右的顺序用平滑曲线连结起来。

要点：当抛物线与 x 轴只有一个交点或无交点时，描出抛物线与 y 轴的交点 C 及对称点 D，由 C、M、D 三点可粗略地画出二次函数图象的草图；如果需要画出比较精确的图象，可再描出一对对称点 A、B，然后顺次用平滑曲线连结五点，画出二次函数的图象，

### 三、二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与性质

#### 1. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 图象与性质

| 函数     | 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ( $a$ 、 $b$ 、 $c$ 为常数， $a \neq 0$ )                                                  |                                                                                                               |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 图象     | $a > 0$                                                                                                       | $a < 0$                                                                                                       |
|        |                              |                            |
| 开口方向   | 向上                                                                                                            | 向下                                                                                                            |
| 对称轴    | 直线 $x = -\frac{b}{2a}$                                                                                        | 直线 $x = -\frac{b}{2a}$                                                                                        |
| 顶点坐标   | $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$                                                              | $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$                                                              |
| 增减性    | 在对称轴的左侧，即当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时， $y$ 随 $x$ 的增大而减小；在对称轴的右侧，即当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时， $y$ 随 $x$ 的增大而增大。简记：左减右增 | 在对称轴的左侧，即当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时， $y$ 随 $x$ 的增大而增大；在对称轴的右侧，即当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时， $y$ 随 $x$ 的增大而减小。简记：左增右减 |
| 最大(小)值 | 抛物线有最低点，当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时， $y$ 有最小值， $y_{\text{最小值}} = \frac{4ac-b^2}{4a}$                              | 抛物线有最高点，当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时， $y$ 有最大值， $y_{\text{最大值}} = \frac{4ac-b^2}{4a}$                              |

#### 2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 图象的特征与 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 及 $b^2-4ac$ 的符号之间的关系

| 项目<br>字母  | 字母的符号                 | 图象的特征        |
|-----------|-----------------------|--------------|
| $a$       | $a > 0$               | 开口向上         |
|           | $a < 0$               | 开口向下         |
| $b$       | $ab > 0$ ( $a, b$ 同号) | 对称轴在 $y$ 轴左侧 |
|           | $ab < 0$ ( $a, b$ 异号) | 对称轴在 $y$ 轴右侧 |
| $c$       | $c = 0$               | 图象过原点        |
|           | $c > 0$               | 与 $y$ 轴正半轴相交 |
|           | $c < 0$               | 与 $y$ 轴负半轴相交 |
| $b^2-4ac$ | $b^2-4ac = 0$         | 与 $x$ 轴有唯一交点 |
|           | $b^2-4ac > 0$         | 与 $x$ 轴有两个交点 |

|  |                 |           |
|--|-----------------|-----------|
|  | $b^2 - 4ac < 0$ | 与 x 轴没有交点 |
|--|-----------------|-----------|

#### 四、求二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的最大 (小) 值的方法

如果自变量的取值范围是全体实数，那么函数在顶点处取得最大 (或最小) 值，即当  $x = -\frac{b}{2a}$  时，  
 $y_{\text{最值}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$  .

要点：

如果自变量的取值范围是  $x_1 \leq x \leq x_2$ ，那么首先要看  $-\frac{b}{2a}$  是否在自变量的取值范围  $x_1 \leq x \leq x_2$  内，若在此范围内，则当  $x = -\frac{b}{2a}$  时， $y_{\text{最值}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ，若不在此范围内，则需要考虑函数在  $x_1 \leq x \leq x_2$  范围内的增减性，如果在此范围内，y 随 x 的增大而增大，则当  $x = x_2$  时， $y_{\text{最大值}} = ax_2^2 + bx_2 + c$ ；当  $x = x_1$  时， $y_{\text{最小值}} = ax_1^2 + bx_1 + c$ ，如果在此范围内，y 随 x 的增大而减小，则当  $x = x_1$  时， $y_{\text{最大值}} = ax_1^2 + bx_1 + c$ ；当  $x = x_2$  时， $y_{\text{最小值}} = ax_2^2 + bx_2 + c$ ，如果在此范围内，y 值有增有减，则需考察  $x = x_1$ ， $x = x_2$ ， $x = -\frac{b}{2a}$  时 y 值的情况。

#### 【即学即练】

1. 写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标。

(1)  $y = -3x^2 - 4x$ ；

(2)  $y = 4x^2 - 24x + 26$ ；

(3)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ 。

2. 二次函数  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$  的顶点在第\_\_\_\_\_象限？

A. 一

B. 二

C. 三

D. 四

3. 将抛物线  $y = x^2 - 4x + 2$  向左平移 3 个单位，再向上平移 2 个单位后新的抛物线的顶点坐标是\_\_\_\_\_。

4. 如果函数  $y = x^2 + 4x - m$  的图像与 x 轴有公共点，那么 m 的取值范围是\_\_\_\_\_。

5. 抛物线  $y = ax^2 - bx - c$  (其中  $a < 0, b > 0, c > 0$ ) 一定不经过的象限是 ( )

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

## 题型精讲

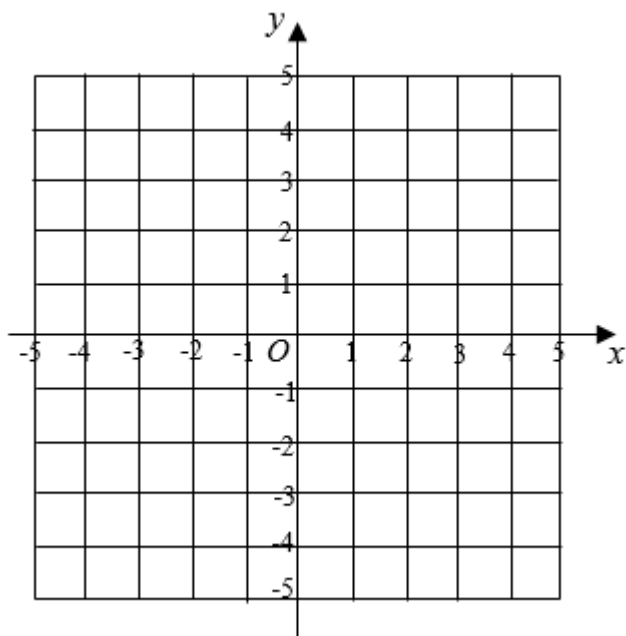
### 题型 01 画出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像，并总结其特点、性质

【典例 1】. 用描点法画出  $y = x^2 + 2x - 3$  的图像

(1) 根据对称性列表：

|                    |     |    |    |    |   |   |     |
|--------------------|-----|----|----|----|---|---|-----|
| $x$                | ... | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | ... |
| $y = x^2 + 2x - 3$ | ... |    |    |    |   |   | ... |

(2) 在下列平面直角坐标系中描出表中各点，并把这些点连成平滑的曲线：



(3) 观察图像：

① 抛物线与  $y$  轴交点坐标是\_；

② 抛物线与  $x$  轴交点坐标是\_；

③ 当  $x$  满足\_时， $y < 0$ ；

④ 它的对称轴是\_；

⑤ 当  $x$ \_时， $y$  随  $x$  的增大而减小

【变式 1】. 求出下列抛物线的开口方向，对称轴和顶点坐标。

(1)  $y = 2x^2 - 4x + 5$

( 2 )  $y = -x^2 + 2x - 3$

( 3 )  $y = 3x^2 + 2x$

( 4 )  $y = -x^2 - 2x$

( 5 )  $y = -2x^2 + 8x - 8$

**【变式 2】** . 已知二次函数  $y = x^2 + (m-2)x + m - 4$  , 其中  $m > 2$  , 那么这个函数图象的顶点在 ( )

- A . 第一象限      B . 第二象限      C . 第三象限      D . 第四象限

## 题型 02 化为顶点式

**【典例 1】** . 将二次函数  $y = x^2 + 4x - 4$  化成  $y = a(x+h)^2 + k$  的形式为 ( )

- A .  $y = (x+2)^2 - 8$       B .  $y = (x-2)^2$   
C .  $y = (x+2)^2 - 4$       D .  $y = x^2 - 8$

**【变式 1】** . 把二次函数  $y = x^2 - 4x + 3$  化成  $y = a(x+h)^2 + k$  的形式是 ( )

- A .  $y = (x-2)^2 + 1$       B .  $y = (x-2)^2 - 1$   
C .  $y = (x+2)^2 + 7$       D .  $y = (x+2)^2 - 7$

## 题型 03 平移问题

**【典例 1】** . 在平面直角坐标系中, 将抛物线  $y = 3x^2 + 6x - 3$  向左平移 2 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度所得到的抛物线的解析式为\_\_\_\_\_.

**【变式 1】** . 将抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  向下平移 3 个单位长度, 再向右平移 2 个单位长度后, 得到的抛物线的解析式为  $y = 2(x+1)^2$  , 则  $b$  的值为\_\_\_\_\_.

## 题型 04 根据二次函数的性质比较大小

**【典例 1】** . 如果二次函数  $y = x^2 - 6x - 4$  的图像经过点  $A(-1, y_1)$  ,  $B(4, y_2)$  , 那么  $y_1$  \_\_\_\_\_  $y_2$  ( 填“>”, “<”或“=” ) .

**【变式 1】** . 在函数  $y = 2x^2 + 4x - 5$  的图象上有三点,  $A_1(-2, y_1)$ ,  $A_2(-1, y_2)$ ,  $A_3(1, y_3)$  , 则下列各式中, 正确的是 ( )

- A.  $y_1 < y_2 < y_3$       B.  $y_3 < y_2 < y_1$       C.  $y_2 < y_1 < y_3$       D.  $y_3 < y_1 < y_2$

**【变式 2】** . 已知抛物线  $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$  过  $A(-5, y_1)$ ,  $B(-4, y_2)$ ,  $C(2, y_2)$ ,  $D(5, y_3)$  四点, 则  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  的大小关系是 ( )

- A.  $y_1 > y_2 > y_3$       B.  $y_3 > y_1 > y_2$       C.  $y_1 > y_3 > y_2$       D.  $y_3 > y_2 > y_1$

### 题型 05 按要求解二次函数解析式

**【典例 1】** . 一个二次函数的图象的顶点坐标是  $(3, -1)$ , 与  $y$  轴的交点是  $(0, -4)$ , 这个二次函数的解析式是 ( )

- A.  $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$       B.  $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 4$   
C.  $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2 - 1$       D.  $y = -x^2 + 6x - 12$

**【变式 1】** . 将抛物线  $y = x^2 - 2x + 1$  绕它的顶点旋转  $180^\circ$  后的表达式是 ( )

- A.  $y = -x^2 + 2x + 1$       B.  $y = -x^2 + 2x - 1$   
C.  $y = -x^2 - 2x + 1$       D.  $y = -x^2 - 2x - 1$

### 题型 06 二次函数的图像特点与性质综合辨析

**【典例 1】** . 已知抛物线  $y = x^2 - 2x + 3$ , 下列结论错误的是 ( )

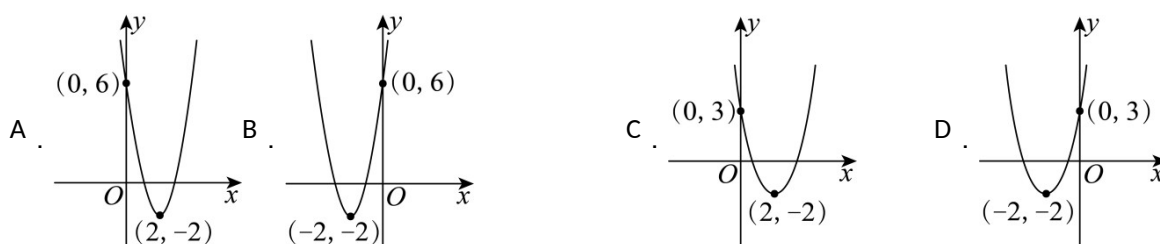
- A. 抛物线开口向上      B. 抛物线的对称轴为直线  $x = 1$   
C. 抛物线的顶点坐标为  $(1, 2)$       D. 当  $x > 1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小

**【变式 1】** . 关于二次函数  $y = 3x^2 - 24x + 46$ , 下列说法正确的是 ( )

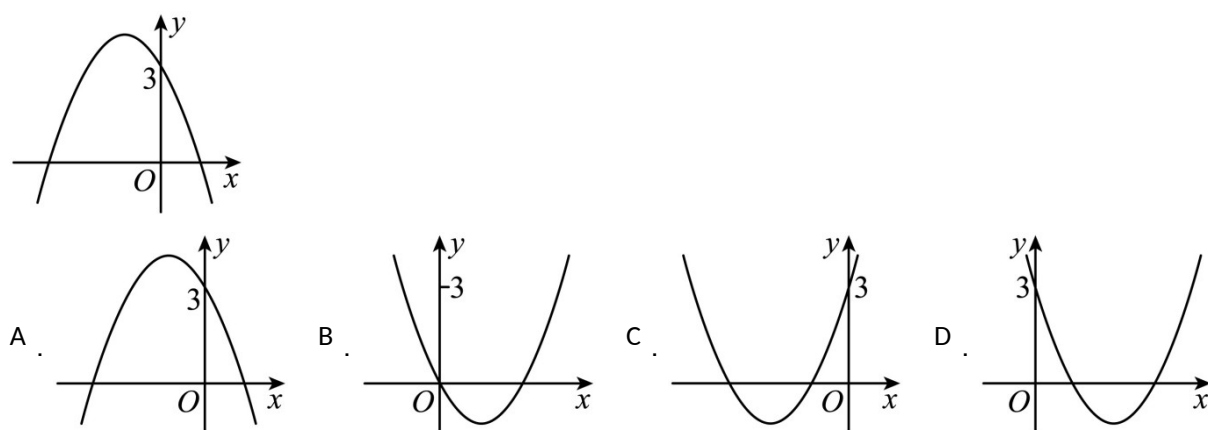
- A. 图象的开口向下      B. 图象的对称轴为直线  $x = -4$   
C. 函数的最小值为  $-2$       D. 当  $x > 3$  时,  $y$  随  $x$  增大而增大

### 题型 07 根据二次函数的图像辨析

**【典例 1】** . 二次函数  $y = 2x^2 - 8x + 6$  的图像大致是 ( )

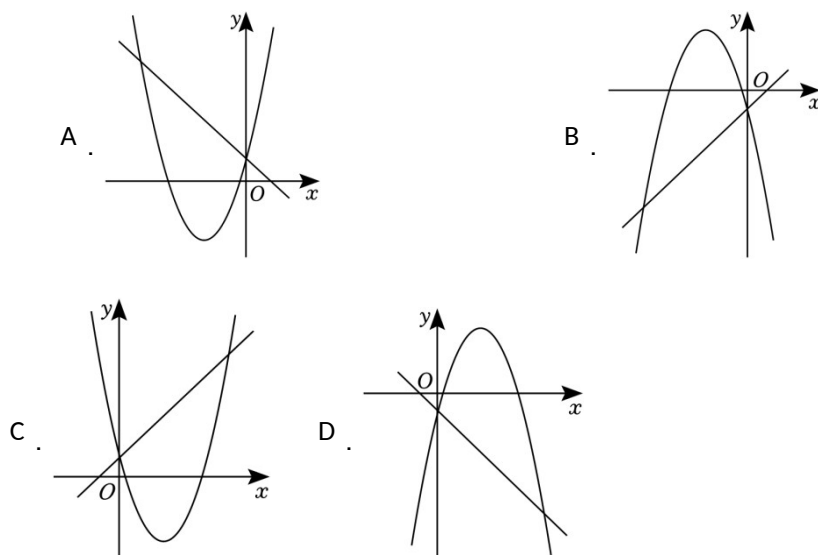


【变式1】. 已知二次函数  $y = -x^2 + bx + 3$  如图所示，那么  $y = x^2 + (b-1)x + 3$  的图象可能是 ( )

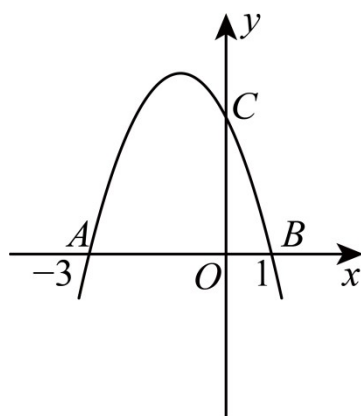


【变式2】. 二次函数  $y = ax^2 + 4x + a$  与一次函数  $y = ax + a$  在同一平面直角坐标系中的图象可能是

( )



【变式3】. 如图，抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于点  $A(-3, 0)$  和点  $B(1, 0)$ ，与  $y$  轴交于点  $C$ ，下列说法正确的是 ( )



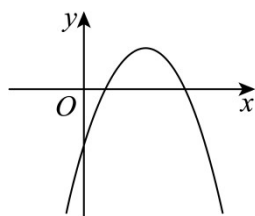
A.  $c = -3$

B. 抛物线的对称轴为直线  $x = -1$

C.  $x > 1$  时,  $y$  的值随  $x$  值的增大而增大

D. 抛物线的顶点坐标为  $(-1, 3)$

**【变式 4】** . 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象如图所示, 根据图象可得  $a, b, c$  与 0 的大小关系是 ( )



A.  $a > 0, b < 0, c < 0$

B.  $a > 0, b > 0, c > 0$

C.  $a < 0, b < 0, c < 0$

D.  $a < 0, b > 0, c < 0$

### 题型 08 求参数问题

**【典例 1】** . 若二次函数  $y = x^2 + mx$  的对称轴为直线  $x = 3$ , 则  $m =$  ( )

A. 3

B. -3

C. 6

D. -6

**【变式 1】** . 已知二次函数  $y = ax^2 + (2a - 3)x + a - 1$  ( $x$  是自变量) 的图象经过第一、二、四象限, 则实数  $a$  的取值范围为 ( )

A.  $1 \leq a < \frac{9}{8}$

B.  $0 < a < \frac{3}{2}$

C.  $0 < a < \frac{9}{8}$

D.  $1 \leq a < \frac{3}{2}$

**【变式 2】** . 已知二次函数  $y = -x^2 + 2kx - k^2 + h$ , 当  $x > 2$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小, 则函数中  $k$  的取值范围是 ( )

- A.  $k > 2$                       B.  $k \leq 2$                       C.  $k = 2$                       D.  $k \leq -2$

**【变式3】** . 已知二次函数  $y = x^2 - 2mx + m^2 + 2m + 3$  的图象不经过三、四象限，且当  $x > \frac{1}{2}$  时， $y$  随  $x$  的增大而增大，则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $m > -\frac{3}{2}$                       B.  $n \leq \frac{1}{2}$                       C.  $-\frac{3}{2} < m \leq \frac{1}{2}$                       D.  $-\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$

## 题型 09 表格题

**【典例1】** . 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的  $y$  与  $x$  的部分对应值如下表，则下列判断中正确的是 ( )

|     |     |   |   |   |    |     |
|-----|-----|---|---|---|----|-----|
| $x$ | ... | 0 | 1 | 3 | 4  | ... |
| $y$ | ... | 2 | 4 | 2 | -2 | ... |

- A. 抛物线开口向上                      B. 当  $x > 1$  时， $y$  随  $x$  的增大而减小
- C. 当  $0 < x < 2$  时， $2 < y \leq \frac{17}{4}$                       D.  $y$  的最大值为  $\frac{9}{2}$

**【变式1】** . 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )，自变量  $x$  与函数  $y$  的对应值如下：

|     |     |    |    |    |    |    |   |     |
|-----|-----|----|----|----|----|----|---|-----|
| $x$ | ... | -2 | -1 | 0  | 1  | 2  | 3 | ... |
| $y$ | ... | 5  | 0  | -3 | -4 | -3 | 0 | ... |

- 下列说法正确的是 ( )
- A. 抛物线的对称轴是  $y$  轴                      B. 当  $x < 1$  时， $y$  随  $x$  的增大而增大
- C. 二次函数的最小值是 -4                      D. 抛物线的开口向下

## 题型 10 二次函数与一元二次方程

**【典例1】** . 方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的两根为 1 和 5，那么抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的对称轴是直线

**【变式1】** . 若二次函数  $y = kx^2 + 2x - 3$  与  $x$  轴有两个交点，则  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**【变式2】** . 如果函数  $y = x^2 + 4x - m$  的图像与  $x$  轴有公共点，那么  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**【变式3】** . 抛物线  $y = x^2 - (m-3)x - m$  与  $x$  轴的两个交点间的距离等于 3， $m$  的值为\_\_\_\_\_.

## 题型 11 解答题

**【典例 1】** . 在平面直角坐标系  $xOy$  中，二次函数  $y = x^2 - 2mx + 5m$  的图象经过点  $(1, -2)$  .

(1) 求二次函数的表达式；

(2) 求二次函数图象的对称轴 .

**【变式 1】** . 抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  ( $b, c$  为常数) 的图像过点  $A(-2, 0), B(-1, 4)$  .

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 方程  $-x^2 + bx + c = 0$  的解是———；

(3) 当  $0 < x < 3$  时， $y$  的取值范围是——— .

**【变式 2】** . 抛物线  $y = (x-1)(x-a)$  的对称轴为直线  $x = 2$  .

(1) 求  $a$  的值；

(2) 向下平移该抛物线，使得到的抛物线经过原点，求平移后得到的抛物线的表达式 .

**【变式 3】** . 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$  是常数，且  $a \neq 0$ )，函数  $y$  与自变量  $x$  的部分对应值如表：

|     |     |    |     |   |   |   |   |     |
|-----|-----|----|-----|---|---|---|---|-----|
| $x$ | ... | -1 | 0   | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
| $y$ | ... | 10 | $m$ | 2 | 1 | 2 | 5 | ... |

(1) 直接写出  $m$  的值———；

(2) 求出函数表达式；

(3) 直接写出关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + c > x - 1$  的解集：——— .

**【变式 4】** . 已知二次函数的解析式为  $y = x^2 + bx + b^2$  ( $b$  为常数) .

(1) 若当  $x = 0$  时， $y = 4$ ，求  $b$  的值；

(2) 若函数图象经过点  $(a, 1)$ ，且  $t = ab - a^2 - b^2$ ，求  $t$  的取值范围 .

**【变式 5】** . 已知抛物线  $y = x^2 - 2x - 3$  的顶点为  $P$ ，与  $y$  轴相交与点  $Q$  .

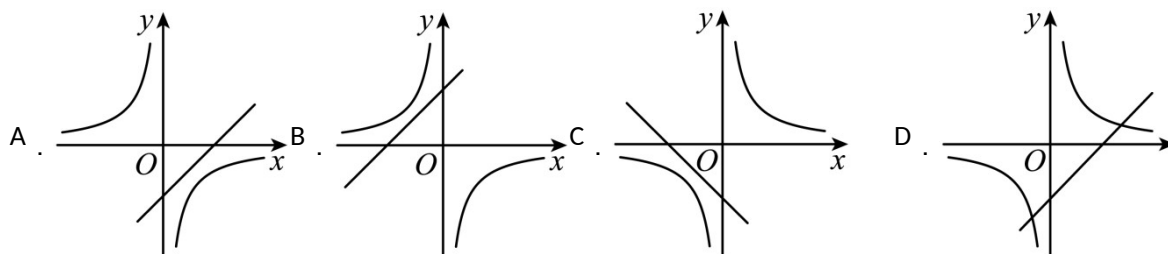
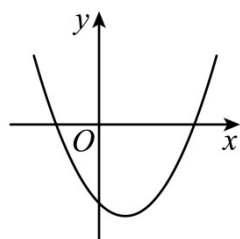
(1) 求点  $P$ 、 $Q$  的坐标；

(2) 将该二次函数图像向上平移，使平移后所得图像经过坐标原点，与  $x$  轴的另一个交点为  $M$ ，求  $\sin \angle OMQ$  的值 .

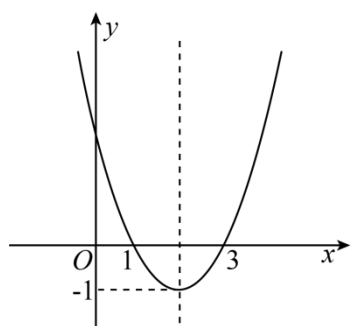
## 强化训练

### 一、单选题

- 二次函数  $y = (a^2 + 1)x^2 - 3x + 1$  的图象一定不经过 ( )  
 A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
- 把抛物线  $y = x^2 + bx + c$  向右平移 4 个单位，再向下平移 3 个单位，得到抛物线  $y = x^2 - 4x + 3$ ，则  $b$ 、 $c$  的值分别为 ( )  
 A.  $b = -12$ ， $c = 32$       B.  $b = 4$ ， $c = -3$       C.  $b = 0$ ， $c = 6$       D.  $b = 4$ ， $c = 6$
- 若点  $A(-4, y_1)$ ， $B(-1, y_2)$ ， $C(1, y_3)$  都是二次函数  $y = x^2 - 4x + k$  的图象上的点，则 ( )  
 A.  $y_1 < y_2 < y_3$       B.  $y_2 < y_1 < y_3$   
 C.  $y_3 < y_2 < y_1$       D.  $y_3 < y_1 < y_2$
- 如果抛物线  $y = (m-1)x^2 + mx$  的顶点是它的最高点，那么  $m$  的取值范围是 ( )  
 A.  $m > 0$       B.  $m < 0$       C.  $m > 1$       D.  $m < 1$
- 当二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  有最大值时， $a$  可能是 ( )  
 A. 1      B. 2      C. -2      D. 3
- 已知抛物线  $y = x^2 - 2x + 3$ ，下列结论错误的是 ( )  
 A. 抛物线开口向上      B. 抛物线的对称轴为直线  $x = 1$   
 C. 抛物线的顶点坐标为  $(1, 2)$       D. 当  $x > 1$  时， $y$  随  $x$  的增大而减小
- 已知二次函数  $y = (k-3)x^2 + 2x + 1$  的图象与  $x$  轴有交点，则  $k$  的取值范围是 ( )  
 A.  $k \leq 4$  且  $k \neq 3$       B.  $k < 4$  且  $k \neq 3$       C.  $k < 4$       D.  $k \neq 4$
- 如图，二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象如图所示，则反比例函数  $y = \frac{a}{x}$  ( $a \neq 0$ ) 和一次函数  $y = bx + c$  在同一直角坐标系中的图象可能是 ( ) .



9. 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象如图所示，下列结论错误的是（ ）



A. 抛物线开口向上

B. 方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的解为  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$

C. 抛物线对称轴为直线  $x = 2$

D. 抛物线与  $y$  轴交点坐标为  $(0, 2)$

10. 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象上部分点的横坐标  $x$  与纵坐标  $y$  的对应值如下表：

|     |     |    |                |                |    |                 |     |
|-----|-----|----|----------------|----------------|----|-----------------|-----|
| $x$ | ... | 0  | 1              | 3              | 4  | 5               | ... |
| $y$ | ... | -5 | $-\frac{7}{2}$ | $-\frac{7}{2}$ | -5 | $-\frac{15}{2}$ | ... |

关于它的图象，下列判断正确的是（ ）

A. 开口向上

B. 对称轴是直线  $x = 1$

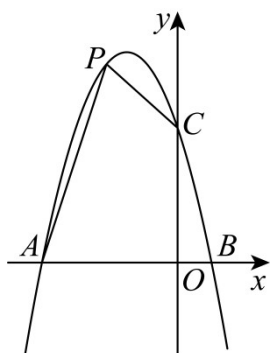
C. 一定经过点  $\left(-1, -\frac{15}{2}\right)$

D. 在对称轴左侧部分自左至右是下降的

## 二、填空题

11. 抛物线  $y = 3x^2 - 6x + 5$  的顶点坐标为\_\_\_\_\_.

12. 如果抛物线  $y = (2-a)x^2 + 3x - a$  的开口向上，那么  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
13. 已知函数  $y = x^{m^2-m} + (m+1)x + 4$  是关于  $x$  的二次函数，且顶点在  $y$  轴上，那么  $m$  的值为\_\_\_\_\_.
14. 已知  $(-1, y_1)$ ,  $(2, y_2)$ ,  $(4, y_3)$  都是二次函数  $y = ax^2 - 2ax + 3a (a \neq 0)$  的图像上的点，当  $x > 2$  时， $y$  随着  $x$  的增大而增大，则  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  按从小到大顺序排列是\_\_\_\_\_.
15. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，将抛物线  $y = x^2 + 2$  向左平移1个单位，再向下平移4个单位，所得新抛物线的顶点为  $P$ ，与  $y$  轴交点为  $A$ ，则  $\tan \angle POA =$ \_\_\_\_\_.
16. 如图，已知抛物线  $y = -x^2 - 3x + 4$ ，点  $P$  是抛物线上一动点. 当点  $P$  在第二象限， $\angle PBA = 45^\circ$  时，点  $P$  的坐标是\_\_\_\_\_.

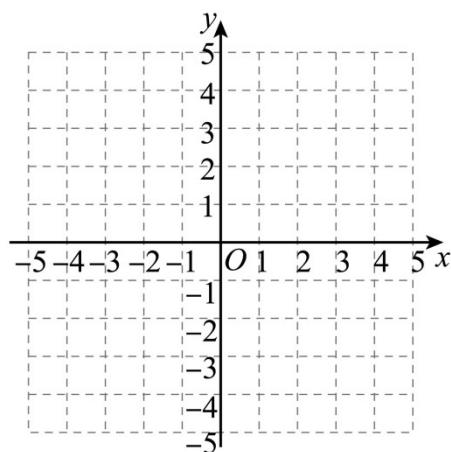


17. 已知  $P(x_1, y_1)$  是抛物线  $y = a(x-m)^2 + h (a \neq 0)$  上的一点，且满足  $x_1 - m = y_1 - h \neq 0$ ，如果使用  $2|x_1 - m|$  的值定义抛物线的“开口大小”，那么抛物线  $y = x^2 + 4x + 3$  的“开口大小”为\_\_\_\_\_.
18. 定义：将函数  $C_1$  的图象绕点  $P(m, 0)$  旋转  $180^\circ$ ，得到新的函数  $C_2$  的图象，我们称函数  $C_2$  是函数  $C_1$  关于点  $P$  的相关函数. 如果当  $m-1 \leq x \leq m+2$  时，函数  $y = x^2 - 6mx + 4m^2$  关于点  $P(m, 0)$  的相关函数的最大值为 8，则  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

19. 已知二次函数  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$ .

- (1) 请把二次函数的解析式化成  $y = a(x-h)^2 + k$  的形式 (直接写出结果)，并写出图象的顶点坐标和对称轴；
- (2) 请在如图所示的坐标系内画出函数的图象 (不必列表)。

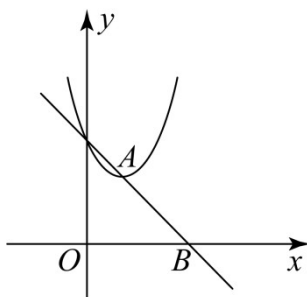


20. 已知二次函数  $y = x^2 - 2x + 2m - 2$  的图象与  $x$  轴有公共点.

(1) 求  $m$  的取值范围;

(2) 当  $m$  为正整数时, 求此时二次函数与  $x$  轴的交点坐标.

21. 已知抛物线  $y = x^2 - 2x + a$  的顶点  $A$  在直线  $y = -x + 3$  上, 直线  $y = -x + 3$  与  $x$  轴的交点为  $B$  点.



(1) 求点  $B$  的坐标与  $a$  的值;

(2) 求  $\triangle AOB$  的面积.

22. 已知抛物线  $y = x^2 + 2x + 3$  的顶点为  $A$ , 它与  $y$  轴的交点为  $B$ .

(1) 求线段  $AB$  的长;

(2) 平移该抛物线, 使其顶点在  $y$  轴上, 且与  $x$  轴两交点间的距离为 4, 求平移后所得抛物线的表达式.

23. 已知抛物线  $y = x^2 + bx + c$  交  $x$  轴于  $C, D$  两点, 其中点  $C$  的坐标为  $(-1, 0)$ , 对称轴为  $x = 1$ . 点  $A, B$  为

坐标平面内两点, 其坐标为  $A\left(\frac{1}{2}, -5\right)$ ,  $B(4, -5)$ .

(1) 求抛物线的解析式及顶点坐标;

(2) 连接  $AB$ , 若抛物线  $y = x^2 + bx + c$  向下平移  $k(k > 0)$  个单位时, 与线段  $AB$  只有一个公共点, 求  $k$  的取值

范围．

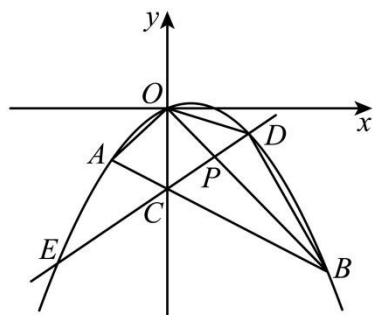
24．在平面直角坐标系中，已知二次函数  $y = -x^2 + bx + c$  ( $b, c$  是常数)．

(1) 当  $b = 2$ ， $c = 3$  时，求该函数图象的顶点坐标．

(2) 设该二次函数图象的顶点坐标是  $(m, n)$ ，当该函数图象经过点  $(1, -3)$  时，求  $n$  关于  $m$  的函数解析式．

(3) 已知  $b = 2c + 1$ ，当  $0 \leq x \leq 2$  时，该函数有最大值 8，求  $c$  的值．

25．如图，平面直角坐标系中，点  $A$  坐标  $(a, a)$ ，点  $B$  坐标  $(b, -b)$ ，其中实数  $a, b$  ( $a < 0 < b$ ) 分别是方程  $x^2 - 2x - 3 = 0$  两根．抛物线经过  $A, B, O$  三点，线段  $AB$  交  $y$  轴于  $C$ ．若  $P$  为线段  $OB$  上一个动点 (不与  $O, B$  重合)，直线  $PC$  与抛物线交于  $D, E$  两点 ( $D$  在  $y$  轴右边)，连接  $OD, BD$



(1) 求抛物线解析式；

(2) 求  $\triangle BOD$  面积的最大值，并求出此时点  $D$  坐标；

(3) 当  $\triangle OPC$  为等腰三角形时，直接写出点  $P$  坐标．