

第20章 二次根式 单元测试卷·提升卷

(考试时间：100分钟 试卷满分：150分)

一、选择题：(本大题共10题，每题4分，共40分.下列各题四个选项中，有且只有一个选项是正确的.)

1. 下列函数中，自变量的取值范围选取错误的是()

A. $y=2x^2$ 中， x 取全体实数

B. $y=\frac{1}{x+1}$ 中， x 取 $x \neq -1$ 的实数

C. $y=\sqrt{x-2}$ 中， x 取 $x \geq 2$ 的实数

D. $y=\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ 中， x 取 $x \geq -3$ 的实数

2. 下列代数式中，是最简二次根式的是()

A. $\sqrt{a^2b}$

B. $\sqrt[3]{2}$

C. $\sqrt{a^2-b^2}$

D. $\sqrt{0.7}$

3. 下列各式中，互为有理化因式的是()

A. $\sqrt{a+b}, \sqrt{a-b}$

B. $\sqrt{5}-\sqrt{2}, \sqrt{5}-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{x-1}, \sqrt{x-1}$

D. $-\sqrt{a}+\sqrt{b}, \sqrt{a}-\sqrt{b}$

4. 下列各式中，从左到右的变形正确的是()

A. $5\sqrt{\frac{a}{5}} = \sqrt{5 \times \frac{a}{5}} = \sqrt{a}$

B. $a\sqrt{ab} = \sqrt{a^3b}$

C. $(a+b)\sqrt{a+b} = \sqrt{(a+b)^3}$

D. $(a-2)\sqrt{\frac{1}{2-a}} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{2-a}} = \sqrt{2-a}$

5. 如果三角形的三边长分别为 1, k , 3, 则化简 $7 - \sqrt{4k^2 - 36k + 81} - |2k - 3|$ 的结果是()

A. 1

B. 7

C. 13

D. $19 - 4k$

6. 下列说法中，正确的是()

A. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 互为倒数

B. 若 $(\sqrt{2}-2)x > 1$ 则 $x > \frac{1}{\sqrt{2}-2}$

C. 若 $\sqrt{x+3}$ 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式，则 $x+3$ 与 3 不一定相等

D. 若 $a+b < 0$ ，则 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab}$

7. 已知 $x + \frac{1}{x} = 7 (0 < x < 1)$ ，则 $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的值为 ()

A. $-\sqrt{7}$

B. $-\sqrt{5}$

C. $\sqrt{7}$

D. $\sqrt{5}$

8. 当 $x=4$ 时， $\frac{\sqrt{x-2\sqrt{3}}}{\sqrt{x^2-4\sqrt{3}x+12}} - \frac{\sqrt{x+2\sqrt{3}}}{\sqrt{x^2+4\sqrt{3}x+12}}$ 的值为 ()

A. 1

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. 3

9. 设等式 $\sqrt{a(x-a)} + \sqrt{a(y-a)} = \sqrt{x-a} - \sqrt{a-y}$ 在实数范围内成立，其中 a, x, y 是两两不同的实数，则

$\frac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}$ 的值是 ()

A. 3

B. $\frac{1}{3}$

C. 2

D. $\frac{5}{3}$

10. 若 $a = 2020 \times 2022 - 2020 \times 2021, b = \sqrt{2023^2 - 4 \times 2022}, c = \sqrt{2021^2 + 1}$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

A. $c > b > a$

B. $c > a > b$

C. $b > a > c$

D. $b > c > a$

二、填空题 (本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.)

11. 若 $m < 0$, 化简 : $\sqrt{-m^2n} =$ _____ .

12. 不等式 $2\sqrt{3}x - 6 < 3\sqrt{2}x$ 的解集是 ____ .

13. 计算 $\left(\sqrt{72} + \frac{1}{3}\sqrt{18}\right) \div \sqrt{8} =$ _____ $(\sqrt{3}-2)^{2015} (\sqrt{3}+2)^{2016} =$ ____

14. 比较大小 $\sqrt{m} - \sqrt{n}$ _____ $\sqrt{m+2013} - \sqrt{n+2013} (m > n \quad 0)$

15. 已知 $a+b=-8$, $ab=1$, 则 $\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值为 _____ .

16. 若 $0 < a < 1$, 则 $\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - 4} - \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 + 4}$ 的值为 _____ .

17. 已知 $y = \sqrt{x-8} + \sqrt{8-x} + 18$, 求代数式 $\frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{2xy}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}$ 的值为 _____ .

18. 观察下列等式 :

第 1 个等式 : $a_1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$,

第 2 个等式 : $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$,

第 3 个等式 : $a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = 2 - \sqrt{3}$,

第 4 个等式 : $a_4 = \frac{1}{2+\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$,

...

按上述规律 , 计算 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n =$ _____ .

三、解答题：（本大题共 11 题，共 78 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

19 . 求下列二次根式中字母 a 的取值范围 .

$$(1) \sqrt{a+1}$$

$$(2) \sqrt{\frac{1}{1-2a}}$$

$$(3) \sqrt{(a-3)^2}$$

$$(4) \sqrt{\frac{1}{(a-3)^2}}$$

20 . 计算 .

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + 2\sqrt{12} - \sqrt{18} ;$$

$$(2) (2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1) - (\sqrt{3}-2)^2 .$$

21 . 化简下列各式：

$$(1) \sqrt{\frac{3x^3}{4y}} (x < 0)$$

$$(2) \sqrt{\frac{(a+1)^3}{5b^3}} (a < -1)$$

$$22. \text{ 计算： } \frac{n}{m} \cdot \left(-\frac{1}{m} \sqrt{\frac{n^3}{m^3}} \right) \div \sqrt{\frac{n}{2m^3}} (m < 0).$$

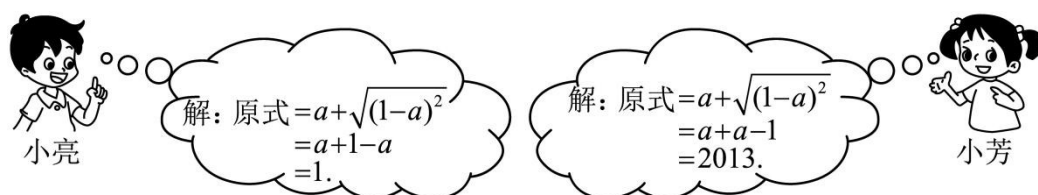
$$23. \text{ 计算： } (u+v) \sqrt{\frac{u^2}{u^2-v^2}} + \frac{u}{v} \sqrt{\frac{u+v}{u-v}} (u < v < 0)$$

$$24. -6 \sqrt{\frac{3m^2-3n^2}{2a^2}} \div \frac{3}{2} \sqrt{\frac{m+n}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{m-n}} \cdot \sqrt{-a}$$

$$25. (1) \text{ 先化简，后求值： } \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a-4\sqrt{ab}+4b}{2\sqrt{b}-\sqrt{a}}, \text{ 其中 } a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{8}.$$

$$(2) \text{ 已知 } a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}, \text{ 求 } a^2 - 4a + 2 \text{ 的值.}$$

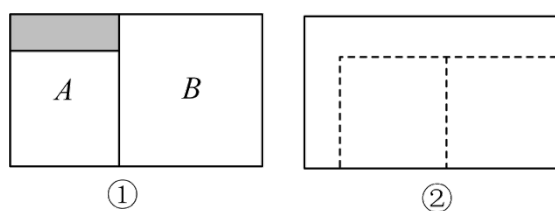
26. 先化简，再求值： $a + \sqrt{1 - 2a + a^2}$ ，其中 $a = 1007$ 。如图是小亮和小芳的解答过程。



- (1) _____ 的解答过程是错误的（填“小亮”或“小芳”）；
- (2) 错误的解答过程原因在于未能正确地运用二次根式的性质：_____（请用符号语言表达）；
- (3) 先化简，再求值： $m + 2\sqrt{m^2 - 6m + 9}$ ，其中 $m = -2024$ 。

27. 现有两块同样大小的长方形纸片，小黑采用如图①所示的方式，在长方形纸片上裁出两块面积分别为

18cm^2 和 32cm^2 的正方形纸片 A ， B 。



- (1) 求原长方形纸片的周长．（结果化为最简二次根式）；
- (2) 小红想采用如图②所示的方式，在长方形纸片上裁出面积为 25cm^2 的两块正方形纸片，请你判断能否裁出，并说明理由．

28．定义：我们将 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ 与 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ 称为一对“对偶式”，因为

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$ ，所以构造“对偶式”再将其相乘可以有效的将 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ 和

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ 中的“根号”去掉，于是二次根式除法可以这样计算：如 $\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{(2 - \sqrt{2}) \times (2 + \sqrt{2})} = 3 + 2\sqrt{2}$ ．像

这样，通过分子，分母同乘以一个式子把分母中的根号化去或把根号中的分母化去，叫做分母有理化，根

据以上材料，理解并运用材料提供的方法，解答以下问题：

- (1) 对偶式 $2 + \sqrt{3}$ 与 $2 - \sqrt{3}$ 之间的关系为

A . 互为相反数 B . 互为倒数 C . 绝对值相等 D 没有任何关系

(2) 已知 $x = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$, 求 $\frac{x-y}{x^2y+xy^2}$ 的值 ;

(3) 解方程 : $\sqrt{24-x} - \sqrt{8-x} = 2$ (提示 : 利用“对偶式”相关知识 , 令 $\sqrt{24-x} + \sqrt{8-x} = t$) .

29 . 阅读下面材料 :

我们在学习二次根式时 , 熟悉的是分母有理化以及应用 , 其实 , 还有一个方法叫做“分子有理化” , 与分母

有理化类似 , 分母和分子都乘以分子的有理化因式 , 从而消掉分子中的根式比如 :

$\sqrt{7} - \sqrt{6} = \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{6})(\sqrt{7} + \sqrt{6})}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$ ，分子有理化可以用来比较某些二次根式的大小，也可以用来处

理一些二次根式的最值问题。例如：比较 $\sqrt{7} - \sqrt{6}$ 和 $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ 的大小可以先将它们分子有理化如下：

$\sqrt{7} - \sqrt{6} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$ ， $\sqrt{6} - \sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$ ，因为 $\sqrt{7} + \sqrt{6} > \sqrt{6} + \sqrt{5}$ ，所以 $\sqrt{7} - \sqrt{6} < \sqrt{6} - \sqrt{5}$ 。再例如：

求 $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}$ 的最大值。做法如下：解：由 $x+2 \geq 0$ ， $x-2 \geq 0$ 可知 $x \geq 2$ ，而

$y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = \frac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}$ ，当 $x = 2$ 时，分母 $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}$ 有最小值 2，所以 y 的最大值是

2。

解决下述问题：

(1) 由材料可知，_____ $= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ ；

(2) 比较 $3\sqrt{2} - 4$ 和 $2\sqrt{3} - \sqrt{10}$ 的大小；

(3) 式子 $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$ 的最小值是_____。