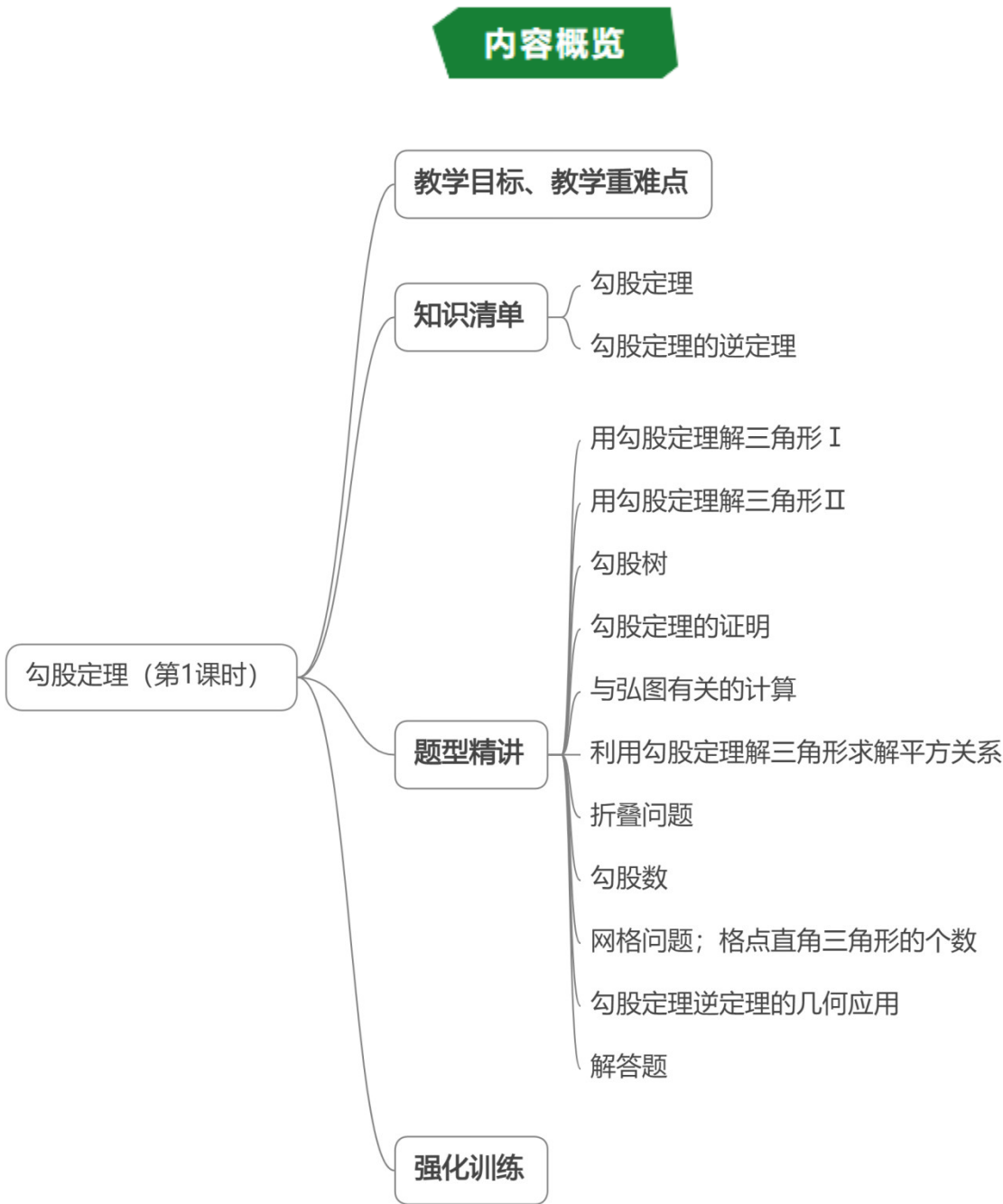


专题 22.4 勾股定理(第 1 课时 )



教学目标、教学重难点

|      |                                                                |
|------|----------------------------------------------------------------|
| 教学目标 | 1. 了解勾股定理的内容并学会应用；<br>2. 掌握勾股定理的证明方法；<br>3. 知道勾股定理的逆定理；勾股数等概念。 |
|------|----------------------------------------------------------------|

|              |                                                                                                                                                               |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>教学重难点</b> | <p>1.重点</p> <p>(1) 直角三角形三边之间的关系；</p> <p>(2) 勾股定理及其证明；</p> <p>(3) 勾股定理的逆定理及其证明；</p> <p>(4) 勾股数。</p> <p>2.难点</p> <p>(1) 勾股定理的证明；</p> <p>(2) 勾股定理及其逆定理的几何应用。</p> |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## 知识清单

### 知识点 1 勾股定理

我们来研究直角三角形三边之间的关系.

**定理** 在直角三角形中，斜边大于直角边.

如图 22-3-1,已知：在  $\text{Rt}\triangle ACB$  中， $\angle C=90^\circ$ .求证： $BC<AB, AC<AB$ .

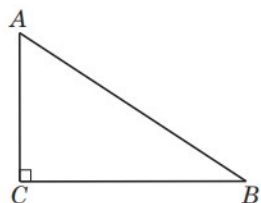


图 22-3-1

**证明** 根据“直角三角形的两个锐角互余”,可得 $\angle A+\angle B=90^\circ$ ,进而推出 $\angle A<\angle C$ .由“在三角形中，大角对大边”,可得 $BC<AB$ ,同理可知 $AC<AB$ .

如果把直角边  $AC$  看作点  $A$  到直线  $BC$  的垂线段，那么根据上述定理，可以推得

**定理** 连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短.

**简单地说：**垂线段最短.

**勾股定理** 直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

如图 22-3-3,在我国古代，称直角三角形的直角边中较短的一边为“勾”，较长的一边为“股”，斜边为“弦”.勾股定理揭示了直角三角形三边之间的关系，是几何中著名的定理，有着极其广泛的应用.

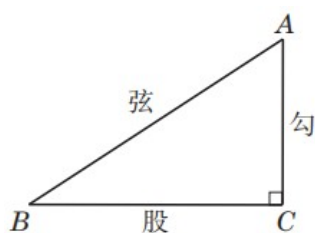


图 22-3-3

已知：直角三角形的两条直角边长分别为  $a$  及  $b$ , 斜边长为  $c$ .

求证： $a^2 + b^2 = c^2$ .

下面是古代数学家的一种巧妙证法：

图 22-3-4(1)和(2)都是边长为  $(a+b)$  的正方形，从中分别去掉四个全等的直角三角形(蓝色部分), 由上述关于面积的性质，可知这两个正方形中剩余部分的面积一定相等.

图 22-3-4 中每个直角三角形的两直角边长分别为  $a$  及  $b$ . 因为这些直角三角形全等，而直角三角形的两个锐角互余，所以图 22-3-4(1)中的剩余部分是边长为  $c$  的正方形，而图 22-3-4(2)中的剩余部分是边长分别为  $a$  及  $b$  的两个正方形.

因此， $a^2 + b^2 = c^2$ .

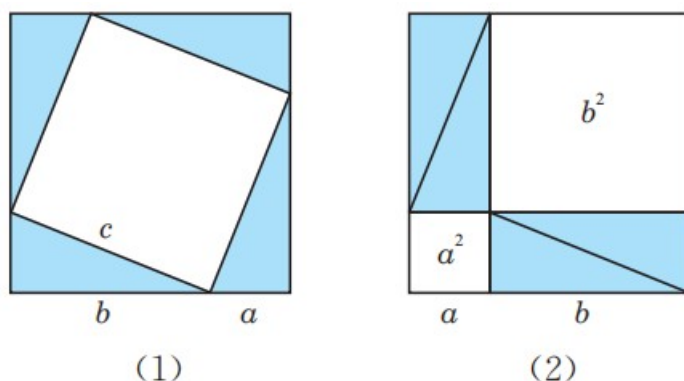


图 22-3-4

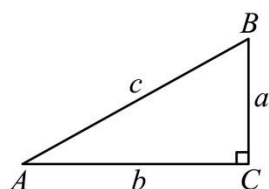
### 【即学即练】

1. 如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ .

(1) 若  $a = 3, b = 4$ ，则  $c =$  \_\_\_\_\_；

(2) 若  $b = 8, c = 10$ ，则  $a =$  \_\_\_\_\_；

(3) 若  $a = 5, b = 12$ ，则  $c =$  \_\_\_\_\_.



2. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中, 若  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 3$ ,  $BC = 4$ , 则  $AB =$  ( )

A. 3

B. 4

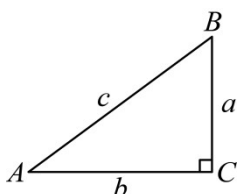
C. 5

D.  $\frac{12}{5}$

3. 两条直角边长分别是  $2\sqrt{2}\text{cm}$ ,  $\sqrt{2}\text{cm}$  的直角三角形的斜边长是\_\_\_\_\_cm.

4. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $AB = 5$ ,  $BC = 3$ , 则  $AC^2 =$ \_\_\_\_\_.

5. 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ , 则以下关系式成立的是 ( )



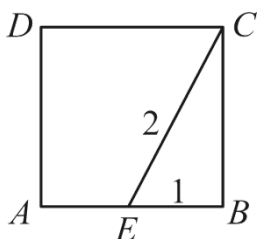
A.  $a^2 + b^2 = c^2$

B.  $(c - a)^2 = b^2$

C.  $(a + b)^2 = c^2$

D.  $a^2 + c^2 = b^2$

6. 如图, 点  $E$  在正方形  $ABCD$  的边  $AB$  上, 若  $EB = 1$ ,  $EC = 2$ , 则  $S_{\text{正方形}ABCD} =$  ( )



A. 1

B. 3

C. 4

D. 5

## 知识点2 勾股定理的逆定理

### 一、勾股定理的逆定理

**勾股定理的逆定理** 如果三角形的一条边的平方等于其他两条边的平方和, 那么这个三角形是直角三角形.

如图 22-3-6, 已知: 在  $\triangle ABC$  中,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ , 且  $a^2 + b^2 = c^2$ .

求证:  $\triangle ABC$  是直角三角形.

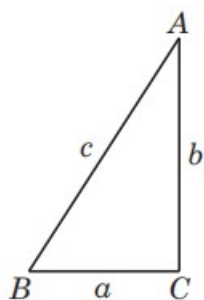


图 22-3-6

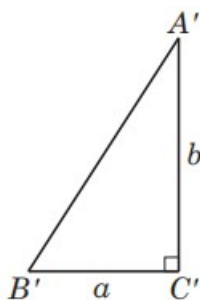


图 22-3-7

**分析** 构造一个直角边长为  $a$ 、 $b$  的直角三角形，证明它与  $\triangle ABC$  全等。

**证明** 如图 22-3-7, 作  $\triangle A'B'C'$ , 使  $\angle C' = 90^\circ$ ,  $B'C' = a$ ,  $A'C' = b$ , 由勾股定理, 可得  $A'B'^2 = B'C'^2 + A'C'^2 = a^2 + b^2$ . 又因为  $a^2 + b^2 = c^2$ , 所以  $A'B'^2 = c^2$ , 即  $A'B' = c$ .

因此,  $\triangle ABC$  与  $\triangle A'B'C'$  的三边对应相等, 从而  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ . 由“全等三角形的对应角相等”, 可得  $\angle C = \angle C' = 90^\circ$ , 即  $\triangle ABC$  是直角三角形。

**要点：**

- (1) 勾股定理的逆定理的作用是判定某一个三角形是否是直角三角形。
- (2) 勾股定理的逆定理是把“数”转为“形”，是通过计算来判定一个三角形是否为直角三角形。

## 二、如何判定一个三角形是否是直角三角形

1. 首先确定最大边 (如  $c$ )。

2. 验证  $c^2$  与  $a^2 + b^2$  是否具有相等关系. 若  $c^2 = a^2 + b^2$ , 则  $\triangle ABC$  是  $\angle C = 90^\circ$  的直角三角形; 若  $c^2 \neq a^2 + b^2$ , 则  $\triangle ABC$  不是直角三角形。

**要点：** 当  $a^2 + b^2 < c^2$  时, 此三角形为钝角三角形; 当  $a^2 + b^2 > c^2$  时, 此三角形为锐角三角形, 其中  $c$  为三角形的最大边。

## 三、勾股数

我们已经知道,  $3^2 + 4^2 = 5^2$ ,  $8^2 + 15^2 = 17^2$ , 如果正整数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  满足  $a^2 + b^2 = c^2$ , 那么  $a$ 、 $b$ 、 $c$  称为一组勾股数. 以勾股数中的三个数为三边长的三角形一定是直角三角形。

**要点：**

- (1) 熟悉下列勾股数, 对解题会很有帮助:
  - 3、4、5; ② 5、12、13; ③ 8、15、17; ④ 7、24、25; ⑤ 9、40、41.....
- (2) 如果  $(a, b, c)$  是勾股数, 当  $t$  为正整数时, 以  $at$ 、 $bt$ 、 $ct$  为三角形的三边长, 此三角形必为直角三角形。
- (3)  $n^2 - 1, 2n, n^2 + 1$  ( $n > 1, n$  是自然数) 是直角三角形的三条边长;
- (4)  $2n^2 + 2n, 2n + 1, 2n^2 + 2n + 1$  ( $n$  是自然数) 是直角三角形的三条边长;
- (5)  $m^2 - n^2, m^2 + n^2, 2mn$  ( $m > n, m, n$  是自然数) 是直角三角形的三条边长。

### 【即学即练】

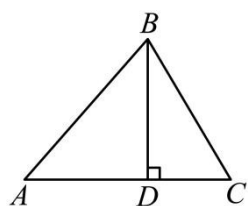
1. 下列各组数中，是勾股数的是 ( )

- A. 9, 16, 25      B.  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2}$ , 2      C. 1.5, 2, 2.5      D. 5, 12, 13

2. 已知三角形三边长为  $a, b, c$ ，如果  $\sqrt{a-6} + |b-8| + (c-10)^2 = 0$ ，那么  $\triangle ABC$  是 ( )

- A. 以  $a$  为腰的等腰三角形      B. 以  $b$  为斜边的直角三角形  
C. 以  $c$  为斜边的直角三角形      D. 以  $c$  为底的等腰三角形

3. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB = AC$ ， $BD$  为  $AC$  边上的高， $BD = 4, CD = 2$ ，则  $AD$  的长度是\_\_\_\_\_.



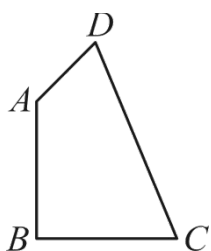
4. 已知  $m, n$  为正整数，且  $m > n$ ，下列各项为三角形的三条边长：①  $n, \sqrt{2}n, \sqrt{3}n$ ，②

$2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1$ ，③  $m^2+n^2, m^2-n^2, 2mn$ ，④  $mn-1, \sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}, m+n$ ，其中必定构成直角

三角形的有 ( )

- A. 1个      B. 2个      C. 3个      D. 4个

5. 如图，在四边形  $ABCD$  中， $AB = BC = 2\text{cm}$ ， $CD = 3\text{cm}$ ， $AD = 1\text{cm}$ ， $\angle B = 90^\circ$ ，四边形  $ABCD$  的面积是\_\_\_\_\_.



### 题型精讲

#### 题型 01 用勾股定理解三角形

【典例 1】. 在  $Rt\triangle ABC$  中， $\angle A = 90^\circ$ ， $b = 6$ ， $c = 10$ ，则  $a$  的值是 ( )

- A. 8      B. 6      C. 10      D.  $2\sqrt{34}$

【变式1】. 一个直角三角形的一条直角边是<sup>6</sup>，斜边长<sup>10</sup>，另一条直角边是( )

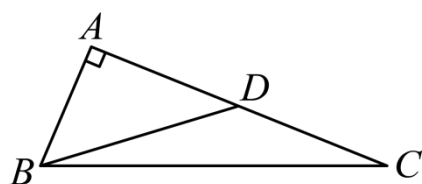
- A . 6                      B . 8                      C . 10                      D . 12

【变式2】. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC=3$ ， $AC=4$ ，则 $AB$ 的长是( ) .

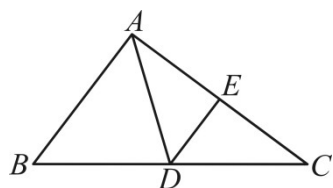
- A . 5                      B .  $\sqrt{7}$                       C . 5 或  $\sqrt{7}$                       D . 无法确定

## 题型 02 用勾股定理解三角形II

【典例1】. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB \perp AC$ ， $AB=5$ ， $AD=6$ ， $BD$ 是边 $AC$ 上的中线，则 $BC$ 的长为\_\_\_\_\_ .

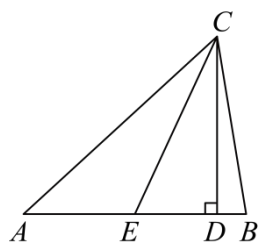


【变式1】. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ，点 $D$ 、 $E$ 分别为 $BC$ 、 $AC$ 中点，若 $AE=4$ ， $BD=5$ ，则 $AB$ 的长为( )



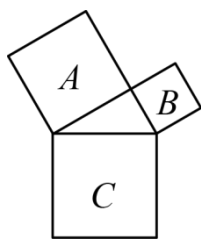
- A . 9                      B . 7                      C . 6                      D . 8

【变式2】. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $CE$ 是 $AB$ 边的中线， $CD \perp AB$ 于点 $D$ ，若 $AB=5$ ， $BC=4$ ， $AC=6$ ，则 $DE$ 的长是\_\_\_\_\_ .

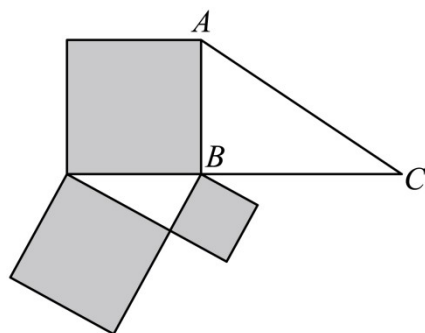


## 题型 03 勾股树

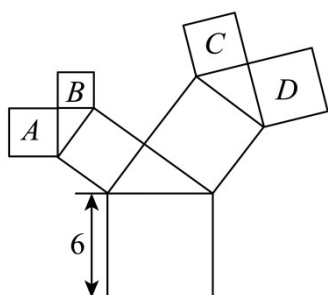
【典例1】. 如图是一株美丽的勾股树，图中所有四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形，若正方形 $A$ ， $B$ 的面积分别为<sup>5</sup>，<sup>3</sup>，则正方形 $C$ 的面积是\_\_\_\_\_ .



**【变式1】** . 如图，是由两个直角三角形和三个正方形组成的图形，已知  $AC = 8$ ， $BC = 6$ ，其中阴影部分的面积是



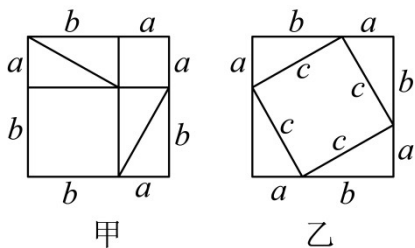
**【变式2】** . 如图，图中所有三角形都是直角三角形，所有四边形都是正方形，已知最大的正方形的边长为6，则  $A, B, C, D$  四个正方形的面积之和为\_\_\_\_\_.



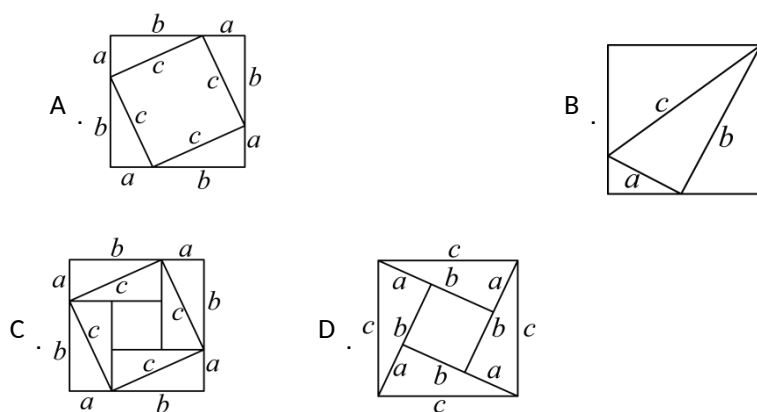
#### 题型 04 勾股定理的证明

**【典例1】** . 在证明勾股定理时，甲乙两位同学给出了下图所示的两种方案，则方案正确的是\_\_\_\_\_.

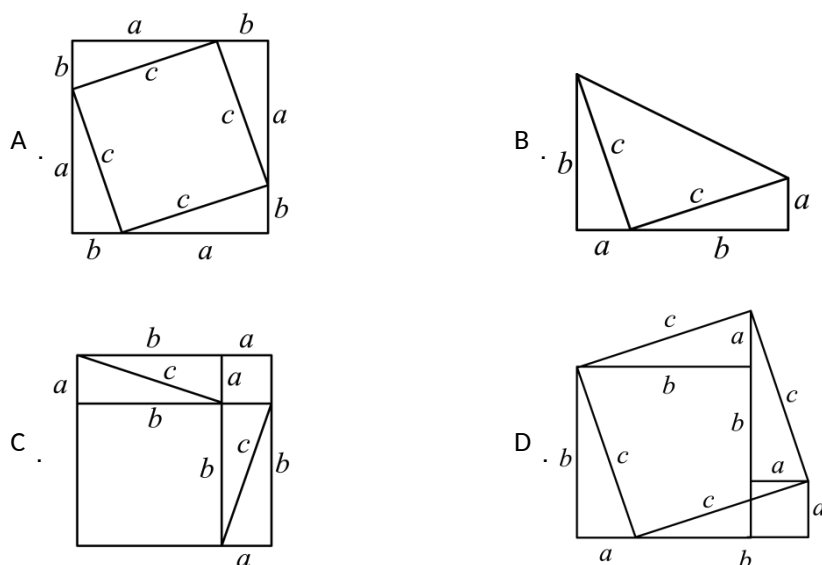
( 填“甲”或“乙” )



**【变式1】** . 下列选项中 ( 图中三角形都是直角三角形 )，不能用来验证勾股定理的是 ( )

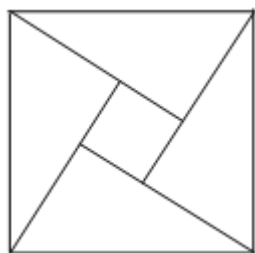


**【变式2】** . 我国是最早了解勾股定理的国家之一，根据《周髀算经》的记载，勾股定理的公式与证明是在周朝由商高发现的，故又称之为“商高定理”. 下面四幅图中，不能证明勾股定理的是 ( )



### 题型 05 与弦图有关的计算

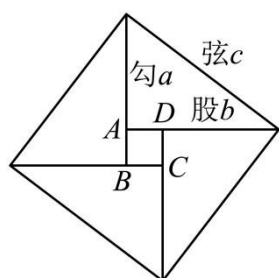
**【典例1】** . 如图，“赵爽弦图”是用 4 个全等的直角三角形与 1 个小正方形镶嵌而成的正方形图案. 若“弦图”中的大正方形的面积为  $81$ ，小正方形的面积为  $9$ . 则一个直角三角形的面积为 ( )



- A . 18                      B . 24                      C . 36                      D . 72

**【变式1】** . 中国古代数学家赵爽注《周髀算经》时，创造了“赵爽弦图”. 如图，设勾  $a=6$ ，弦  $c=10$ ，

则小正方形  $ABCD$  的面积是 ( )



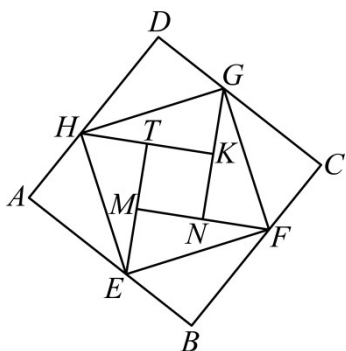
A . 3

B . 4

C . 6

D . 9

**【变式2】** . 我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”，后人称其为“赵爽弦图”，它是用八个全等的直角三角形拼接而成，记图中正方形  $ABCD$ ，正方形  $EFGH$ ，正方形  $MNKT$  的面积分别为  $S_1$ ， $S_2$ ， $S_3$  . 若  $S_1 + S_2 + S_3 = 39$ ，则  $S_2$  的值是\_\_\_\_\_；



### 题型 06 利用勾股定理求解平方关系

**【典例1】** . 设  $P$  为等腰直角  $\triangle ABC$  斜边  $AB$  上或其延长线上一点， $S = AP^2 + BP^2$ ，那么 ( )

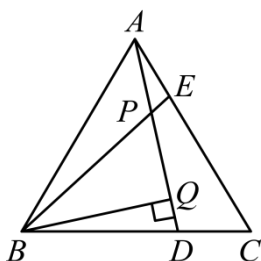
A .  $S < 2CP^2$

B .  $S = 2CP^2$

C .  $S > 2CP^2$

D . 不确定

**【变式1】** . 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB = BC = AC$ ， $AE = CD$ ， $AD$  与  $BE$  相交于点  $P$ ， $BQ \perp AD$  于  $Q$  . 则  $BP$  与  $BQ$  的关系为 ( )



A .  $BP^2 = 2BQ^2$

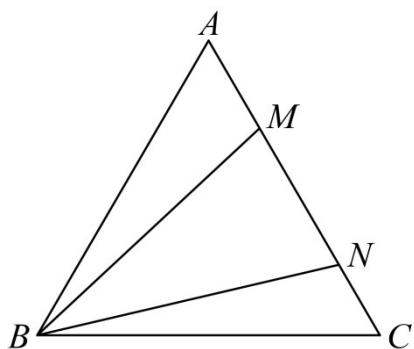
B .  $3BP^2 = 4BQ^2$

C .  $4BP^2 = 3BQ^2$

D .  $2BP^2 = 3BQ^2$

**【变式2】** . 如图，在等边三角形  $ABC$  中，在  $AC$  边上 ( 不包含  $A$ 、 $C$  ) 取两点  $M$ 、 $N$ ，使  $\angle MBN = 30^\circ$ ，

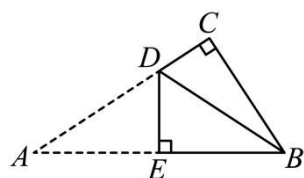
若  $AM = m, MN = x, CN = n$ ，则  $x, m, n$  满足的数量关系为 ( )



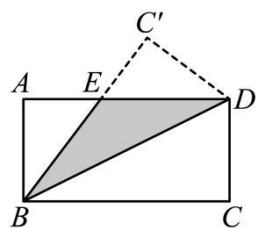
- A.  $m^2 + n^2 > x^2$     B.  $m^2 + n^2 = x^2$     C.  $m^2 + n^2 < x^2$     D.  $m + n = x$

### 题型 07 折叠问题

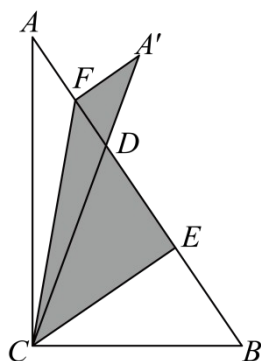
**【典例 1】** 如图，在  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ，将  $\triangle ADE$  沿  $DE$  翻折与  $\triangle BDE$  重合，若  $AC = 6, BC = 3$ ，则  $CD$  的长为 \_\_\_\_\_。



**【变式 1】** 如图，把长方形  $ABCD$  沿直线  $BD$  向上折叠，使点  $C$  落在  $C'$  的位置上，已知  $AB = 3, BC = 6$ ，则  $AE =$  \_\_\_\_\_。



**【变式 2】** 如图， $\text{Rt}\triangle ABC, \angle ACB = 90^\circ, AC = 4, BC = 3$ ，将边  $BC$  沿  $CE$  翻折，使点  $B$  落在  $AB$  上的点  $D$  处，再将边  $AC$  沿  $CF$  翻折，使点  $A$  落在  $CD$  的延长线上的点  $A'$  处，两条折痕与斜边  $AB$  分别交于点  $E, F$ ，则线段  $A'F$  的长为 \_\_\_\_\_。



### 题型 08 勾股数

【典例 1】. 下列各组数中，是勾股数的是（ ）.

- A . 0.3, 0.4, 0.5      B .  $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$       C . 6, 8, 10      D . 1.5, 2, 2.5

【变式 1】. 已知  $m, n$  为正整数，且  $m > n$ ，下列各项为三角形的三条边长：①  $n, \sqrt{2}n, \sqrt{3}n$ ，②

$2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1$ ，③  $m^2+n^2, m^2-n^2, 2mn$ ，④  $mn-1, \sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}, m+n$ ，其中必定构成直角

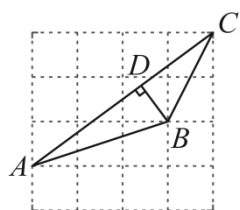
三角形的有（ ）

- A . 1 个      B . 2 个      C . 3 个      D . 4 个

### 题型 09 网格问题；格点直角三角形的个数

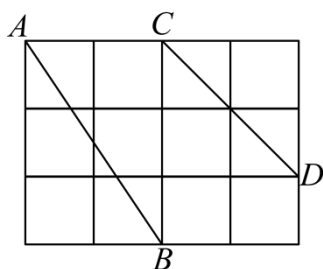
【典例 1】. 在如图所示的网格中，每个小正方形的边长均为 1， $\triangle ABC$  各顶点均在网格的格点上，

$BD \perp AC$  于点  $D$ ，则  $BD$  的长为\_\_\_\_\_.

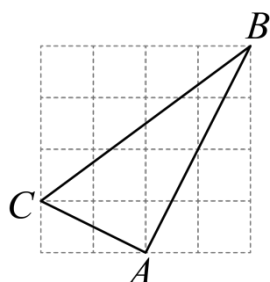


【变式 1】. 图中每个小方格的边长是 1，若线段  $EF$  能与线段  $AB$ 、 $CD$  组成一个直角三角形，线段  $EF$  的

长度是\_\_\_\_\_.

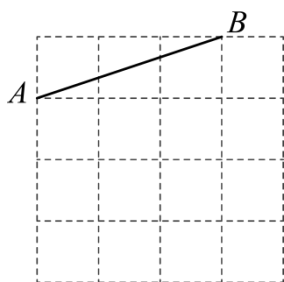


**【变式2】** . 在如图所示的网格中，每个小正方形的边长为1， $A$ ， $B$ ， $C$ 三点均在正方形格点上，则下列结论错误的是（ ）



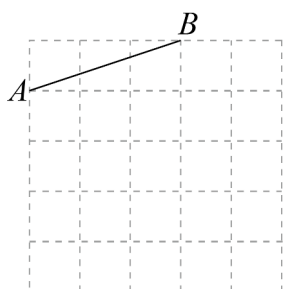
- A .  $AB = 2\sqrt{5}$                       B .  $\angle BAC = 90^\circ$   
C .  $S_{\triangle ABC} = 10$                       D . 点A到直线BC的距离是2

**【变式3】** . 如图，在 $4 \times 4$ 方格中作以 $AB$ 为一边的 $\text{Rt}\triangle ABC$ ，要求点 $C$ 也在格点上，这样的 $\text{Rt}\triangle ABC$ 能作出（ ）



- A . 2个                      B . 4个                      C . 6个                      D . 7个

**【变式4】** . 在如图所示的 $5 \times 5$ 的方格图中，点 $A$ 和点 $B$ 均为图中格点．点 $C$ 也在格点上，满足 $\triangle ABC$ 为以 $AB$ 为斜边的直角三角形．这样的点 $C$ 有（ ）



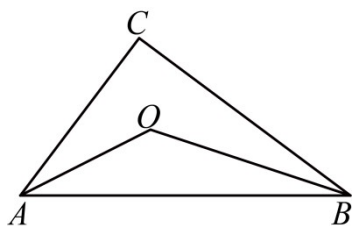
- A . 1个                      B . 2个                      C . 3个                      D . 4个

### 题型10 勾股定理逆定理的几何应用

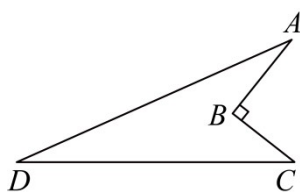
**【典例1】** . 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 36^\circ$ ， $BC^2 - AC^2 = AB^2$ ，则 $\angle C$ 的大小为（ ）

- A .  $36^\circ$                       B .  $54^\circ$                       C .  $72^\circ$                       D .  $90^\circ$

**【变式1】** .  $\triangle ABC$  中,  $O$  是两内角平分线的交点,  $AC = 6$ ,  $BC = 8$ ,  $BA = 10$ ,  $O$  到  $AB$  的距离是\_\_\_\_\_.

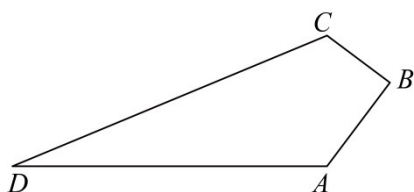


**【变式2】** . 一块木板如图所示, 已知  $AB = 8$ ,  $BC = 6$ ,  $DC = 24$ ,  $AD = 26$ ,  $\angle B = 90^\circ$ , 则木板的面积为 ( )



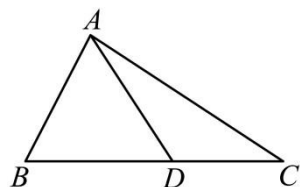
A . 60                      B . 20                      C . 96                      D . 48

**【变式3】** . 如图, 已知四边形  $ABCD$  中,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = 3$ ,  $AD = 12$ ,  $CD = 13$ , 则四边形  $ABCD$  的面积为\_\_\_\_\_.

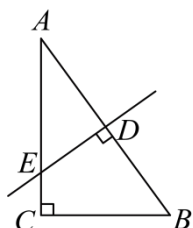


## 题型 11 解答题

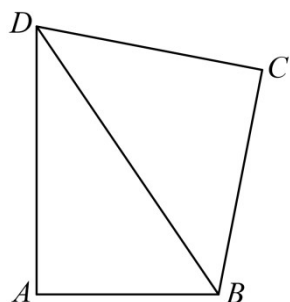
**【典例1】** . 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $AB = 13$ ,  $AD = 15$ ,  $CD = 12$ ,  $S_{\triangle ADC} = 72$ , 求  $BD$  的长.



**【变式1】** . 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB$  的垂直平分线分别交  $AB, AC$  于点  $D, E$ . 若  $AC = 12, BC = 9$ , 求  $AE$  的长.



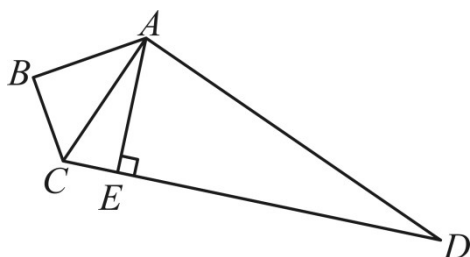
**【变式2】** . 如图，在四边形  $ABCD$  中， $AB=1, AD=\sqrt{3}, BD=2, \angle A + \angle C = 180^\circ, CD=\sqrt{2}$  .



(1) 判断  $\triangle ABD$  的形状，并说明理由；

(2) 求  $BC$  的长 .

**【变式3】** . 如图，四边形  $ABCD$  中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AC$  为对角线， $AE \perp CD$  于点  $E$ ，已知  $AB=8$ ， $BC=6$ ， $CD=26$ ， $AD=24$  .



(1) 请判断  $\triangle ACD$  的形状并说明理由；

(2) 求线段  $AE$  的长 .

## 强化训练

### 一、单选题

1. 已知一个直角三角形的两边长分别为 3 和 4，则第三边长是 ( )

- A. 5                      B. 25                      C.  $\sqrt{7}$                       D. 5 或  $\sqrt{7}$

2. 在  $Rt\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $a, b, c$  分别为  $\angle A, \angle B, \angle C$  的对边，若  $a=12$ ， $b=16$ ，则  $c$  为 ( )

- A. 26                      B. 18                      C. 20                      D. 21

3. 下列说法正确的是 ( )

- A. 若  $a, b, c$  是  $\triangle ABC$  的三边，则  $a^2 + b^2 = c^2$   
 B. 若  $a, b, c$  是  $Rt\triangle ABC$  的三边，则  $a^2 + b^2 = c^2$

C. 若  $a, b, c$  是  $Rt\triangle ABC$  的三边,  $\angle A = 90^\circ$ , 则  $a^2 + b^2 = c^2$

D. 若  $a, b, c$  是  $Rt\triangle ABC$  的三边,  $\angle C = 90^\circ$ , 则  $a^2 + b^2 = c^2$

4. 下面四组数中是勾股数的有 ( )

①  $3, 4, \sqrt{7}$ ; ②  $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2$ ; ③  $12, 16, 20$ ; ④  $0.5, 1.2, 1.3$ .

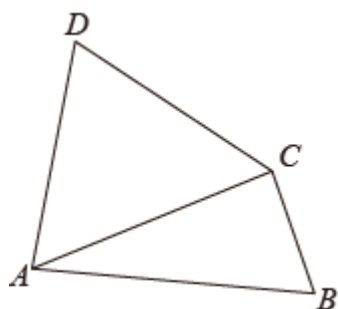
A. 1 组

B. 2 组

C. 3 组

D. 4 组

5. 如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $AD \perp AB$ ,  $AC \perp BC$ , 且  $AD = CD = AB = 2$ , 则  $BC$  为 ( )



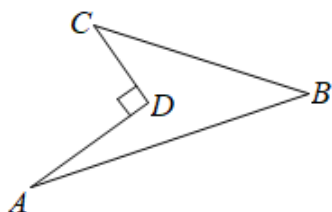
A. 1

B.  $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

6. 如图所示的一块地, 已知  $\angle ADC = 90^\circ$ ,  $AD = 12\text{m}$ ,  $CD = 9\text{m}$ ,  $AB = 25\text{m}$ ,  $BC = 20\text{m}$ , 则这块地的面积为 ( )  $\text{m}^2$ .



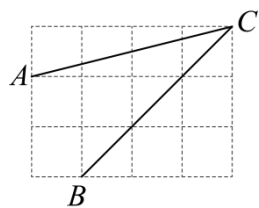
A.  $92\text{m}^2$

B.  $93\text{m}^2$

C.  $96\text{m}^2$

D.  $90\text{m}^2$

7. 如图, 在  $4 \times 3$  的正方形网格中, 点  $A, B, C$  在小正方形的顶点上, 且每个小正方形的边长都是 1, 则线段  $AC$  与线段  $BC$  的大小关系为 ( )

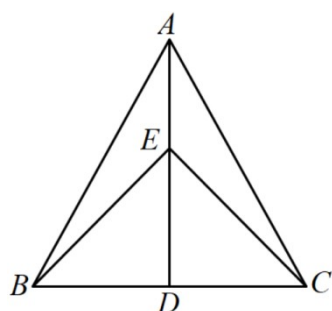


- A.  $AC < BC$       B.  $AC > BC$       C.  $AC = BC$       D. 无法确定

8. 已知  $\triangle ABC$  的三边分别长为  $a, b, c$ ，且满足  $(a-17)^2 + |b-15| + c^2 - 16c + 64 = 0$ ，则  $\triangle ABC$  是 ( )

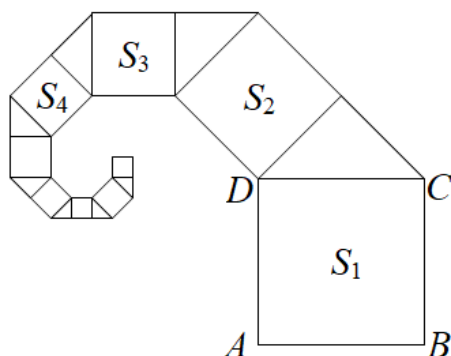
- A. 以  $a$  为斜边的直角三角形      B. 以  $b$  为斜边的直角三角形  
C. 以  $c$  为斜边的直角三角形      D. 不是直角三角形

9. 如图， $\triangle ABC$  中， $AB = AC$ ， $AD$  是  $\angle BAC$  的平分线， $E$  是  $AD$  上一点，连接  $EB, CE$ 。若  $\angle EBD = 45^\circ$ ， $BC = 4$ ，则  $BE$  的长是 ( )



- A.  $2\sqrt{2}$       B. 4      C.  $4\sqrt{2}$       D. 2

10. 如图，正方形  $ABCD$  的边长为 1，其面积为  $S_1$ ，以  $CD$  为斜边作等腰直角三角形，以该等腰直角三角形的一条直角边为边向外作正方形，其面积记为  $S_2$ ...，按此规律继续下去，则  $S_{100}$  的值为 ( )



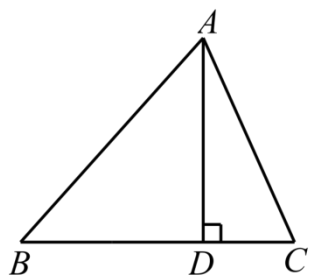
- A.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{99}$       B.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}$       C.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$       D.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

## 二、填空题

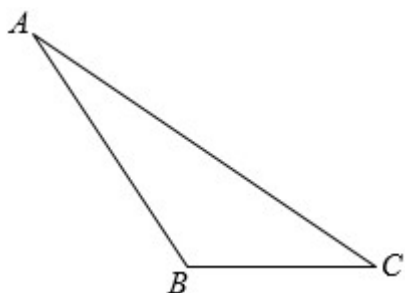
11. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ，若  $BC = 5$ ， $AB = 13$ ，则  $AC =$ \_\_\_\_\_.

12.  $\triangle ABC$  的三边为  $a, b, c$ ，若满足  $b^2 = a^2 + c^2$ ，则\_\_\_\_\_ =  $90^\circ$ ；若满足  $b^2 > a^2 + c^2$ ，则  $\angle B$  是\_\_\_\_角；若满足  $b^2 < a^2 + c^2$ ，则  $\angle B$  是\_\_\_\_角.

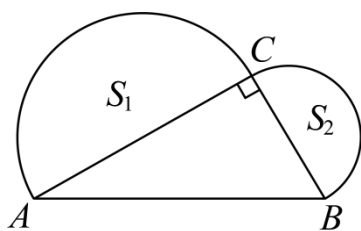
13. 如图  $\triangle ABC$  中,  $AD \perp BC$ , 垂足为  $D$ , 若  $AB=3$ ,  $BC=3$ ,  $DC=1$ , 则  $AC$  的长是\_\_\_\_\_.



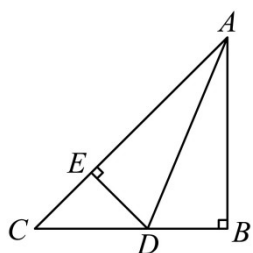
14. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB=10$ ,  $BC=9$ ,  $AC=17$ , 则  $BC$  边上的高为\_\_\_\_\_.



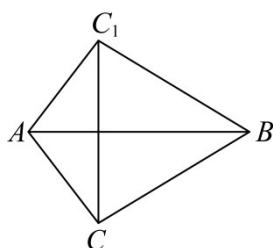
15. 如图所示, 已知在  $Rt\triangle ABC$  中,  $AB=4$ , 分别以  $AC$ ,  $BC$  为直径作半圆, 面积分别记为  $S_1, S_2$ , 则  $S_1+S_2$  的值等于\_\_\_\_\_.



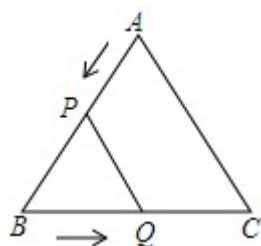
16. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle B=90^\circ$ ,  $AB=BC$ ,  $AD$  平分  $\angle BAC$ ,  $DE \perp AC$ ,  $AC=20$ , 则  $\triangle CED$  的周长\_\_\_\_\_.



17. 如图, 将三边长分别为 3, 4, 5 的  $\triangle ABC$  沿最长边  $AB$  翻转  $180^\circ$  成  $\triangle ABC_1$ , 则  $CC_1$  的长=\_\_\_\_\_.

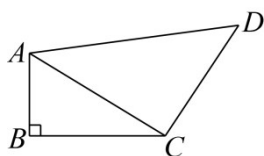


18. 如图， $\triangle ABC$  是边长 6cm 的等边三角形，动点 P、Q 同时从 A、B 两点出发，分别在 AB、BC 边上均速移动，它们的速度分别为  $V_P=2\text{cm/s}$ ， $V_Q=1\text{cm/s}$ ，当点 P 到达点 B 时，P、Q 两点停止运动，设点 P 的运动时间为  $t\text{s}$ ，则当  $t=\underline{\hspace{1cm}}\text{s}$  时， $\triangle PBQ$  为直角三角形。

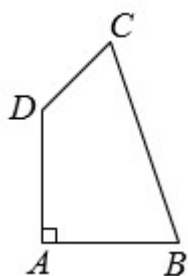


### 三、解答题

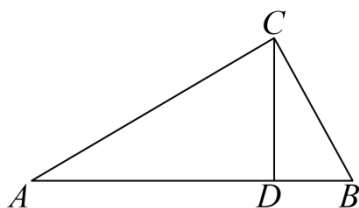
19. 如图，在四边形 ABCD 中， $AB=1$ ， $BC=2$ ， $CD=2$ ， $AD=3$ ，且  $AB \perp BC$ 。求  $\angle ACD$  的度数。



20. 如图，四边形 ABCD 中， $DA \perp AB$ ， $DA=AB=\sqrt{2}$ ， $BC=\sqrt{5}$ ， $DC=1$ 。则  $\angle ADC$  的度数是多少度？  
说明理由。



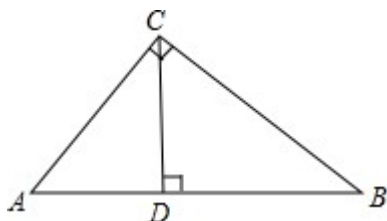
21. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB=4$ ， $BC=2$ ， $BD=1$ ， $CD=\sqrt{3}$ 。判断下列结论是否正确，并说明理由。



(1)  $CD \perp AB$  .

(2)  $AC \perp BC$  .

22 . 如图，在  $Rt\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 9\text{cm}$ ， $BC = 12\text{cm}$ ， $CD \perp AB$  于  $D$  .

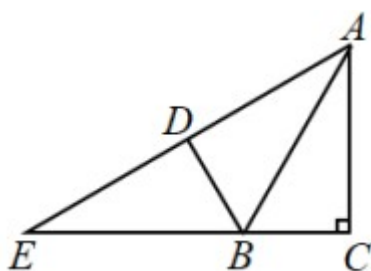


求：(1) 斜边  $AB$  的长；

(2) 高  $CD$  的长 .

23 . 如图， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $AC = 2\sqrt{3}$ ， $BC = 2$ ，把  $\triangle ABC$  沿  $AB$  折叠，点  $C$  折叠到点  $D$ ，

$AD$  的延长线与射线  $CB$  交于点  $E$  .



(1) 求  $AE$  的长；

(2) 求  $\triangle ABE$  的面积 .

24 . 勾股定理在数学和许多其他领域中都有广泛的应用，勾股定理是一个非常重要的数学定理，它在几何学、三角学、物理学、工程学等多个领域都有重要的应用 . 关于勾股定理的证明方法到现在为止有 500 多种，勾股定理常见的一些证明方法是：几何证明、代数证明、向量证明、复数证明、面积证明等 . 当两个全等的直角三角形按图 1 或图 2 摆放时，都可以用“面积法”来证明，以下是利用图 1 证明勾股定理的完整过程：将两个全等的直角三角形按图 1 所示摆放，其中  $\angle DAB = 90^\circ$ ，求证： $a^2 + b^2 = c^2$

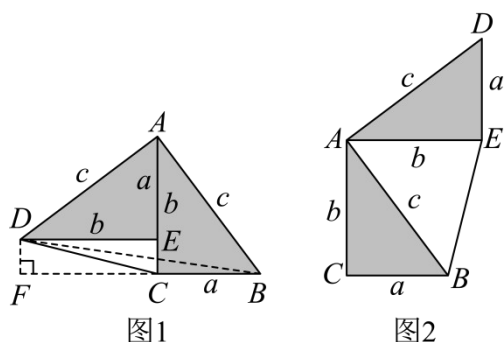


图1

图2

证明：连接  $BD$ ，过点  $D$  作  $DF \perp BC$  交  $BC$  延长线于点  $F$ ，则  $DF = EC = b - a$

$$\because S_{\text{四边形}ADCB} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab$$

$$\text{又} \because S_{\text{四边形}ADCB} = S_{\triangle ADB} + S_{\triangle DCB} = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a(b-a)$$

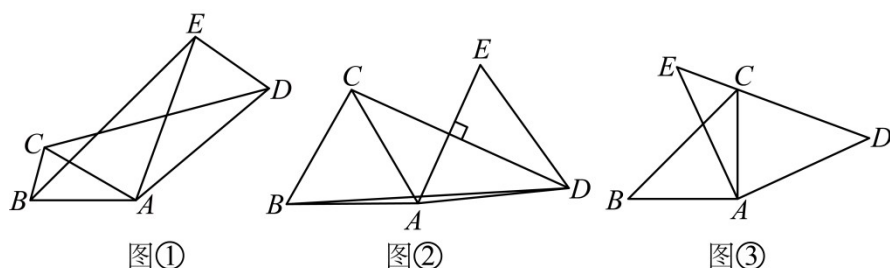
$$\therefore \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a(b-a)$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

请参照上述证明方法，利用图 2 完成下面的证明。

将两个全等的直角三角形按图 2 所示摆放，其中  $\angle DAB = 90^\circ$ ，求证： $a^2 + b^2 = c^2$ 。

25. 如图， $\triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  都是等腰三角形，其中  $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAC = \angle DAE$ 。



图①

图②

图③

(1) 如图①，连接  $BE$ 、 $CD$ ，求证： $BE = CD$ ；

(2) 如图②，连接  $BD$ 、 $CD$ ，若  $\angle BAC = \angle DAE = 60^\circ$ ， $CD \perp AE$ ， $AD = 3$ ， $CD = 5$ ，求  $BD$  的长；

(3) 如图③，若  $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ，且  $C$  点恰好落在  $DE$  上，试探究  $CD$ 、 $CE$  和  $CA$  之间的数量关系，并加以说明。