

专题 05 二次根式 阶段复习

考点归纳

考点 01 概念综合辨析

考点 02 概念的应用

考点 03 二次根式性质、化简及其应用

考点 04 二次根式的运算

考点 05 二次根式运算的应用

考点 06 解答题

考点专练

考点 01 概念综合辨析

1. 下列二次根式中与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{12}$ B. $\sqrt{0.3}$ C. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ D. $\sqrt{18}$

2. 下列各组二次根式中，属于同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 和 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 和 $\sqrt{0.2}$
C. $\sqrt{4ab}$ 和 $\sqrt{2ab}$ D. $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{a^2}$

3. 下列二次根式中，与 $\sqrt{5a}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{\frac{a}{15}}$ B. $\sqrt{25a}$ C. $\sqrt{5a}$ D. $\sqrt{45a}$

4. 下列二次根式中，是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{\frac{1}{2}a}$ B. $\sqrt{a^3}$ C. $\sqrt{35a}$ D. $\sqrt{a^2+2a+1}$

5. 下列二次根式中，是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{12a}$ B. $\sqrt{\frac{a}{3}}$ C. $\sqrt{a^2+b^2}$ D. $\sqrt{a^2b}$

6. 在下列各式中，是 $\sqrt{2a+b}$ 的有理化因式的是 ()

A. $\sqrt{2a+b}$ B. $\sqrt{2a-b}$ C. $\sqrt{2a+b}$ D. $\sqrt{2a-b}$

考点 02 概念的应用

7. 二次根式 $\sqrt{2x-3}$ 有意义的条件是：_____.

8. 若代数式 $\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是_____.

9. 若最简根式 $\sqrt[3]{3x-y+2}$ 与 $\sqrt[3]{3y-x+5}$ 是同类根式，则 $x-y=$ _____.

10. 如果 $\sqrt{m}$ 与 $\sqrt{48}$ 是同类二次根式，那么 m 的最小正整数值是 ()

A. 2 B. 3 C. 6 D. 8

11. 若 $y = \sqrt{x-2024} + \sqrt{2024-x} + 2025$ ，则 $x-y$ 的值为_____.

考点 03 二次根式性质、化简及其应用

12. 计算： $\sqrt{(3-\pi)^2} =$ _____.

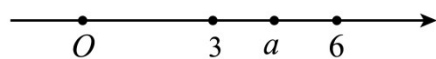
13. 当 $x < 0$ 时，化简： $\sqrt{-x^3y} =$ _____.

14. 已知 $a < 0$ ，化简： $\sqrt{a^2b} =$ _____.

15. 化简： $\sqrt{-a^2b} + a\sqrt{\frac{b}{a}} =$ _____.

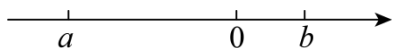
16. 化简： $(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}} =$ _____.

17. 实数 a 在数轴上的位置如图所示，则 $\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-6)^2}$ 化简的结果为 ()



A. 4 B. -4 C. $2a-4$ D. $4-2a$

18. 实数 a 、 b 在数轴上的位置如图所示，且 $|a| > |b|$ ，则化简 $\sqrt{a^2} - \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$ 的结果为 ()



A. $2a+b$ B. $-2a+b$ C. b D. $2a-b$

19. 当 $1 \leq x \leq 3$ 时，化简： $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} =$ _____.

考点 04 二次根式的运算

20. 计算： $(3 - \sqrt{3}) \div \sqrt{3} =$ _____.

21. 分母有理化： $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} =$ _____.

22. 下列运算正确的是 ()

A. $(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = -1$

B. $(\sqrt{3} + 1)^2 = 4$

C. $\sqrt{3.6} = 0.6$

D. $\sqrt{9+16} = 3+4$

23. 下列计算中正确的是 ()

A. $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{5}$

B. $\sqrt{(-3)^2} = -3$

C. $\sqrt{24} \div \sqrt{6} = 4$

D. $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

24. 下列等式一定成立的是 ()

A. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$

B. $(\sqrt{-a})^2 = a$

C. $\sqrt{a^4} = a^2$

D.

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

25. 下列从左到右的变形不一定正确的是 ()

A. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$

B. $\sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}$

C. $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

D. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

26. 下列结论正确的是 ()

A. $\sqrt{(3-\pi)^2} = 3-\pi$

B. $\sqrt{a^2-4}$ 不是最简二次根式

C. $\sqrt{-ab^2} (b < 0) = b\sqrt{-a}$

D. $(\sqrt{12} + \sqrt{18}) \div \sqrt{3} = 2 + \sqrt{6}$

27. 把式子分母有理化过程中，错误的是 ()

A. $\frac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} = \frac{(m-n)(\sqrt{m}+\sqrt{n})}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$

$$B. \frac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} = \sqrt{m}+\sqrt{n}$$

$$C. \frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} = \frac{(m-n)(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})} = \sqrt{m}-\sqrt{n}$$

$$D. \frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} = \sqrt{m}-\sqrt{n}$$

考点 05 二次根式运算的应用

28. 比较大小 (用“>”、“<”、“=”连接) : $-3\sqrt{3}$ _____ $-2\sqrt{7}$

29. 比较大小 : $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ _____ $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$. (填“>”“<”或“=”)

30. 等式 $\sqrt{\frac{x-2}{x-3}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$ 成立的条件是_____.

31. 若 $a = \frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{11}}$, $b = \sqrt{10}-\sqrt{11}$, 则 a 与 b 的关系是 ()

A. $a = \frac{1}{b}$

B. $a = -\frac{1}{b}$

C. $a < b$

D. $a > b$

32. 如果 $a = 2 + \sqrt{3}$, $b = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, 那么 a 、 b 的关系是 ()

A. $ab = -1$

B. $a = b$

C. $a + b = 0$

D. $ab = 1$

33. 下列结论中正确的个数是 ()

① $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 1-\sqrt{2}$;

② $\sqrt{a^2+b^2}$ 是最简二次根式 ;

③ $\sqrt{32}$ 和 $\sqrt{27}$ 不是同类二次根式 ;

④ $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 的有理化因式是 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$;

⑤ 不等式 $(2-\sqrt{5})x > 1$ 的解集是 $x > -2-\sqrt{5}$;

⑥ 将 3560000 保留两个有效数字, 可表示为 3600000 .

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

34. 不等式 $\sqrt{3x} + \sqrt{8} < \sqrt{27x} + \sqrt{32}$ 的解集是_____.

35. 不等式 $\sqrt{2x} - 3 \leq \sqrt{3x}$ 的解集是_____.

36. 若 $0 < x < 1$ ，且满足 $9x + \frac{1}{4x} = 12$ ，则 $3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} =$ _____.

37. 计算： $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2015} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{2016} =$ _____.

38. 化简 $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$ _____.

39. 已知 $a = \sqrt{5} - 2$ ，则代数式 $a^4 + 4a^3 + 5a + 1$ 的值为_____.

考点 06 解答题

40. 计算： $\left(\sqrt{2} - 6\sqrt{\frac{1}{12}}\right) - \left(4\sqrt{\frac{1}{8}} - \frac{1}{2}\sqrt{75}\right)$.

41. 计算：

(1) $\sqrt{12} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - 9\sqrt{\frac{1}{27}}$ ；

(2) $2x^2\sqrt{\frac{1}{2x}} - 3\sqrt{2x^3} + x\sqrt{18x}$.

42. 计算： $\frac{2}{b}\sqrt{ab} \cdot \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) + 3\sqrt{\frac{a}{b}}$.

43. 计算： $(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{3})$

44. 已知 a 、 b 为整数，且满足 $a(\sqrt{2} + 1) + 3(b - 2\sqrt{2}) = 6 + 3\sqrt{2}$ ，求 $a + b$ 的值.

45. 先化简，后求值： $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a-4\sqrt{ab}+4b}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$ ，其中 $a = \frac{1}{2}$ ， $b = 2$.

46. 已知 $y = \sqrt{x - \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - x} + 8$ ，求 $\frac{x-4y}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}} - \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x+\sqrt{xy}} \div \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}$ 的值.

47. 一些含根号的式子可以写成另一个式子的平方，如 $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$. 设 $a + b\sqrt{2} = (m + n\sqrt{2})^2$ (其中 a 、 b 、 m 、 n 均为正整数)，则有 $a + b\sqrt{2} = m^2 + 2n^2 + 2mn\sqrt{2}$ ， $\therefore a = m^2 + 2n^2$ ， $b = 2mn$. 这样可以把部分 $a + b\sqrt{2}$ 的式子化为平方式的方法. 请你仿照上述的方法探索并解决下列问题：

(1) 当 a 、 b 、 m 、 n 均为正整数时，若 $a + b\sqrt{3} = (m + n\sqrt{3})^2$ ，用含 m 、 n 的式子分别表示 a 、 b ，得： $a =$ _____， $b =$ _____；

(2) 计算： $\sqrt{11 + 4\sqrt{7}} - \sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$ 。

48. 像 $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = 1$ ， $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a (a \geq 0)$ ，两个含有二次根式的代数式相乘，积不含有二次根式，我们称这两个代数式互为“有理化因式”。例如 $\sqrt{5}$ 与 $\sqrt{5}$ ， $\sqrt{2} + 1$ 与 $\sqrt{2} - 1$ 等都是互为“有理化因式”。进行二次根式运算时，利用“有理化因式”可以化去分母中的根号。

(1) 化简：① $\frac{2}{3\sqrt{2}} =$ _____。② $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} =$ _____。

(2) 计算 $\left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2025} + \sqrt{2024}} \right) (\sqrt{2025} + 1)$

(3) 已知 $a = \sqrt{2023} - \sqrt{2022}$ ， $b = \sqrt{2024} - \sqrt{2023}$ ， $c = \sqrt{2025} - \sqrt{2024}$ ，试比较 a ， b ， c 的大小，并说明理由。

49. 请阅读下列材料，并完成相应的任务。

古希腊几何学家海伦，在数学史上以解决几何测量问题而闻名。在他的著作《度量》一书中，给出了三角形面积的计算公式(海伦公式)：如果一个三角形的三边长分别为 a, b, c ，记 $p = \frac{a+b+c}{2}$ ，那么三角形的面积是 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 。

印度算术家波罗摩笈多和婆什迦罗还给出了四边形面积的计算公式：如果一个四边形的四边长分别为

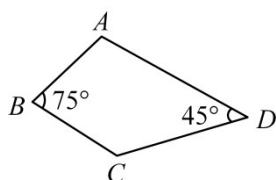
a, b, c, d ，记 $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ ，那么四边形的面积是 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{A+C}{2}}$ (其

中， A 和 C 表示四边形的一组对角的度数)

根据上述信息解决下列问题：

(1) 已知三角形的三边是 4，6，8，则这个三角形的面积是

(2) 小明的父亲是工程师，设计的某个零件的平面图是如图的四边形 $ABCD$ ，已知 $AB = 8$ ， $AD = 12$ ， $BC = 10 - \sqrt{10}$ ， $CD = 10 + \sqrt{10}$ ， $\angle B = 75^\circ$ ， $\angle D = 45^\circ$ 。求出这个零件平面图的面积。



50. 阅读材料一：利用整体思想解题，运用代数式的恒等变形，使不少依照常规思路难以解决的问题找到

简便解决方法，例如， $ab=1$ ，求证： $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = 1$ ．证明：

$$\text{左边} = \frac{ab}{ab+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{b}{1+b} + \frac{1}{1+b} = 1 = \text{右边}.$$

阅读材料二：基本不等式 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ($a>0, b>0$)，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，它是解决最值问题的有力

工具．例如：在 $x>0$ 的条件下， $x+\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ ，当且仅当 $x=\frac{1}{x}$ ，即 $x=1$ 时， $x+\frac{1}{x}$ 有最小值，

最小值为 2．请根据阅读材料解答下列问题

(1) 若正数 x ，则 $x+\frac{9}{x}$ 的最小值为_____．

(2) 若正数 a, b 满足 $ab=1$ ， $m=\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$ ， n 为 $x+\frac{4}{x+1}$ ($x>-1$) 的最小值，求 n^{-m} ；

(3) 若正数 a, b 满足 $\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ，若不等式 $\frac{2m-5}{m+1} + 9 < a+b$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．