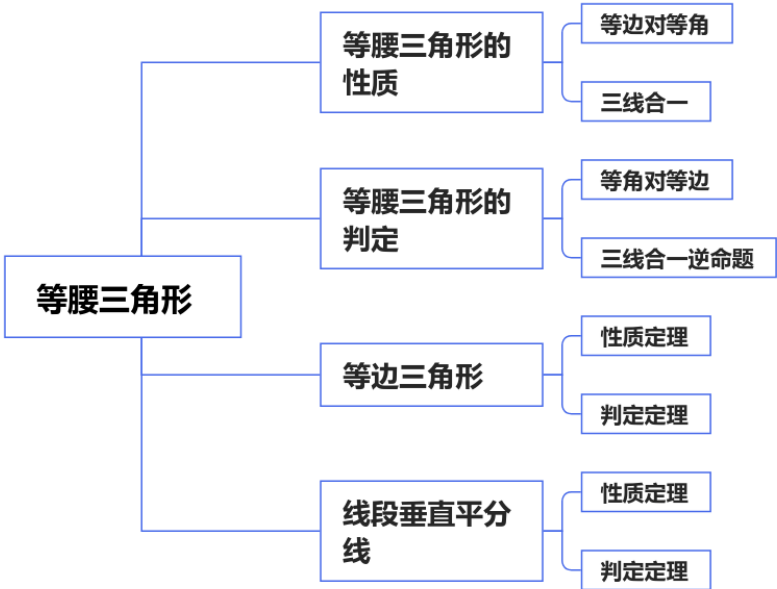


第十八章 等腰三角形单元复习

内容概览



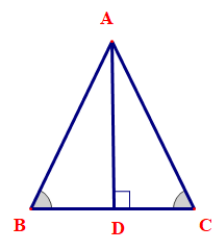
知识清单

知识点 1 等腰三角形的性质

1. 性质定理 1:等腰三角形的两个底角相等(简称“**等边对等角**”)。

几何语言：△ABC 中， $\because AB=AC$ ， $\therefore \angle B=\angle C$

2. 性质定理 2:等腰三角形的顶角平分线、底边上的高、底边上的中线互相重合(简称“**三线合一**”)

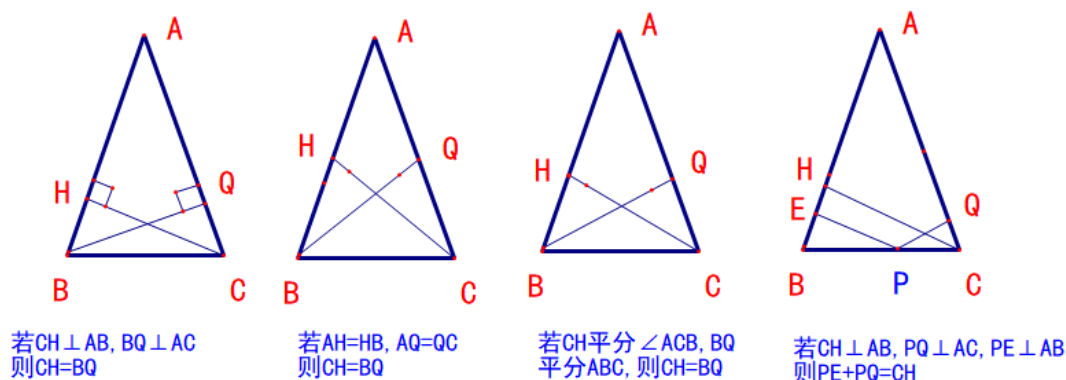


几何语言：△ABC 中， $\because AB=AC$ ， $\angle BAD=\angle CAD$ ， $\therefore AD\perp BC, BD=DC$

3. 拓展：

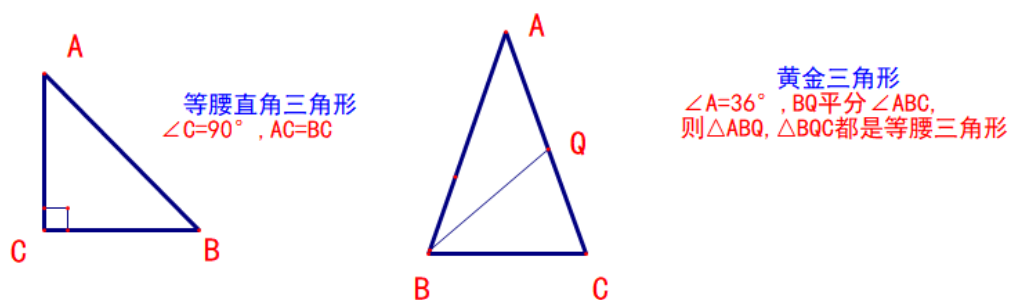
(1) 等腰三角形两腰上的中线、高，两底角的平分线分别相等。

(2) 等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一腰上的高。



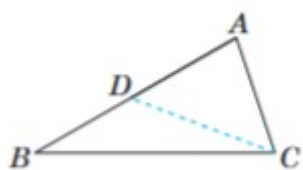
(3) 当等腰三角形的顶角为 90° 时（等腰直角三角形），它的两条直角边相等，两个锐角都是 45° 。

(4) 当等腰三角形的顶角为 36° 时（黄金三角形），等腰三角形底角平分线把三角形分成两个等腰三角形。



(5) 大边对大角，小边对小角，等边对等角，反之也都是真命题。

△ABC 中， $\because AB>AC$ ， $\therefore \angle ACB>\angle ABC$ ； $\because AB<AC$ ， $\therefore \angle ACB<\angle ABC$ ； $\because AB=AC$ ， $\therefore \angle ACB=\angle ABC$ ；



(6) 等腰三角形中角度的关系：顶角 $=180^\circ - \text{底角度数} \times 2$ ；底角度数 $= (180^\circ - \text{顶角度数}) \div 2$

知识点 2 等腰三角形的判定

1. 判定方法

(1) 定义法：有**两边相等**的三角形是等腰三角形；

(2) 判定定理：如果一个三角形有**两个角相等**，那么**这两个角所对的边**也相等。(简写成“**等角对等边**”).

2. 性质和判定的区别

性质和判定是互逆命题；

性质是已知三角形是等腰三角形（有**两边相等**），从而可知它的**两个底角相等**；

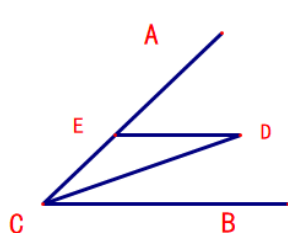
判定是已知一个三角形有**两角相等**，从而得出它是等腰三角形.但是“等角对等边”不能叙述为：如果一个三角形有两个底角相等，那么它的两腰也相等。因为在没有判定出它是等腰三角形之前，不能用“**底角**”“**腰**”这

些“**专属概念**”.

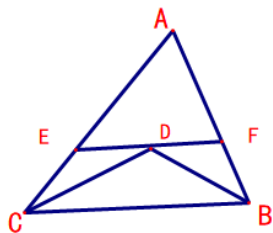
3. “三线合一”的逆命题

三线合一的逆命题都是真命题，但不是定理，所以在应用时不能直接用于等腰三角形的判定，往往需要借助全等的判定来推理.

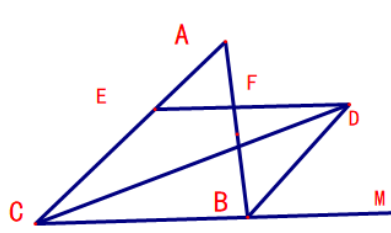
4. 一个常见模型：“**角平分线+平行** $\Rightarrow$ **等腰**”



CD平分 $\angle ACB$, $DE \parallel BC$
则 $DE=EC$



CD平分 $\angle ACB$, DB平分 $\angle ABC$, $DE \parallel BC$
则 $EF=CE+BF$

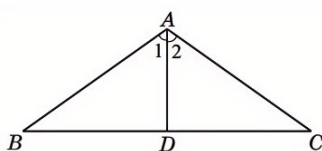


CD平分 $\angle ACB$, DB平分 $\angle ABM$, $DE \parallel BC$
则 $EF=CE-BF$

5. 一个常见的辅助线——倍长中线

【即学即练】

例1 如图，已知：在 $\triangle ABC$ 中，D是边BC的中点， $\angle 1 = \angle 2$. 求证： $AB = AC$.



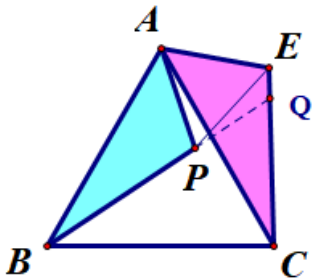
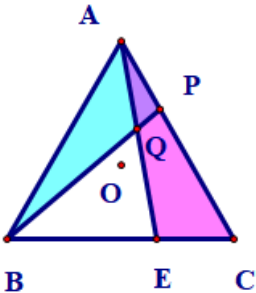
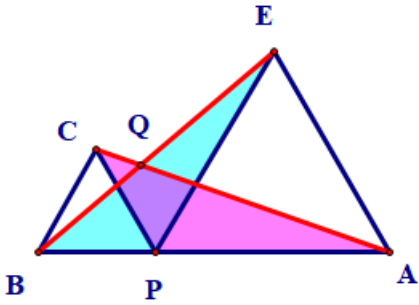
知识点3 等边三角形

1. 性质定理：等边三角形的每一个角都等于 60° .
2. 判定定理：三个内角都相等的三角形是等边三角形.

有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.

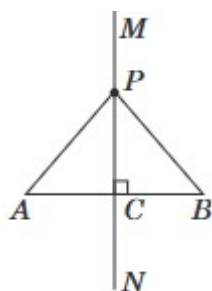
3. 常见的几何模型

类型	图例	结论
----	----	----

旋转模型		条件:等边$\triangle ABC$ 中 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 结论: $\triangle ABP \cong \triangle ACE$ $\triangle APE$ 是等边三角形 $\angle BQC = 60^\circ$
		条件:等边$\triangle ABC$ 中 $\triangle ABP$ 绕点 O 顺时针旋转 120° 结论: $\triangle ABP \cong \triangle CAE$ $\angle BQE = 60^\circ$
手拉手模型		条件:等边$\triangle PBC$ 和 $\triangle PAE$ 手拉手 AC, BE 叫作手拉线 结论: $\triangle BPE \cong \triangle CPA$ $BE = AC$ $\angle AQE = 60^\circ$

知识点 4 线段的垂直平分线

1. 性质定理：线段的垂直平分线上的任意一点到该线段两个端点的距离相等.
2. 判定定理：与一条线段的两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.



3. 尺规作图

【即学即练】

例 求作已知线段的垂直平分线.

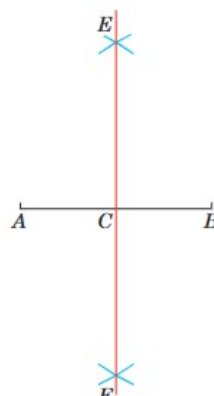
如图，已知线段 AB, 求作线段 AB 的垂直平分线.



【分析】 根据线段**垂直平分线的判定定理**和**直线公理**, 只需要作出**两个点**, 使**每一个点到线段 AB 的两个端点的距离都相等**, 这两点所确定的直线就是线段 AB 的垂直平分线.

【作法】

- (1) 以点 A 为圆心、以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧；
- (2) 以点 B 为圆心、以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧；
- (3) 两弧分别相交于点 E、F, 过点 E、F 作直线 EF.



则直线 EF 就是线段 AB 的垂直平分线.

【点睛】

- ① 以大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径的目的是确保两弧有交点；

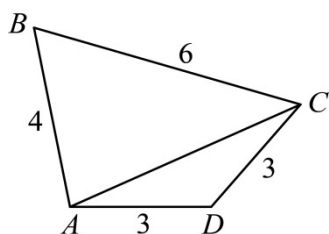
②连接 EF 与 AB 的交点 C 就是线段 AB 的中点.

题型精讲

题型 01 等腰三角形的性质

【典例 1】 (²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海徐汇·期末) 我们知道三角形具有稳定性, 但四边形却是不稳定的. 已知

四边形 $ABCD$ 的边长如图所示. 当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时, 对角线 AC 的长为 ()



A. 4 或 6

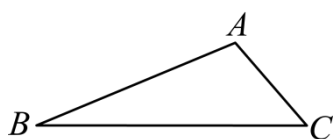
B. 5

C. 4

D. 6

【变式 1】 (²⁴⁻²⁵ 八年级·浙江杭州·期中) 在 $\triangle ABC$ 中 $\angle B = 20^\circ$, $\angle A = 110^\circ$, 点 P 在 $\triangle ABC$ 的三边上运

动, 当 $\triangle PAC$ 成为等腰三角形时, 顶角的度数是 ____.

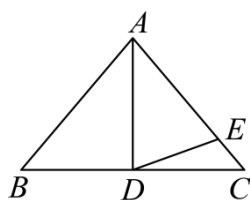


【变式 2】 (²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海黄浦·期末) 在等腰 $\triangle ABC$ 中, 如果过顶角顶点 A 的一条直线 AD 将 $\triangle ABC$

分割成两个等腰三角形, 那么 $\angle BAC =$ ____.

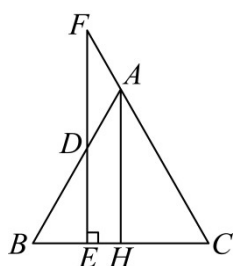
【变式 3】 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AC 上一点, 且 $AE = AD$, 若

$\angle ADE = 70^\circ$, 求 $\angle BAD$ 的度数.



【变式 4】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 是 BC 上的一点，过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E ，延长 ED 交

CA 的延长线于点 F 。点 H 是 BC 的中点，连接 AH 。



求证：

(1) $AH \parallel EF$ ；

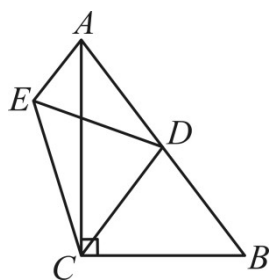
(2) $AF = AD$ 。

题型 02 等腰三角形的判定

【典例 1】（²⁵⁻²⁶ 八年级上·上海嘉定·期中）已知，如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $AB = 5$ ，

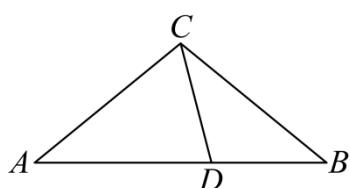
点 D 在边 AB 上运动，连接 CD ，将 $\triangle BCD$ 沿着 CD 翻折，点 B 落在点 E 处，连接 AE 。当 $CD \parallel AE$ 时，

DE 的长为_____。



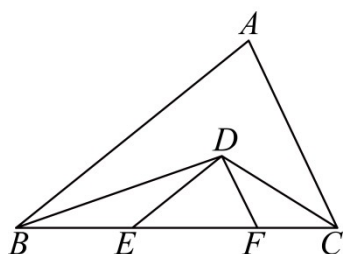
【典例 2】 (24-25 七年级下·上海闵行·期末) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \angle B = 36^\circ$ ，点 D 在边 AB 上，

$\angle ACD = 2\angle BCD$ ，图中共有_____个等腰三角形．



【变式 1】 如图， $\triangle ABC$ 中，已知， $BC = 12$ ， DB ， DC 分别平分 $\angle ABC$ ， $\angle ACB$ ， $DE \parallel AB$ ，

$DF \parallel AC$ ，则 $\triangle DEF$ 的周长为 ()



A . 12

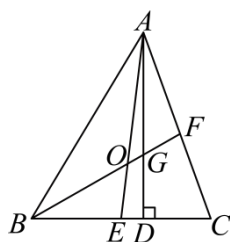
B . 13

C . 14

D . 15

【变式 2】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle C = 70^\circ$ ， $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$ 的角平分线 AE 、 BF 交于点

O ， $AD \perp BC$ ，垂足为点 D ，且 AD 与 BF 交于点 G ．

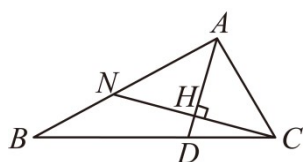


(1) 求 $\angle CAD$ 和 $\angle BOE$ 的度数；

(2) 求证： $AG = BG$.

【变式 3】 (25-26 八年级上·湖北荆门·期末) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 2\angle B$ ， $\angle BAC$ 的平分线 AD 交

BC 于点 D ，过 C 作 $CN \perp AD$ 交 AD 于点 H ，交 AB 于点 N .

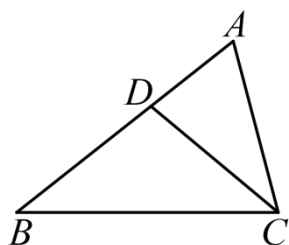


(1) 求证： $\triangle ANC$ 为等腰三角形；

(2) 求证： $BN = CD$.

【变式 4】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 2\angle B$ ， CD 平分 $\angle ACB$ ，交 AB 于点 D ， $AD = 4$ ， $AC = 8$ ，求 BC 的

长 .



题型 03 等边三角形

【典例 1】 (24-25 七年级下·上海·期末) 下列条件中，不能判断 $\triangle ABC$ 是等边三角形的是 () .

A. $AB = AC$, $\angle B = 60^\circ$

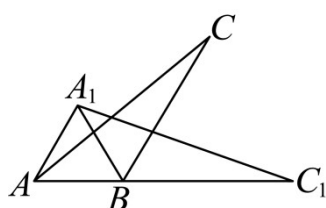
B. $AB = AC$, $\angle B = \angle A$

C. $\angle A = \angle B = 60^\circ$

D. $\angle A + \angle B = 2\angle C$

【变式1】 (24-25 七年级下·山东济南·期末) 如图, 将一个 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 60° 得 $\triangle A_1BC_1$, 使得

C 点落在 AB 的延长线上的点 C_1 处, 连接 AA_1 .

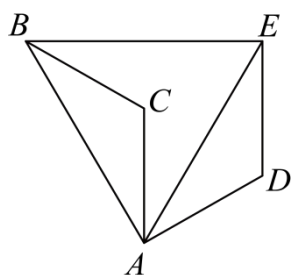


(1) 求 $\angle A_1AB$ 的度数;

(2) 求证: $\angle A_1AC = \angle C_1$.

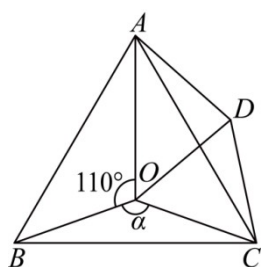
【变式2】 (24-25 八年级下·陕西西安·期中) 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle AED$, 连接

BE , 若线段 $AB = 5$, 求 BE 的长.



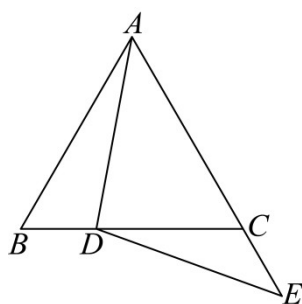
【变式3】 如图, 点 O 是等边 $\triangle ABC$ 内一点, D 是 $\triangle ABC$ 外的一点, $\angle AOB = 110^\circ$, $\angle BOC = \alpha$,

$\triangle BOC \cong \triangle ADC$, 连接 OD .



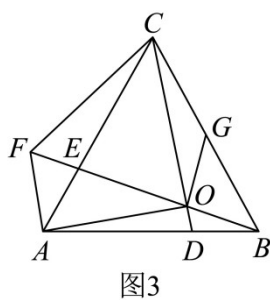
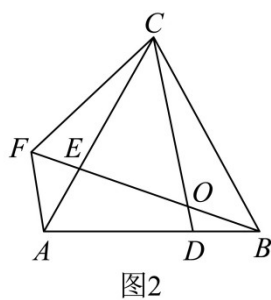
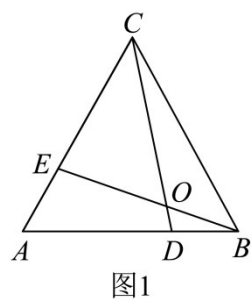
- (1) 求证： $\triangle OCD$ 是等边三角形；
- (2) 当 $\alpha = 150^\circ$ 时，试判断 $\triangle AOD$ 的形状，并说明理由；
- (3) 探究：当 α 为多少度时， $\triangle AOD$ 是等腰三角形．

【变式4】 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 BC 边上，点 E 在 AC 的延长线上， $DE = DA$ ．



- (1) 求证： $\angle BAD = \angle EDC$ ；
- (2) 作出点 E 关于直线 BC 的对称点 M ，连接 DM 、 AM ，猜想 DM 与 AM 的数量关系，并说明理由．

【变式5】 如图¹，在等边 $\triangle ABC$ 中，点 D ， E 分别是 AB ， AC 上的点， $BD = AE$ ， BE 与 CD 交于点 O ．



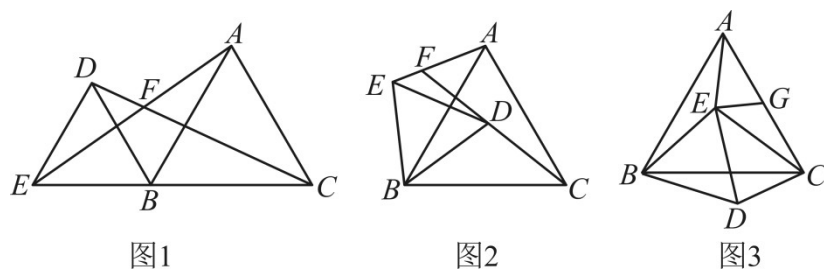
- (1) 求证： $\triangle ABE \cong \triangle BCD$ ；

(2)如图 2，以 CO 为边作等边 $\triangle OCF$ ，求证： $AF = BO$ 。

(3)如图 3，在 (2) 的条件下，若点 G 是 BC 的中点，连接 AO ， GO ，判断 AO 与 GO 有什么数量关系？并

说明理由。

【变式 6】 如图， $\triangle ABC$ 、 $\triangle DBE$ 都是等边三角形。



(1)如图 1，当 C 、 B 、 E 在一条直线上时，求证： $AE = CD$ ；

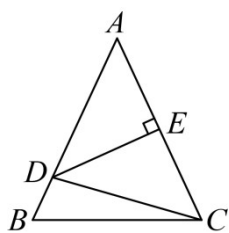
(2)如图 2，将 $\triangle DBE$ 绕着点 B 旋转， CD 延长线与 AE 交于点 F ，则 $\angle AFC$ 的度数是多少？为什么？

(3)如图 3，当 $\triangle DBE$ 的边长为 4，且 $\angle AEC = 120^\circ$ 时，若 G 为 AC 边的中点，求 EG 的长。

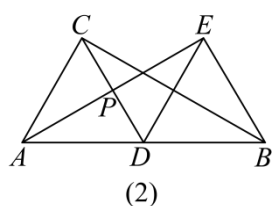
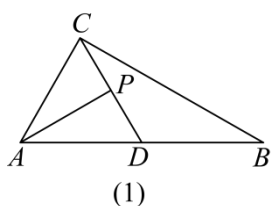
题型 04 线段的垂直平分线

【典例 1】 (24-25 七年级下·上海松江·期末) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 12\text{cm}$ ， AC 的垂直平分线分

别交 AB 、 AC 于点 D 、 E ，且 $\triangle BCD$ 的周长为 22cm ，求底边 BC 的长。



【典例2】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海松江·期末）已知：在 $\triangle ACD$ 中， P 是 CD 的中点， B 是边 AD 延长线上的点， $BD = AC$ ，连接 BC 、 AP 。



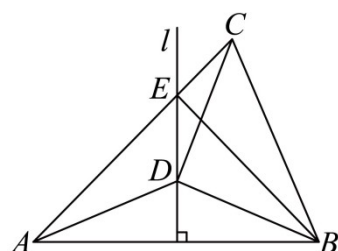
(1)如图(1)，如果 $AP \perp CD$ ，证明： $BD = AD$ ；

(2)如图(2)，过点 D 作 $DE \parallel AC$ ，交 AP 的延长线于点 E ，连接 BE ，如果 $\angle CAD = 60^\circ$ ，证明：

$$BC = 2AP$$

【典例3】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海·期末）如图，在 $\triangle ABC$ 中， l 是 AB 的垂直平分线，与边 AC 交于点 E ，

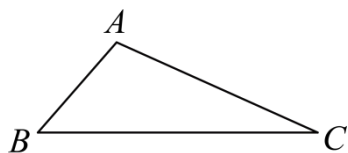
点 D 在 l 上，且 $DB = DC$ ，连接 AD 。



(1)求证：点 D 在边 AC 的垂直平分线上；

(2)连接 BE ，若 $BD \perp CD$ ，求证： $BE \perp AC$ 。

【典例4】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海金山·期末）如图，在 $\triangle ABC$ 中， AB 的垂直平分线与 BC 交于点 D 。



(1) 尺规作图：请用无刻度的直尺和圆规，在线段 BC 上作点 D （要求：不写作法，保留作图痕迹）；

(2) 连接 AD 。如果 $\angle ADC = 96^\circ$ ， $\angle CAD$ 与 $\angle DAB$ 的度数之比为 $5:4$ ，那么 $\angle BAC$ 的度数是多少？

【变式1】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海普陀·期末）已知小于 45° 的 $\angle MAN$ ，点 B 是边 AN 上的一个定点，点 C

在边 AM 上。

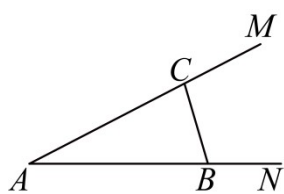


图1

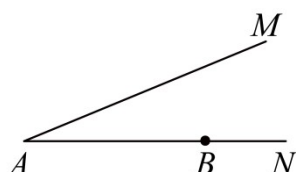


图2

(1) 如图1， $\angle CBA = 75^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 沿着直线 BC 翻折得 $\triangle DBC$ ，点 A 的对应点为点 D ，如果 $DC \parallel AB$ ，

求 $\angle MAN$ 的度数；

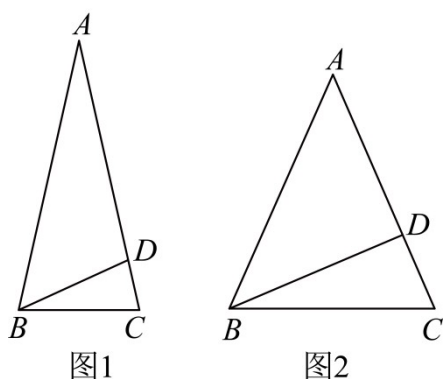
(2) 在图2中，用尺规作 $\triangle ABC$ ，使 $\angle ACB = 2\angle A$ ；（保留作图痕迹，简要说明作图步骤）

(3) 在(2)所作的图中，当 $\angle MAN = 22.5^\circ$ ， $AB = a$ 时，求 $\triangle ABC$ 的面积。（用含 a 的代数式表示）

【变式2】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海长宁·期末）定义：在等腰三角形中，过某底角顶点的一条射线分这个底

角所成的两个角中恰好有一个角等于这个等腰三角形的顶角，那么称这条射线为这个等腰三角形的“等角分割线”。

已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 在边 AC 上。



(1) 如图1，如果 $BD = BC$ ，求证： BD 是 $\triangle ABC$ 的“等角分割线”；

(2) 如图2，如果 $BD \perp AC$ ，且 BD 是 $\triangle ABC$ 的“等角分割线”，求 $\angle C$ 的度数；

(3) BD 是 $\triangle ABC$ 的“等角分割线”， $\angle BAC$ 的平分线交 BD 于点 F 。如果 $DF = DC$ ，那么 $\angle BAC$ 的度数为

_____。

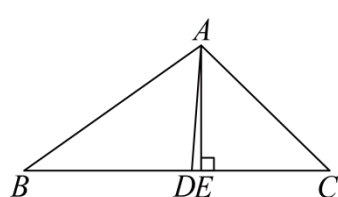
【变式3】（²⁴⁻²⁵七年级下·上海嘉定·期末）小海在解答练习册 P^{37} 第4题后进行了拓展探究：

如图1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的平分线 AD 交边 BC 于点 D ， $AE \perp BC$ ，垂足为 E 。

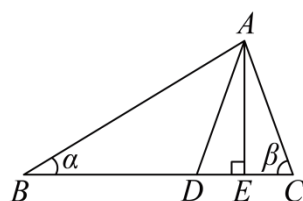
小海猜想：通过 $\angle C$ 的度数可求出 $\angle CAE$ 的度数，再结合 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的度数可求出 $\angle CAD$ 的度数，从而确定

$\angle B$ 、 $\angle C$ 与 $\angle DAE$ 之间存在固定的数量关系。他尝试代入了几组 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的度数后^($\angle B < \angle C$)，验证了

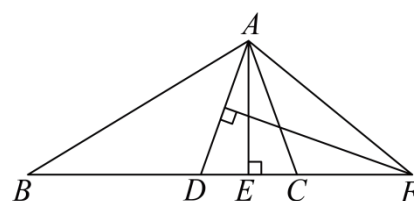
这一猜想 .



(图1)



(图2)



(图3)

(1)请补全下表：

$\angle B$	36°	30°	24°	...
$\angle C$	44°	60°	72°	...
$\angle DAE$	4°	_____°	_____°	...

(2)如图 2 , 若 $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta (\alpha < \beta)$, 那么 $\angle DAE =$ _____ . (用含 α 、 β 的代数式表示) , 并加以证

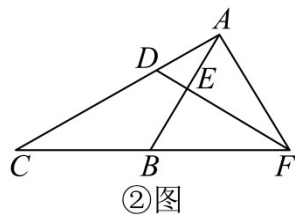
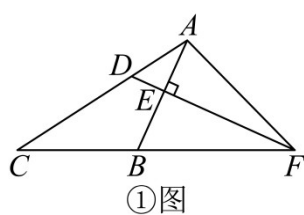
明 ;

(3)在 (2) 的基础上作 AD 的垂直平分线 , 交 BC 的延长线于点 F , 连接 AF . 如图 3 , 如果 $\angle ACB = 64^\circ$,

请直接写出 $\angle BAF =$ _____° .

【变式 4】 (²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海青浦·期末) 在 $\triangle ABC$ 中 , $AB = BC$, AB 的垂直平分线分别交边 AC 、 边

AB 和直线 CB 于点 D, E, F ，连接 AF 。



(1) 点 F 在 CB 的延长线上，

①如图，求证： $\angle ABC = 2\angle ADE$ ；

②如图，当 $DC = DF$ ， $BC = 1$ 时，求 $\triangle ABF$ 的周长；

(2) 当 $\triangle ACF$ 是等腰三角形时，请直接写出 $\angle C$ 的度数。