

专题 01 直角三角形 压轴题

题型归纳

题型一：“HL”的综合应用

题型二：传统解答证明题

题型三：特殊三角形的分类讨论

题型四：根据已知数量关系求解

题型五：动点问题

题型六：平移问题

题型七：旋转问题

题型八：翻折问题

题型九：新定义题

题型十：勾股定理的证明

题型专练

题型一：“HL”的综合应用

1. 已知 $\text{Rt}\triangle ACB \cong \text{Rt}\triangle DEB$, $\angle ACB = \angle DEB = 90^\circ$.

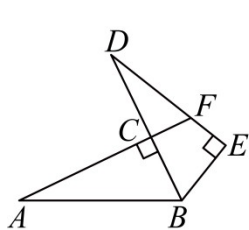


图 ①

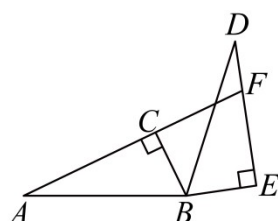


图 ②

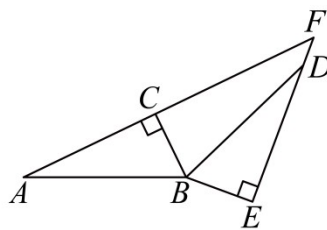


图 ③

(1) 将 $\text{Rt}\triangle ACB$ 和 $\text{Rt}\triangle DEB$ 按图①方式摆放，使 BD 经过点 C ，延长 AC 交线段 DE 于点 F 。试判断线段 $DF + CF = AC$ 之间的数量关系，并证明你的结论；

(2) 将 $\text{Rt}\triangle ACB$ 和 $\text{Rt}\triangle DEB$ 按图②方式摆放，延 AC 交线段 DE 于点 F 。请直接写出 DF , CF , AC 之间的数量关系——。

(3) 将 $\text{Rt}\triangle ACB$ 和 $\text{Rt}\triangle DEB$ 按图③方式摆放，延长 AC 交 ED 的延长线于点 F 。若 $DF = 2$ ， $CF = 8$ ，则 $AC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBE$ ，其中 $\angle ACB = \angle DEB = 90^\circ$ ， $\angle A = \angle D = 30^\circ$ 。

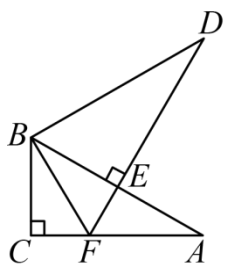


图1

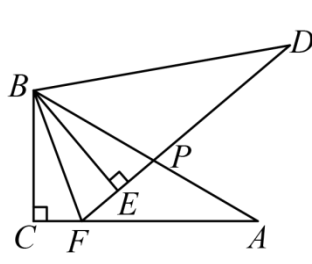


图2

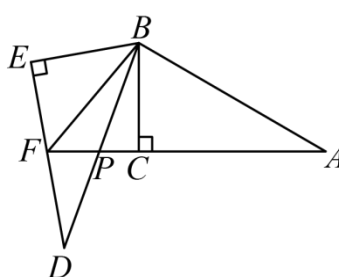


图3

(1) 将 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBE$ 按如图 1 所示位置摆放，点 E 落在 AB 上， DE 的延长线交 AC 于点 F ，连接 FB ，且 FB 平分 $\angle CFE$ 。

① 求证 $BC = BE$ ；

② 猜想 DE ， EF 与 AF 之间的数量关系是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 若将图 1 中的 $\triangle DBE$ 按如图 2 所示位置摆放， DE 交 AB 于点 P ， DE 的延长线交 AC 于点 F ， $\angle EBP < 60^\circ$ ，连接 FB ，且 FB 平分 $\angle CFE$ 。试判断 (1) 中 ② 猜想的结论还成立吗？并说明理由；

(3) 若将图 1 中的 $\triangle DBE$ 按如图 3 所示位置摆放， DE ， DB 分别交 AC 的延长线于点 F ， P ，连接 FB ，且 FB 平分 $\angle CFE$ 。你认为 (1) 中 ② 猜想的结论还成立吗？若成立，写出证明过程；若不成立，请直接写出 AF ， EF 与 DE 之间的数量关系。

题型二：传统解答证明题

3. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AB 上，连接 AD 、 CE 。

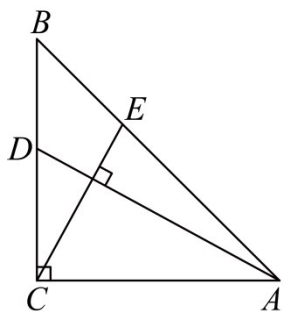


图1

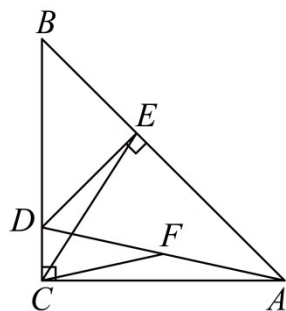
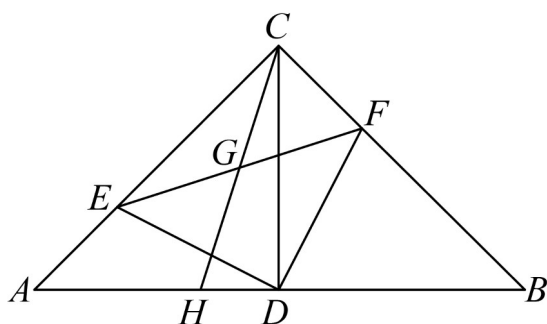


图2

(1)如图₁，若 $CE \perp AD$ ， $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BCE$ ，求证： $AD = 2CD$ ；

(2)如图₂，连接 DE ，若 $DE \perp AB$ ，点 F 为 AD 的中点，连接 CF 、 CE ，求 $\angle ECF$ 的大小．

4．如图所示，已知：在 $\triangle ABC$ 中， $AC = BC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是边 AB 上的中线，点 E 是直线 AC 上任意一点， $DF \perp DE$ ，交直线 BC 于点 F ．点 G 是 EF 中点，延长 CG 交直线 AB 于点 H ．



(1)若点 E 在边 ABC 上，

①证明： $DE = DF$ ；

②证明： $CG = GH$ ；

(2)若 $AE = 3$ ， $CH = 5$ ，直接写出边 AC 的长．

5．已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 在线段 BC 上，点 F 在射线 AD 上，连接 CF ，作 $BE \parallel CF$ 交射线 AD 于 E ， $\angle CFA = \angle BAC = \alpha$ ．

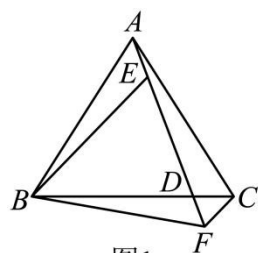


图1

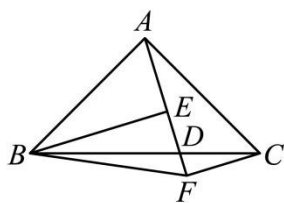


图2

(1)如图₁，当 $\alpha = 65^\circ$ 时， $\angle ABE = 15^\circ$ 时，求 $\angle BAE$ 的大小；

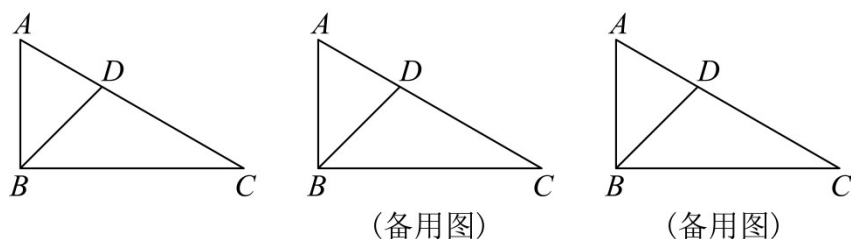
(2)当 $\alpha = 90^\circ$ ， $AB = AC = 8$ 时，

①如图₂，连接 BF ，当 $BF = BA$ ，求 CF 的长；

②若 $AD = 5\sqrt{2}$ ，求 AE 的长．

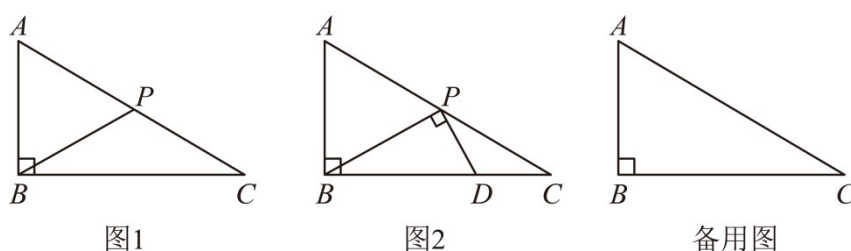
题型三：特殊三角形的分类讨论

6．如图所示，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ， $AB = 1$ ， BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线．



- (1) 求 BD 的长；
- (2) 若点 P 在线段 BC 上， $\triangle DPC$ 是直角三角形，求 BP 的长；
- (3) 若点 P 在射线 BC 上， $\triangle DPC$ 是等腰三角形，直接写出 BP 的长。

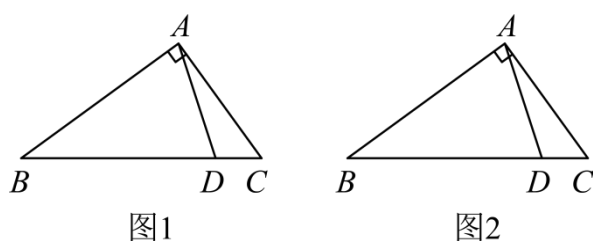
7. 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ，点 P 在边 AC 上，连接 BP 。



- (1) 如图 1，如果点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，求证： $AP = PC$ ；
- (2) 过点 P 作 $PD \perp BP$ ，交边 BC 于点 D ，
- ① 如图 2，如果点 P 是线段 AC 的中点，且 $BD = 2CD$ ，求 $\angle C$ 的度数；
- ② 填空：如果 $AB = 6$ ， $BC = 8$ ，且 $\triangle ABP$ 是以 BP 为腰的等腰三角形，那么 PD 的长等于 _____。

题型四：根据已知数量关系求解

8. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB > AC$ ，点 D 在射线 BC 上，连接 AD ， $\angle ADB = 2\angle B$ 。



- (1) 如图 1，若 AD 的垂直平分线经过点 B ，求 $\angle C$ 的度数；
- (2) 如图 2，当点 D 在边 BC 上时，求证： $BC = 2AD$ ；
- (3) 若 $AC = 2$ ， $BD = 5CD$ ，请直接写出 CD 的长。

9. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，点 D 为边 BC 上一点，连结 AD ，过点 C 作 $CE \perp AD$ 于点 F ，

交 AB 于点 E ，点 G 是线段 AD 上一点。

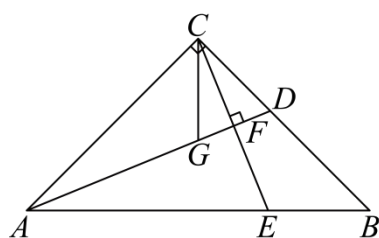


图1

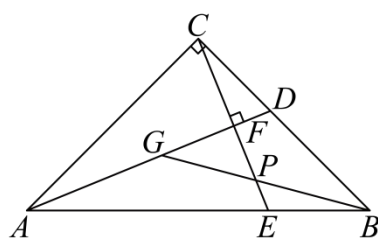
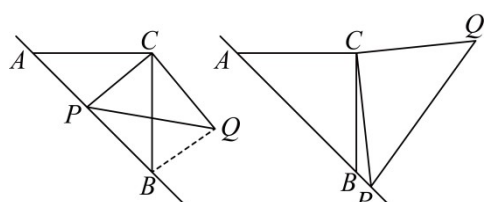


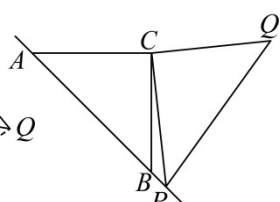
图2

- (1) 如图 1，连结 CG ，如果 $\angle ACG = \angle B$ ，求证： $AG = CE$ ；
- (2) 如图 2，连结 BG 交 CE 于点 P ，如果点 P 恰为 BG 的中点，求证： $AG = 2FP$ ；
- (3) 已知等腰直角三角形的腰长和底边长之比为 $1:\sqrt{2}$ ，在 (1) 的基础上，连结 DE 、 EG ，当 $CD = DE = 1$ 时，求四边形 $CDEG$ 的面积

10. 已知，如图： $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，动点 P 在斜边 AB 所在的直线上，以 PC 为直角边作等腰直角三角形 PCQ ，其中 $\angle PCQ = 90^\circ$ ，探究并解决下列问题：



图①

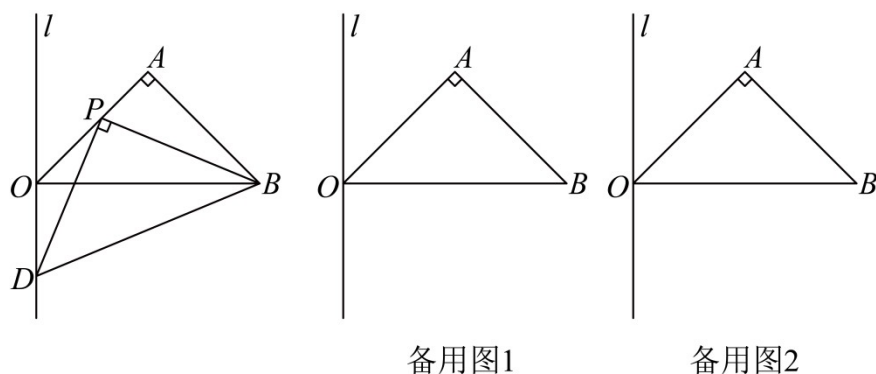


图②

- (1) 如图①，若点 P 在线段 AB 上，且 $AC = 5$ ， $PA = 2\sqrt{2}$ ，则：
 - ① 线段 $AB =$ _____， $PB =$ _____；
 - ② 猜想： PA^2 ， PB^2 ， PQ^2 三者之间的数量关系为_____；
- (2) 如图②，若点 P 在 AB 的延长线上，在 (1) 中所猜想的结论仍然成立，请你给出证明过程；
- (3) 若动点满足 $PA:PB = 1:3$ ，求 $PC:AC$ 的值。

题型五：动点问题

11. 已知在 $\triangle OAB$ 中， $\angle OAB = 90^\circ$ ， $AO = AB$ ， $OB = 4$ ，过点 O 作直线 $l \perp OB$ ，点 P 为直线 OA 上一点，连接 BP ，作 $PD \perp PB$ 交直线 l 于点 D 。



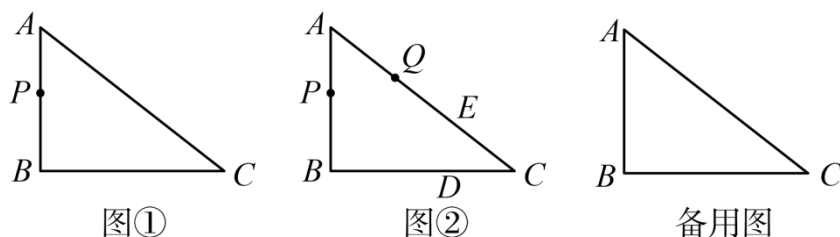
(1)如图，当 P 在线段 OA 上时．

①设 $\angle ABP = \alpha$ ，那么 $\angle PDO =$ _____．（用含 α 的代数式表示）．

②求证： $PD = PB$ ；

(2)设点 P 到直线 OB 的距离为 m ，当 $\triangle OPD$ 的面积为 4 时，请直接写出 m 的值．

12．如图①，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 12\text{cm}$ ， $BC = 16\text{cm}$ ， $AC = 20\text{cm}$ ，现有一动点 P ，从点 A 出发，沿着三角形的边 $AB \rightarrow BC \rightarrow CA$ 运动，回到点 A 停止，速度为 2cm/s ，设运动时间为 t 秒．



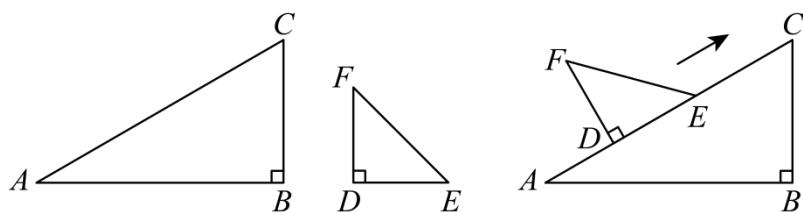
(1)如图①当 $t =$ _____时， $\triangle APC$ 的面积等于 48cm^2 ；

(2)如图①，当 $\triangle ABP$ 是等腰三角形时，则符合条件的 P 有_____个，并求出 t 的值；（求出 3 个即可）

(3)如图②，点 D 在 BC 边上 $CD = \frac{1}{4}BC$ ，点 E 在 AC 边上 $CE = \frac{1}{4}AC$ ， $ED \perp BC$ ，在 $\triangle ABC$ 的边上，若另外有一个动点 Q 与点 P 同时从点 A 出发，沿着边 $AC \rightarrow CB \rightarrow BA$ 运动，回到点 A 停止．在两点运动过程中的某一时刻，恰好 $\triangle APQ$ 与 $\triangle EDC$ 全等，求点 Q 的运动速度．

题型六：平移问题

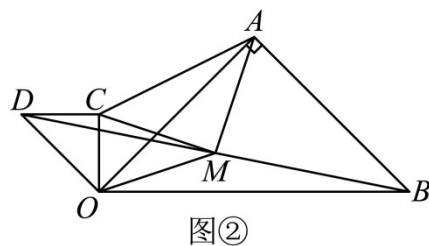
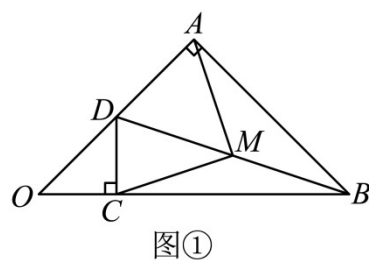
13．某同学在一次课外活动中用硬纸片做了两个直角三角形， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $BC = 6\text{cm}$ ． $\text{Rt}\triangle DEF$ 中， $\angle D = 90^\circ$ ， $\angle E = 45^\circ$ ， $DE = 4\text{cm}$ ．该同学将 $\triangle DEF$ 的直角边 DE 与 $\triangle ABC$ 的斜边 AC 重合在一起，并将 $\triangle DEF$ 沿 AC 方向移动，在移动过程中， D 、 E 两点始终在 AC 边上．



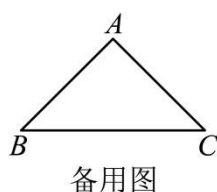
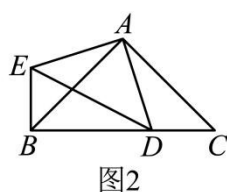
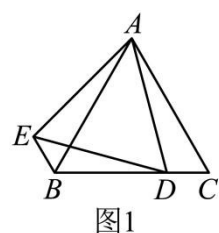
- (1) 当 $\triangle DEF$ 移动至什么位置，即 AD 的长为多少时， F 、 C 的连线与 AB 平行？
- (2) 当 $\triangle DEF$ 移动至什么位置，即 AD 的长为多少时，以线段 AD 、 FC 、 BC 的长为三边长的三角形是直角三角形？
- (3) 在 $\triangle DEF$ 的移动过程中，是否存在某个位置，使得 $\angle FCD = 15^\circ$ ？如果存在，求出 AD 的长；如果不存在，说明理由。

题型七：旋转问题

14. 等腰直角三角形 OAB 中， $\angle OAB = 90^\circ$ ， $OA = AB$ ，点 D 为 OA 中点， $DC \perp OB$ ，垂足为 C ，连接 BD ，点 M 为线段 BD 中点，连接 AM ， CM ，如图①。



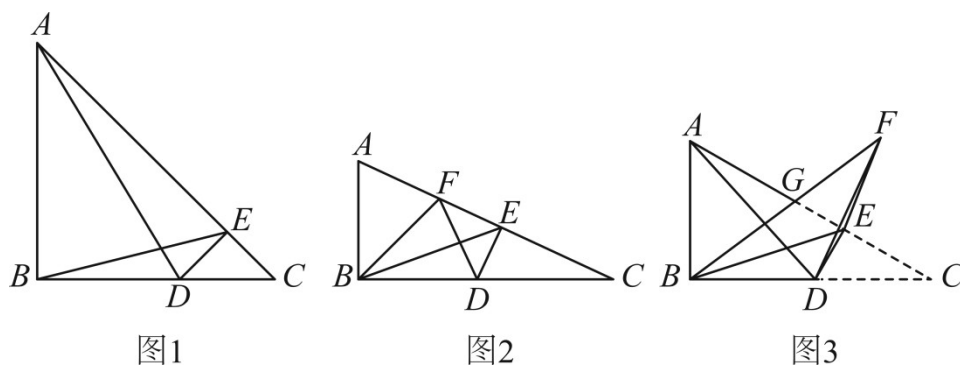
- (1) 求证： $AM = CM$ ；
- (2) 将图①中的 $\triangle OCD$ 绕点 O 逆时针旋转 90° ，连接 BD ，点 M 为线段 BD 中点，连接 AM ， CM ， OM ，如图②。
- ① 求证： $AM = CM$ ， $AM \perp CM$ ；
- ② 若 $AB = 4$ ，求 $\triangle AOM$ 的面积。
15. 如图 1，在等腰三角形 ABC 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = \beta$ ，点 D 是直线 BC 上一点，连接 AD ，将线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 β 得到线段 AE ，连接 DE ， BE 。



- (1) 当 $\beta = 60^\circ$ ，且点 D 在线段 BC 上时，线段 BE 与 CD 之间的数量关系是_____。
- (2) 如图 2，当 $\beta = 90^\circ$ ，且点 D 在线段 BC 上时，猜想线段 BD ， CD ， DE 之间的数量关系，并说明理由。
- (3) 当 $\beta = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $CD = \sqrt{2}$ 时，求 DE 的长。

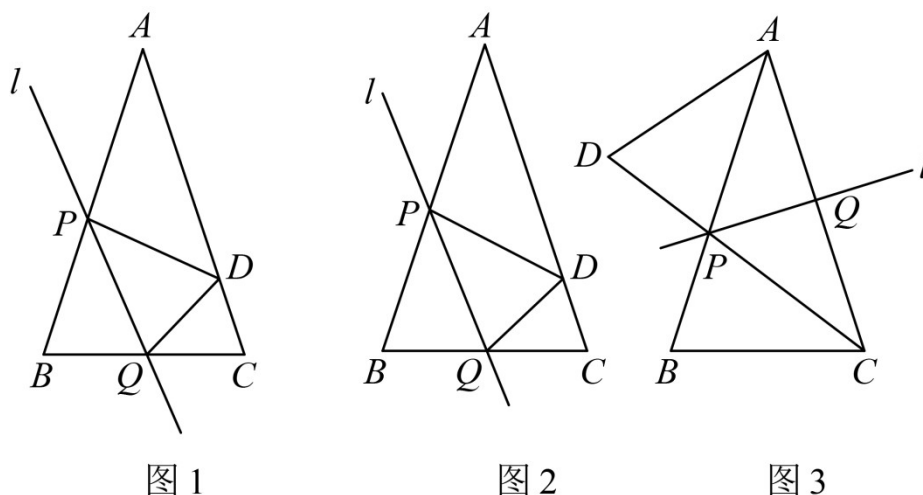
题型八：翻折问题

16. 如图，已知在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， E 为 AC 边上一点，连接 BE ，过 E 作 $ED \perp AC$ ，交 BC 边于点 D 。



- (1) 如图 1，连接 AD ，若 $CE = 2$ ， $BD = 3\sqrt{2}$ ， $\angle C = 45^\circ$ ，求 $\triangle ADE$ 的面积；
- (2) 如图 2，作 $\angle ABC$ 的角平分线交 AC 于点 F ，连接 DF ，若 $\angle BDE = \angle CDF$ ，求证： $AE + DE = \sqrt{2}BE$ ；
- (3) 如图 3，若 $\angle C = 30^\circ$ ，将 $\triangle BCE$ 沿 BE 折叠，得到 $\triangle BEF$ ，且 BF 与 AC 交于点 G ，连接 AD ， DF ，点 E 在 AC 边上运动的过程中，当 $BF \perp AC$ 时，直接写出 $\frac{DF}{DA}$ 的值。

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 P 是 AB 边上的动点（不与点 A 、 B 重合），把 $\triangle ABC$ 沿过点 P 的直线 l 折叠，点 B 的对应点是点 D ，折痕为 PQ 。



(1) 若点 D 恰好在 AC 边上。

① 如图 1，当 $PQ \parallel AC$ 时，连接 AQ ，求证： $AQ \perp BC$ 。

② 如图 2，当 $DP \perp AB$ ，且 $BP = 3$ ， $CD = 2$ ，求 $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDQ$ 的周长差。

(2) 如图 3，点 P 在 AB 边上运动时，若直线 l 始终垂直于 AC ， $\triangle ACD$ 的面积是否变化？请说明理由。

题型九：新定义题

18. 定义：在 $\triangle ABC$ 中，若 $BC = a$ ， $AC = b$ ， $AB = c$ ， a, b, c 满足 $ac + a^2 = b^2$ 则称这个三角形为“类勾股三角形”。请根据以上定义解决下列问题：

(1) 命题：“直角三角形都是类勾股三角形”是 _____ (填“真”或“假”) 命题。

(2) 如图 1 所示、若等腰三角形 ABC 是“类勾股三角形”，其中 $AB = BC$ ， $AC > AB$ ，请求 $\angle A$ 的度数。

(3) 如图 2 所示，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 2\angle A$ ，且 $\angle C > \angle A$ 。

① 当 $\angle A = 28^\circ$ 时，你能把这三角形分成两个等腰三角形吗？若能，请在图 2 中画出分割线，并标注被分割后的两个等腰三角形的顶角的度数；若不能，请说明理由。

② 请证明 $\triangle ABC$ 为“类勾股三角形”。

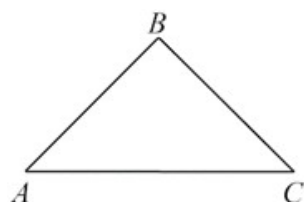


图1

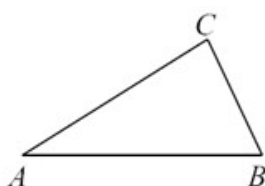
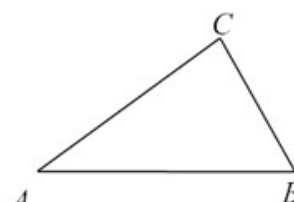


图2



备用图

19. 新定义：至少有一组邻边相等且对角互补的四边形叫作邻补四边形。

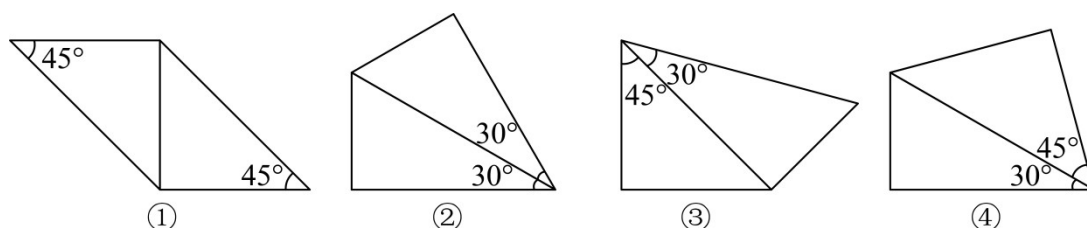


图1

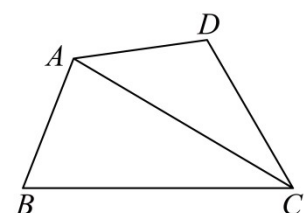


图2

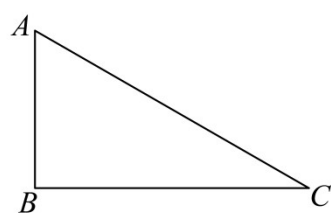


图3

- (1) 如图 1，用分别含有 30° 和 45° 的直角三角形纸板拼出的 4 个四边形，其中邻补四边形的是——；
- (2) 如图 2，已知四边形 $ABCD$ 是邻补四边形， $AB = AD$ ， $\angle BCD = 60^\circ$ ， $BC = 5$ ， $CD = 3$ ，求边 AC 的长；
- (3) 如图 3，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ， $AC = 4$ ，点 M 、 N 分别在 BC 、 AC 上，连接 MN 、 BN ，如果四边形 $ABMN$ 是邻补四边形，请直接写出 BN 的长。

题型十：勾股定理的证明

20. 勾股定理是人类最伟大的十个科学发现之一，西方国家称之为毕达哥拉斯定理。在我国古书《周髀算经》中就有“若勾三，股四，则弦五”的记载，我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”（如图 1），后人称之为“赵爽弦图”，流传至今。

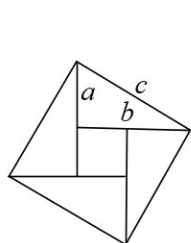


图1

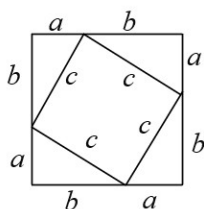


图2

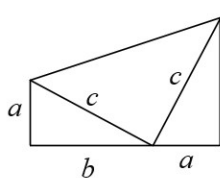


图3

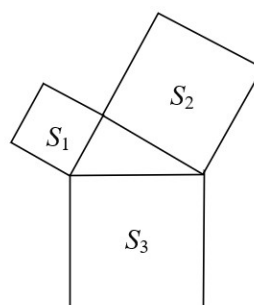


图4

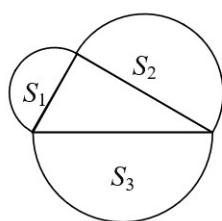


图5

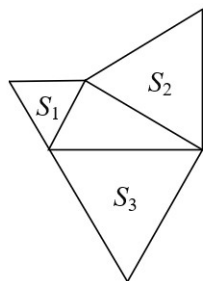


图6

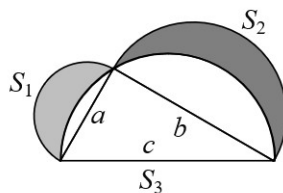


图7

- (1) ① 勾股定理的证明，人们已经找到了 400 多种方法，请从下列几种常见的证明方法中任选一种来证明该定理（以下图形均满足证明勾股定理所需的条件）；
- ② 如图 1，大正方形的面积是 17，小正方形的面积是 5，如果将如图 1 中的四个全等的直角三角形按如图 2 的形式摆放，求图 2 中最大的正方形的面积。
- (2) 如图 4、5、6，以直角三角形的三边为边或直径，分别向外部作正方形、半圆、等边三角形，这三个图形中面积关系满足 $S_1 + S_2 = S_3$ 的有——个；
- (3) 如图 7 所示，分别以直角三角形三边为直径作半圆，设图中两个月形图案（图中阴影部分）的面积分别

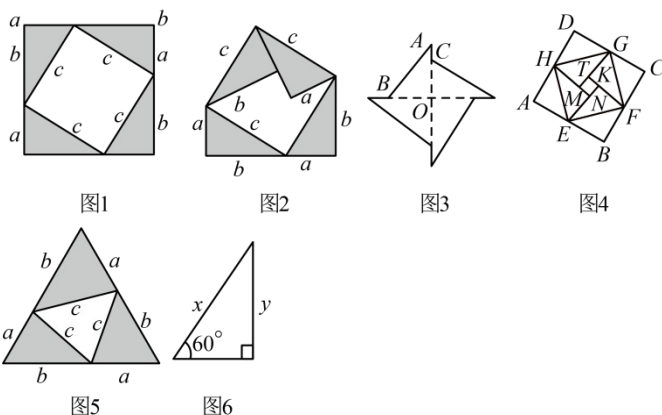
为 S_1 、 S_2 ，直角三角形面积为 S_3 ，请判断 S_1 、 S_2 、 S_3 的关系——。

21. 阅读理解：

【问题情境】教材中小明用 4 张全等的直角三角形纸片拼成图 1，利用此图，可以验证勾股定理吗？

【探索新知】从面积的角度思考，不难发现：大正方形的面积 = 小正方形的面积 + 4 个直角三角形的面积。

从而得数学等式： $(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab$ ，化简证得勾股定理： $a^2 + b^2 = c^2$ 。



- (1) 【初步运用】如图 1，若 $b = 2a$ ，则小正方形面积：大正方形面积 = ；
- (2) 【初步运用】现将图 1 中上方的两直角三角形向内折叠，如图 2，若 $a = 4$ ， $b = 6$ ，此时空白部分的面积为 ；
- (3) 【初步运用】如图 3，将这四个直角三角形紧密地拼接，形成风车状，已知外围轮廓（实线）的周长为 24， $OC = 3$ ，求该风车状图案的面积。
- (4) 【初步运用】如图 4，将八个全等的直角三角形紧密地拼接，记图中正方形 $ABCD$ ，正方形 $EFGH$ ，正方形 $MNKT$ 的面积分别为 S_1 ， S_2 ， S_3 ，若 $S_1 + S_2 + S_3 = 40$ ，则 $S_2 =$ 。
- (5) 【迁移运用】如果用三张含 60° 的全等三角形纸片，能否拼成一个特殊图形呢？带着这个疑问，小丽拼出图 5 的等边三角形，你能否仿照勾股定理的验证，发现含 60° 的三角形三边 a 、 b 、 c 之间的关系，写出此等量关系式及其推导过程（知识补充：如图 6，含 60° 的直角三角形，对边 y ：斜边 $x =$ 定值 k ）。