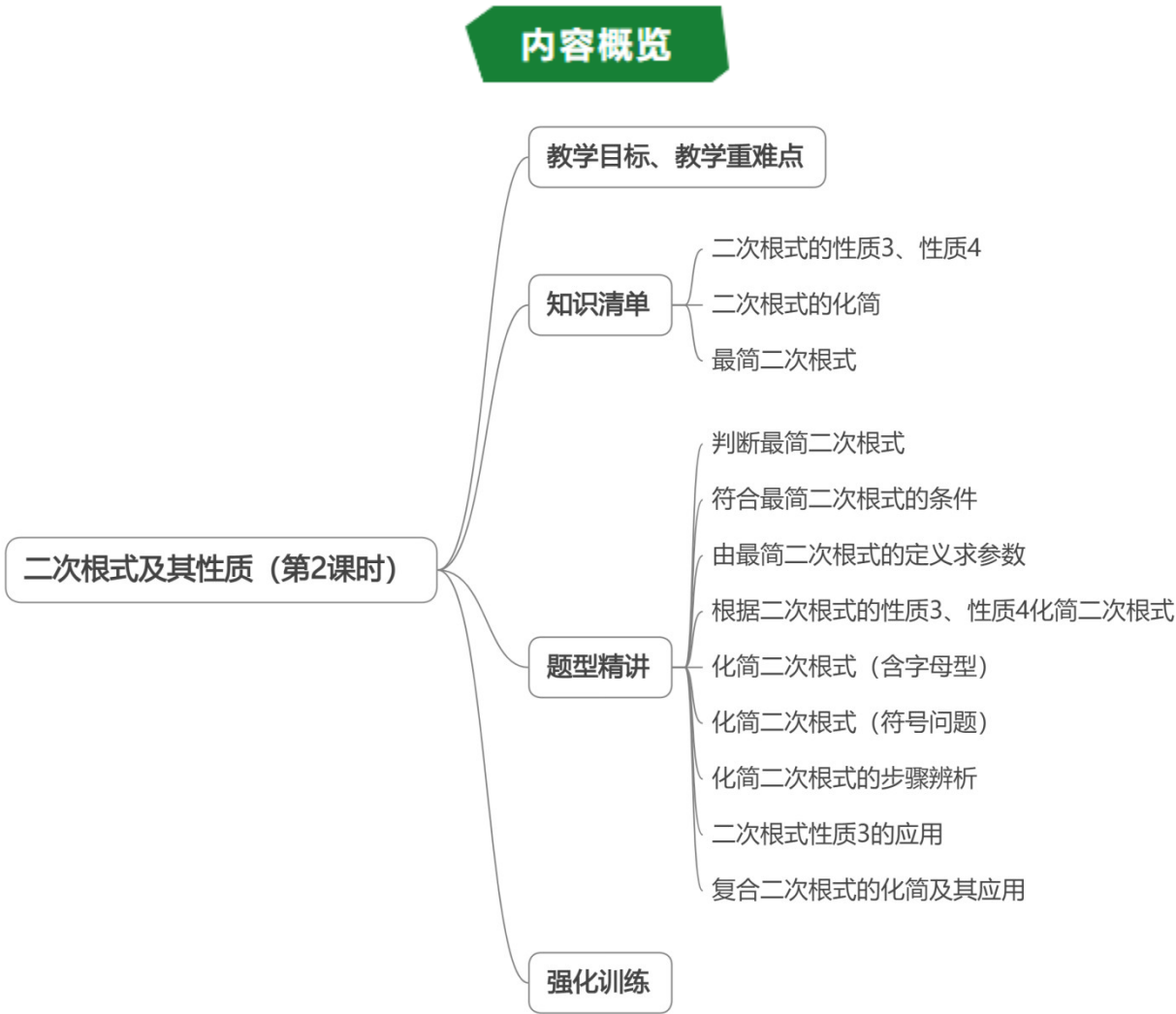


专题 20.2 二次根式及其性质（第 2 课时）



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 理解并掌握二次根式的性质 3、性质 4； 2. 化简二次根式—被开方数所含因式中的完全平方移到根号外； 3. 化简二次根式—化去被开方数中的分母； 4. 了解二次根式的第二形式； 5. 知道最简二次根式的概念；符合最简二次根式的条件。
教学重难点	1.重点 (1) 进一步探究二次根式的性质—性质 3 与性质 4； (2) 二次根式性质在化简二次根式的应用；

	(3) 会判断最简二次根式。 2. 难点 (1) 二次根式的化简，尤其是含字母型，符号问题等； (2) 复合二次根式的化简及应用； (3) 二次根式性质的综合应用。
--	---

知识清单

知识点 1 二次根式的性质 3、性质 4

问题： $\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 相等吗？ $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 与 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 相等吗？为什么？

分析：当 $a \geq 0, b \geq 0$ 时，根据积的乘方的性质， $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$,

根据算术平方根的意义，得 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 。

当 $a \geq 0, b > 0$ 时，也可以推出 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

我们把这两个结论也作为二次根式的性质：

性质 3 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ($a \geq 0, b \geq 0$).

性质 4 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($a \geq 0, b > 0$).

【即学即练】

1. 化简：

(1) $\sqrt{75}$ ；

(2) $\sqrt{9x^3} (x \geq 0)$ ；

(3) $\sqrt{72a^4b^3} (a \geq 0, b \geq 0)$ ；

(4) $\sqrt{49^2 - 32^2}$.

2. 下列计算错误的是 ()

A. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

B. $\sqrt{\frac{27}{64}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

C. $\sqrt{4\frac{2}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

D. $\sqrt{4 \times \frac{2}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

3. 能使等式 $\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $x \neq 2$

B. $x \geq 0$

C. $x > 2$

D. $x \geq 2$

知识点 2 二次根式的化简

1. 被开方数所含因式中的完全平方式移到根号外

一般地，根据性质 3, 设 $a \geq 0$, 那么

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^2} = |b| \sqrt{a}.$$

这说明，如果二次根式里被开方数是几个因式的积，其中有的因式是完全平方式，那么这样的因式可用它的算术平方根代替后移到根号外面。

完全平方式：形如 A^2 (A 为整式) 的代数式称为完全平方式，如 b^2 、 $(a+b)^2$ 。

2. 化去被开方数中的分母

根据性质 4, 设 $\frac{a}{b} \geq 0$, 那么

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a \cdot b}{b \cdot b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{|b|}$$

这说明，如果二次根式里被开方数含有分母，那么可以将分子和分母同乘一个代数式，使分母变为完全平方式，再将分母用它的算术平方根代替后移到根号外面作为新的分母，从而化去被开方数中的分母。

3. 化简二次根式：把二次根式里被开方数所含因式中的完全平方式移到根号外，或者化去把二次根式里被开方数所含因式中的完全平方式移到根号外，或者化去被开方数的分母的过程，称为“化简二次根式”。

4.二次根式的第二形式：为了方便，我们常把形如 $b\sqrt{a}$ (其中 a 、 b 为有理式)的代数式也称为二次根式，如

$$3\sqrt{2}、\frac{\sqrt{6}}{4}、-\sqrt{3} \text{ 等.}$$

【即学即练】

1. 化去下列各式根号内的分母：

$$(1) \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$(2) \sqrt{1\frac{1}{7}}$$

$$(3) 3\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$(4) \sqrt{\frac{b}{2a}} (a > 0, b \geq 0)$$

2. 化简：

$$(1) \sqrt{300}$$

$$(2) \sqrt{15 \times (-2)^2 \times 5}$$

$$(3) \sqrt{4ab^2} (a \geq 0, b \geq 0)$$

$$(4) \sqrt{a^3 + 2a^2} (a \geq 0)$$

$$(5) \sqrt{9a^2b^3} (a < 0, b \geq 0)$$

$$(6) \sqrt{4n^2 - 8n + 4} (n > 1)$$

3. 化去根号内的分母：

$$(1) \sqrt{\frac{1}{50}}$$

$$(2) \sqrt{4\frac{4}{9}}$$

$$(3) \sqrt{\frac{3}{8x}} (x > 0)$$

$$(4) \sqrt{\frac{0.04}{0.28 \times 121}}.$$

4. 将 $x\sqrt{-\frac{6}{x}}$ 根号外的因式移到根号内得_____.

知识点3 最简二次根式

观察下列二次根式 $6\sqrt{2}$ 、 $2a\sqrt{3a}$ 、 $\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 等，其被开方数有什么共同特点？

由以上观察，可以发现：

(1) 被开方数中各因式的指数都为 1；

(2) 被开方数不含分母.

说明：被开方数中的因式是指因式分解和素因数分解后的因式和因数.

我们把满足上述两个条件的二次根式，叫作**最简二次根式**.

在二次根式的运算中，一般要把结果化成最简二次根式.

【即学即练】

1. 下列代数式中，是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{a^2b}$ B. $\sqrt[3]{2}$ C. $\sqrt{a^2-b^2}$ D. $\sqrt{0.7}$

2. 下列式子中，属于最简二次根式的是 () .

A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{0.2}$ D. $\sqrt{12}$

3. 下列二次根式中，是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{\frac{x}{2}}$ B. $\sqrt{8}$ C. $\sqrt{a^2+4}$ D. $\sqrt{3a^3b}$

题型精讲

题型 01 判断最简二次根式

【典例 1】. 下列根式中，是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{\frac{1}{6}}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{20}$

【变式 1】 . 在 $\sqrt{2}$, $\sqrt{0.1}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2b}$ 中最简二次根式有_____个 .

【变式 2】 . 在 $\sqrt{0.2}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{a}{2}}$, $\sqrt{a^2b}$ 中, 最简二次根式有_____个 .

题型 02 符合最简二次根式的条件

【典例 1】 . 二次根式 $\sqrt{\frac{7a}{3}}$ 因为不符合最简二次根式的条件：_____，所以它不是最简二次根式 .

【变式 1】 . 二次根式 $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$ 因为不符合最简二次根式的条件：_____，
所以它不是最简二次根式 .

题型 03 由最简二次根式的定义求参数

【典例 1】 . 若 $\sqrt{a^{2n+3}b^{3m+1}}$ 是最简二次根式，则 m, n 的值为 ()

- A . 0 , -1 B . -1 , 0 C . 1 , -1 D . 0 , 0

【变式 1】 . 已知 $\sqrt{2a+2}$ 是最简二次根式，请你写出一个符合条件的正整数 a 的值_____ .

【变式 2】 . 若 $\sqrt{2^{m+3}}$ 和 $\sqrt{3^{2m-n+1}}$ 都是最简二次根式，则 $m+n =$ _____ .

题型 04 根据二次根式的性质 3、性质 4 化简二次根式

【典例 1】 . 化简：

$$(1) \sqrt{9 \times 49} ; \quad (2) \sqrt{16 \times 7} ; \quad (3) \sqrt{\frac{12}{25}} ; \quad (4) \sqrt{27} ;$$

$$(5) \sqrt{18} ; \quad (6) \sqrt{\frac{3}{13}} ; \quad (7) \sqrt{\frac{9}{50}} ; \quad (8) \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

【变式 1】 . 把下列二次根式化成最简二次根式：

$$(1) \sqrt{20}$$

$$(2) \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

题型 05 化简二次根式 (含字母型)

【典例 1】 . 化简： $\sqrt{24x^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【变式 1】 . 把下列二次根式化为最简二次根式：

(1) $\sqrt{3.5}$;

(2) $\sqrt{4\frac{1}{16}}$;

(3) $\sqrt{\frac{27}{3x}}$.

【变式 2】 . 化去分母中的根号：

(1) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$

(2) $\frac{\sqrt{27}}{2\sqrt{12}}$

(3) $\frac{a}{\sqrt{2a}} (a > 0)$

(4) $\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{2b^3}} (a \geq 0, b > 0)$.

题型 06 化简二次根式 (符号问题)

【典例 1】 . 当 $a < 0$ 时，化简： $\sqrt{\frac{a^2b}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【变式 1】 . 化简：

(1) $\sqrt{16 \times 49}$;

(2) $\sqrt{(-144) \times (-9)}$;

(3) $\sqrt{50a} (a \geq 0)$;

(4) $\sqrt{(-3)^2 a^3 b^2} (a \geq 0, b \geq 0)$.

【变式 2】 . 化简： $\sqrt{-a^3} + \sqrt{a^2}$.

【变式 3】 . 将下列二次根式化成最简二次根式：

(1) $\sqrt{12}$;

$$(2) \sqrt{4x^3y^2} (y > 0) ;$$

$$(3) \sqrt{27a^3b^2c^5} (a < 0, b < 0, c < 0) .$$

【变式 4】 . 已知 $a < 0$, 则化简 $\sqrt{-a^3b}$ 的结果是 ()

A . $-a\sqrt{-ab}$

B . $a\sqrt{-ab}$

C . $-a\sqrt{ab}$

D . $a\sqrt{-ab}$

【变式 5】 . 化简： $\frac{2}{3}\sqrt{9xy} + 6y\sqrt{\frac{x}{y}} - 2x\sqrt{\frac{y}{x}}$ (其中 $x < 0$)

【变式 6】 . 将下列式子化成最简二次根式：

$$(1) \sqrt{-a^3} ;$$

$$(2) -a^2\sqrt{-\frac{1}{a}} ;$$

$$(3) -(1-a)\sqrt{-\frac{1}{a-1}} .$$

【变式 7】 . 把 $(m-1)\sqrt{\frac{1}{1-m}}$ 中根号前的 $(m-1)$ 移到根号内得 ()

A . $\sqrt{m-1}$

B . $\sqrt{1-m}$

C . $-\sqrt{m-1}$

D . $-\sqrt{1-m}$

题型 07 化简二次根式的步骤辨析

【典例 1】 . 下面的推导中开始出错的步骤是 ()

$$\text{因为 } 2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{12} , \text{ ①}$$

$$-2\sqrt{3} = \sqrt{(-2)^2 \times 3} = \sqrt{12} , \text{ ②}$$

$$\text{所以 } 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3} . \text{ ③}$$

$$\text{所以 } 2 = -2 . \text{ ④}$$

A . ①

B . ②

C . ③

D . ④

【变式 1】 . 下列各式中，计算正确的是 ()

A . $\sqrt{(-4)(-16)} = \sqrt{-4} \times \sqrt{-16} = (-2) \times (-4) = 8$

B . $\sqrt{16a^2} = 4a$

C. $\sqrt{41^2 - 40^2} = \sqrt{(41+40) \times (41-40)} = 9$

D. $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 = 7$

题型 08 二次根式性质 3 的应用

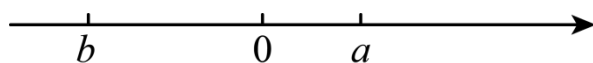
【典例 1】. 若 $\sqrt{12n}$ 是正整数，最小的整数 n 是 ()

- A. 2 B. 3 C. 12 D. 48

【变式 1】. 已知 n 为正整数，若 $\sqrt{84n}$ 是整数，则 n 的最小值为 () .

- A. 4 B. 8 C. 21 D. 84

【变式 2】. 实数 a, b 表示的点在数轴上的位置如图所示，则化简二次根式 $\sqrt{-a^2b^3}$ 的结果是 ()



- A. $ab\sqrt{b}$ B. $-ab\sqrt{b}$ C. $ab\sqrt{-b}$ D. $-ab\sqrt{-b}$

题型 09 复合二次根式的化简及其应用

【典例 1】. 化简 $\sqrt{14-8\sqrt{3}}$ =

【变式 1】. 有这样一类题目：将 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ 化简，如果你能找到两个数 m, n ，使 $m^2 + n^2 = a$ 且 $mn = \sqrt{b}$ ，则可将 $a \pm 2\sqrt{b}$ 将变成 $m^2 + n^2 \pm 2mn$ ，即变成 $(m+n)^2$ ，从而使得 $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ 化简。例如，

$$5 \pm 2\sqrt{6} = 3 + 2 \pm 2\sqrt{6} = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3} \pm \sqrt{2})^2, \therefore \sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})^2} = (\sqrt{3} \pm \sqrt{2}).$$

这种方法叫做配方法，换一种思路，假设化简 $5 \pm 2\sqrt{6}$ 的结果是 $\sqrt{x} \pm \sqrt{y} (x > y > 0)$ ，可知 $5 \pm 2\sqrt{6} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$ 。

整理，得 $5 \pm 2\sqrt{6} = x + y \pm 2\sqrt{xy}$ ，比较等式两边的组成，可得 $x + y = 5$ ， $xy = 6$ ，即 $x = 3$ ， $y = 2$ ，所以

$$\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}} = (\sqrt{3} \pm \sqrt{2}).$$

尝试化简下列各式：

(1) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$;

(2) $\sqrt{8-\sqrt{60}}$.

【变式 2】. 计算 $\sqrt{\sqrt{2025} - \sqrt{2024}}$ 的结果是_____.

【变式3】. 当 $x=4$ 时, $\frac{\sqrt{x-2\sqrt{3}}}{\sqrt{x^2-4\sqrt{3}x+12}} - \frac{\sqrt{x+2\sqrt{3}}}{\sqrt{x^2+4\sqrt{3}x+12}}$ 的值为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

【变式4】. 已知 a, b 为有理数, 且满足等式 $a + \sqrt{3}b = \sqrt{6} \times \sqrt{1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}$, 则 $a + b$ 的值为 ().

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

强化训练

一、单选题

1. 下列式子中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{4}$ D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. 下列化简结果正确的是 () .

- A. $\sqrt{18} = 2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{24} = 4\sqrt{6}$ C. $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ D. $\sqrt{32} = 4\sqrt{8}$

3. 化简 $\sqrt{24a^3b}$ 的结果为 ()

- A. $2a\sqrt{b}$ B. $24\sqrt{a^3b}$ C. $2\sqrt{6a^3b}$ D. $2|a|\sqrt{6ab}$

4. 下列化简过程中, 正确的是 ()

- A. $\sqrt{(-4) \times (-25)} = \sqrt{-4} \times \sqrt{-25} = (-2) \times (-5) = 10$

- B. $\sqrt{9\frac{4}{25}} = \sqrt{9} \times \sqrt{\frac{4}{25}} = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

- C. $\sqrt{27a^4b} (b > 0) = \sqrt{3^2 \times a^4 \times 3b} = 3a^2\sqrt{3b}$

- D. $\sqrt{mn} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$

5. 若 $\sqrt{48n}$ 是整数, 则正整数 n 的最小值是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 下列四个算式, 其中一定成立的是 ()

- ① $\sqrt{(a^2+1)^2} = a^2+1$; ② $\sqrt{a^2} = a$; ③ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ($ab > 0$); ④ $\sqrt{(x+1)(x-1)} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$

- A . ①②③④ B . ①②③ C . ①③ D . ①

7 . 已知 $a < 0$, $b > 0$. 给出下列等式 : ① $\sqrt{a^2b^2} = ab$; ② $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a}{b}$; ③ $\sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{b}$; ④

$\sqrt{a^2b - 2ab^2 + b^3} = (b-a)\sqrt{b}$. 其中 , 正确的是 () .

- A . ①和② B . ③和④ C . ③ D . ④

8 . 当 $x < 0$, $y < 0$ 时 , 在下列各式的计算中 , 正确的是 ()

- A . $\sqrt{x^2y^5} = xy^2\sqrt{xy}$ B . $\sqrt{x^5y^3} = -x^2y\sqrt{xy}$
C . $\sqrt{4x^3y} = 2x\sqrt{-xy}$ D . $\sqrt{-9x^4y} = -3x^2\sqrt{y}$

9 . 化简二次根式 $a\sqrt{-\frac{a+1}{a^2}}$, 结果是 ()

- A . $\sqrt{a+1}$ B . $-\sqrt{a-1}$ C . $-\sqrt{-a-1}$ D . $-\sqrt{-a+1}$

10 . 已知 a 、 b 为有理数 , 且满足 $a+b\sqrt{3} = \sqrt{12-6\sqrt{3}}$, 则 $a-b$ 等于 ()

- A . -2 B . -4 C . 2 D . 4

二、填空题

11 . $\sqrt{12} =$ _____ .

12 . 填空 : $\sqrt{500} =$ _____ ; $\sqrt{2 \times 6 \times 9} =$ _____ .

13 . $\sqrt{\frac{4}{25}} =$ _____ , $\sqrt{9a^2} =$ _____ ($a < 0$) .

14 . 计算 : $\sqrt{\frac{5a^2}{6}} =$ _____ .

15 . 化简 : $\sqrt{\frac{x^3}{3y}} (y > 0) =$ _____ .

16 . 式子 $\sqrt{\frac{x-4}{x-5}} = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-5}}$ 成立的条件是 _____ .

17 . 将 $x\sqrt{-\frac{6}{x}}$ 根号外的因式移到根号内得 _____ .

18. 求值： $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2023^2}+\frac{1}{2024^2}}=$ _____.

三、解答题

19. 判断下列各式中哪些是最简二次根式，哪些不是？为什么？

(1) $\sqrt{3a^2b}$; (2) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; (3) $\sqrt{x^2+y^2}$; (4) $\sqrt{6}$; (5) $\sqrt{\frac{xy^2}{2}}$; (6) $\sqrt{0.21}$.

20. 化简：

(1) $\sqrt{729}$; (2) $\sqrt{\frac{7}{48}}$; (3) $\sqrt{2.5}$; (4) $3\sqrt{\frac{1}{27}}$.

21. 化简：

(1) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{7}}$

(2) $\sqrt{202-152}$

(3) $\sqrt{\frac{32 \times 9}{25}}$

(4) $\sqrt{20.5}$

22. 化简：

(1) $\sqrt{\frac{7}{2}}$; (2) $\sqrt{3\frac{3}{11}}$; (3) $\sqrt{0.625}$; (4) $\sqrt{\frac{9y}{25x^2}}$.

23. 化简

(1) $\sqrt{(-2)^2 a^3 b^2 c^5} (a > 0, b > 0)$

(2) $\sqrt{16ab^2c^3}$

24. 化简：

(1) $\frac{1}{2}\sqrt{12mn^3} (m \geq 0)$;

(2) $\sqrt{-24x^3y^3}$;

(3) $6\sqrt{\frac{y^2}{16x^4}}$.

25. 把下列各式化成最简二次根式：

$$(1) \sqrt{5\frac{4}{9}a^3} ;$$

$$(2) x^2 \sqrt{\frac{2}{x}} ;$$

$$(3) \sqrt{\frac{20x^2y^2}{z^5}} ;$$

$$(4) \sqrt{0.48(a^3b^2 + a^2b^3)} ;$$

$$(5) \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} ;$$

$$(6) \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1}{a} + 1} .$$

26. 像 $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$, $\sqrt{\sqrt{48}-\sqrt{45}}$...这样的根式叫做复合二次根式. 有一些复合二次根式可以借助构造完全平方式进行化简, 如:

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3-2\sqrt{3}+1} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 1 + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1 .$$

$$\text{再如: } \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3+2\sqrt{6}+2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

请用上述方法探索并解决下列问题:

$$(1) \text{化简: } \sqrt{12+2\sqrt{35}} ;$$

$$(2) \text{化简: } \sqrt{17-4\sqrt{15}} ;$$

$$(3) \text{若 } a+6\sqrt{5} = (m+\sqrt{5}n)^2, \text{ 且 } a, m, n \text{ 为正整数, 求 } a \text{ 的值.}$$