

专题 03 三角形中的导角模型

题型归纳

(1) 常见的三种基本模型

	A 字型	8 字型	燕尾型
图形			
结论	$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$ $\angle BDC + \angle CED = 180^\circ + \angle A$	$\angle B + \angle C = \angle ADE + \angle AED$	$\angle BOC = \angle A + \angle B + \angle C$

(2) 双角平分线的夹角模型

	模型一 (双内角平分线)	模型二 (双外角平分线)	模型三 (内外角平分线)
图形			
结论	$\angle D = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$	$\angle D = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$	$\angle D = \frac{1}{2} \angle A$

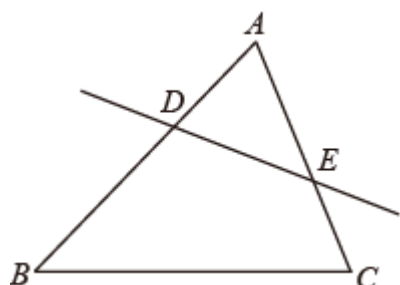
题型专练

题型 01 A 字型

“A 字型”是一个常见的几何模型，指的是一条直线截三角形两边形成一个相似大写子母“A”的图形。

【典例 1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 65^\circ$ ，直线 DE 交 AB 于点 D ，交 AC 于点 E ，则 $\angle BDE + \angle CED =$

() .



A . 180°

B . 215°

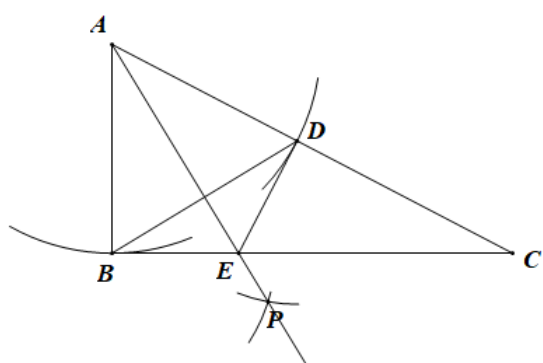
C . 235°

D . 245°

【变式 1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，以点 A 为圆心，以 AB 的长为半径作弧交 AC 于

点 D ，连接 BD ，再分别以点 B ， D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BD$ 的长为半径作弧，两弧交于点 P ，作射线 AP 交 BC

于点 E ，连接 DE ，则下列结论中不正确的是 ()



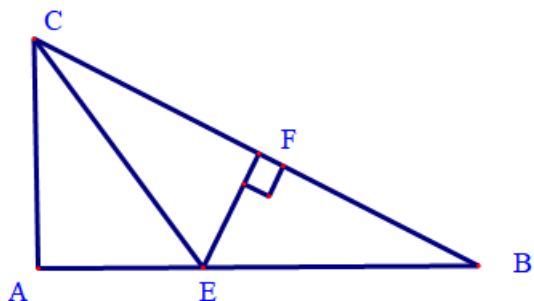
A . $BE = DE$

B . DE 垂直平分线段 AC

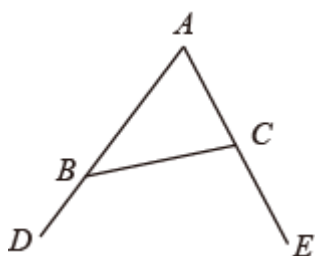
C . $\angle DEC = 2\angle C$

D . $S_{\triangle DEC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$

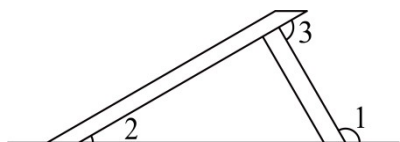
【变式2】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，CE 平分 $\angle ACB$ ，作 E 作 $EF \perp CB$ 于点 F ，若 $\angle ACE = \alpha + 15^\circ$ ， $\angle FEB = 90^\circ - 2\alpha$ ，则 $\angle ECB =$ _____ $^\circ$ 。



【变式3】 如图所示， $\angle DAE$ 的两边上各有一点 B, C ，连接 BC ，求证 $\angle DBC + \angle ECB = 180^\circ + \angle A$ 。



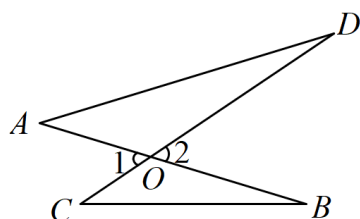
【变式4】 如图是某建筑工地上的人字架，若 $\angle 1 = 120^\circ$ ，那么 $\angle 3 - \angle 2$ 的度数为 _____。



题型 02 8 字型

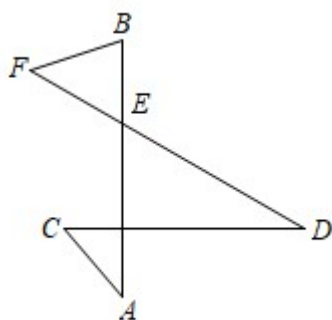
“8字”模型又叫“蝴蝶型”，指两个三角形共顶点，且两边互为反向延长线，形似数字“8”，故得名“8字”型。

【典例 1】 如图， AB 和 CD 相交于点 O ， $\angle A = \angle C$ ，则下列结论中不能完全确定正确的是 ()



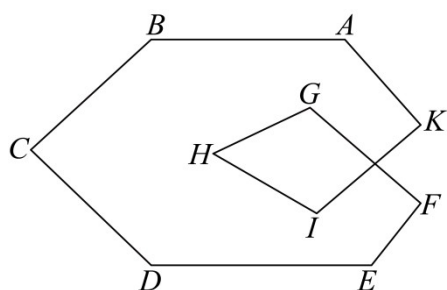
- A. $\angle B = \angle D$ B. $\angle 1 = \angle A + \angle D$ C. $\angle 2 > \angle D$ D. $\angle C = \angle D$

【变式 1】 如图，在由线段 AB, CD, DF, BF, CA 组成的平面图形中， $\angle D = 28^\circ$ ，则 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle F$ 的度数为 ()。



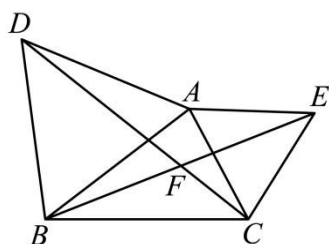
- A. 262° B. 152° C. 208° D. 236°

【变式 2】 如图， $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G + \angle H + \angle I + \angle K$ 的度数为__。



【变式 3】 如图， A, B, C 三点不共线， $\triangle ABD$ 和 $\triangle AEC$ 都是等边三角形，且 $\angle DAB = \angle CAE = 60^\circ$ ， CD 与

BE 交于点 F .



求 $\angle CFE$ 的度数 .

【变式 4】 线段 AB 、 CD 相交于点 O ，连接 AD 、 CB ，我们把如图 1 的图形称之为“8 字形”，则

$\angle A + \angle D = \angle B + \angle C$ ，如图 2，在图 1 的条件下， $\angle DAB$ 和 $\angle BCD$ 的平分线 AP 和 CP 相交于点 P ，并且与

CD 、 AB 分别相交于 M 、 N ，若 $\angle B = 30^\circ$ ， $\angle D = 40^\circ$ ，则 $\angle P$ 的度数是_____ .

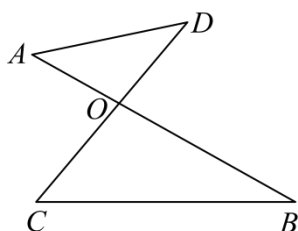


图1

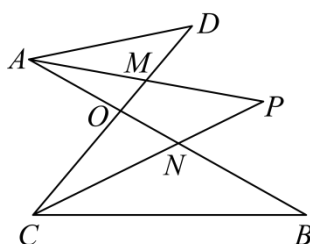
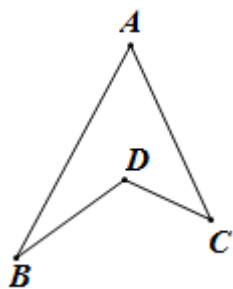


图2

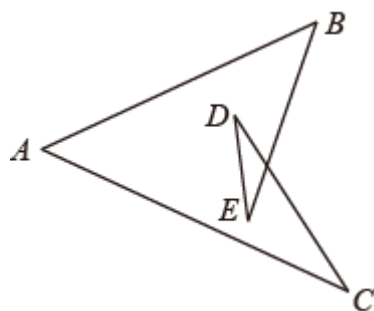
题型 03 燕尾型

“燕尾型”模型是两各三角形叠在一起，形似燕子尾巴，故称“燕尾型”，又称剪刀型.

【典例 1】 如图所示，已知四边形 $ABDC$ ，求证 $\angle BDC = \angle A + \angle B + \angle C$.



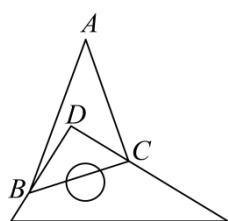
【变式1】 如图所示， $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ 的结果为 ()



- A . 90° B . 360° C . 180° D . 无法确定

【变式2】 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 40^\circ$ ，现将一块直角三角板放在 $\triangle ABC$ 上，使三角板的两条直角

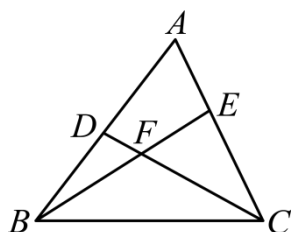
边分别经过点 B, C ，直角顶点 D 落在 $\triangle ABC$ 的内部，则 $\angle ABD + \angle ACD = ()$.



- A . 90° B . 60° C . 50° D . 40°

【变式3】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 上一点， E 是 AC 上一点， BE 、 CD 相交于点 F ， $\angle A = 62^\circ$ ，

$\angle ACD = 35^\circ$ ， $\angle ABE = 20^\circ$. 求 $\angle BFD$ 的度数 .



【变式4】 模型规律：如图¹，延长 CO 交 AB 于点 D ，则 $\angle BOC = \angle 1 + \angle B = \angle A + \angle C + \angle B$.

因为凹四边形 $ABOC$ 形似箭头，其四角具有“ $\angle BOC = \angle A + \angle B + \angle C$ ”这个规律，所以我们把这个模型叫做“燕尾型”。

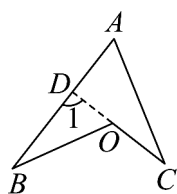


图1

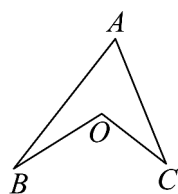


图2

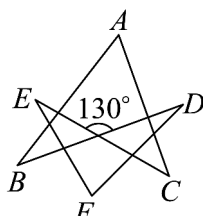


图3

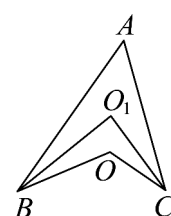


图4

模型应用

(1) 直接应用：

① 如图 2， $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 20^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，则 $\angle BOC = \underline{\quad}^\circ$ ；

② 如图 3， $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = \underline{\quad}^\circ$ ；

(2) 拓展应用：

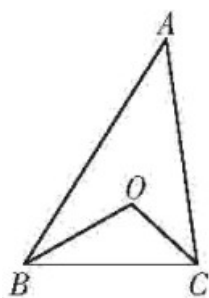
如图 4， $\angle ABO$ 、 $\angle ACO$ 的 2 等分线（即角平分线） BO_1 、 CO_1 交于点 O_1 ，已知 $\angle BOC = 120^\circ$ ，

$\angle BAC = 50^\circ$ ，则 $\angle BO_1C = \underline{\quad}^\circ$ ；

题型 04 三角形双角平分线的夹角模型

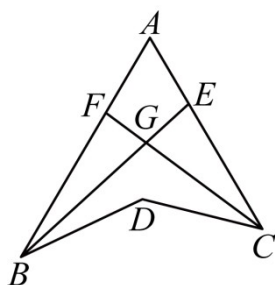
“三角形角平分线夹角”模型是分三种类型：两条内角平分线、两条外角平分线、一个内角一个外角平分线，无论哪种类型涉及到的知识点都离不开三角形内角和、外角性质、角平分线性质的等。

【典例 1】 如下图，在 $\triangle ABC$ 中， BO ， CO 分别平分 $\angle ABC$ ， $\angle ACB$ 。若 $\angle BOC = 100^\circ$ ，求 $\angle A$ 的度数。



【变式1】如图， BE 平分 $\angle ABD$ ， CF 平分 $\angle ACD$ ， BE 与 CF 交于点 G ，若 $\angle BDC = 140^\circ$ ，

$\angle BGC = 100^\circ$ ，则 $\angle A =$ ()



A . 80°

B . 75°

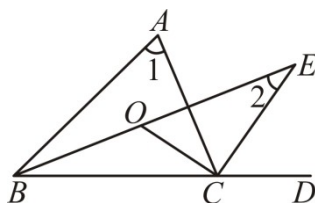
C . 60°

D . 45°

【变式2】如图，在 $\triangle ABC$ 中， BO ， CO 分别平分 $\angle ABC$ ， $\angle ACB$ ， CE 为外角 $\angle ACD$ 的平分线，交 BO 的

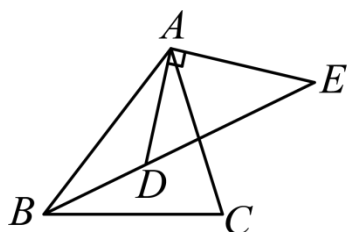
延长线于点 E ，记 $\angle BAC = \angle 1$ ， $\angle BEC = \angle 2$ ．给出下列结论：① $\angle 1 = 2\angle 2$ ；② $\angle BOC = 3\angle 2$ ；③

$\angle BOC = 90^\circ + \angle 1$ ；④ $\angle BOC = 90^\circ + \angle 2$ ．其中正确的是_____．（填序号）



【变式3】如图¹， AD 、 BD 分别是 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle BAC$ 、 $\angle ABC$ 的平分线，过点 A 作 $AE \perp AD$ ，交 BD

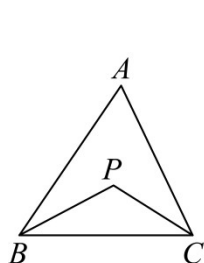
的延长线于点 E ．



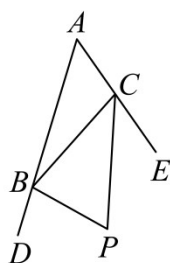
求证： $\angle E = \frac{1}{2} \angle C$ ；

【变式4】 请你参与下面的探究过程，并完成所提出的问题。

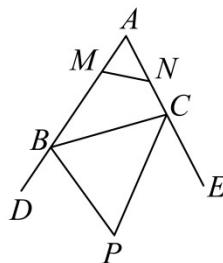
【探究】



图①



图②



图③

(1) 如图①，点P是 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle ABC$ 与内角 $\angle ACB$ 的平分线BP和CP的交点，若 $\angle A = 70^\circ$ ，则

$\angle BPC =$ _____ $^\circ$.

(2) 如图②，点P是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle DBC$ 与外角 $\angle ECB$ 的平分线BP和CP的交点。求证：

$\angle BPC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$.

【拓展】

(3) 如图③，点P是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle DBC$ 与外角 $\angle ECB$ 的平分线BP和CP的交点，点M、N分别在边

AB、AC上，连接MN。设 $\angle BMN + \angle CNM = x$.

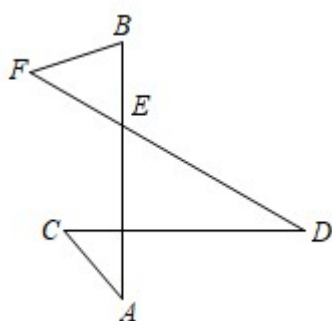
① $\angle BPC$ 与x的数量关系是_____ .

②当 $\triangle BPC$ 为锐角三角形时，直接写出 x 的取值范围．

题型强练

1. 如图，在由线段 AB, CD, DF, BF, CA 组成的平面图形中， $\angle D = 28^\circ$ ，则 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle F$ 的度数为

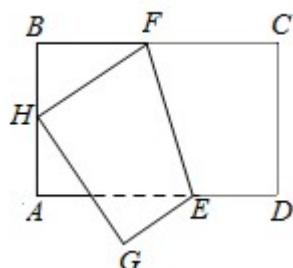
() ．



- A . 262° B . 152° C . 208° D . 236°

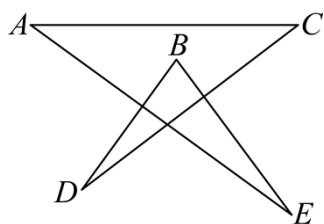
2. 如图，将长方形纸片 $ABCD$ 沿 EF 折叠，点 C 落在边 AB 上的点 H 处，点 D 落在点 G 处，若

$\angle GEF = 111^\circ$ ，则 $\angle AHG$ 的度数为 () ．

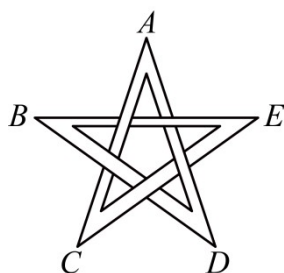


- A . 42° B . 69° C . 44° D . 32°

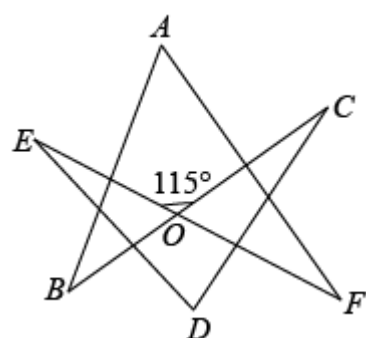
3. 如图， $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E =$ _____ 度．



4. 如图，是一个五角星环饰，则 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E =$ _____ .

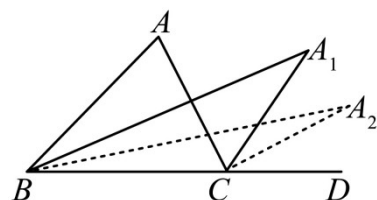


5. 如图，若 $\angle EOC = 115^\circ$ ，则 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F =$ _____ .

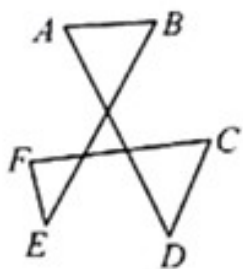


6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \alpha$ ， $\angle ABC$ 与 $\angle ACD$ 的平分线交于点 A_1 ，得 $\angle A_1$ ； $\angle A_1BC$ 与 $\angle A_1CD$ 的平分

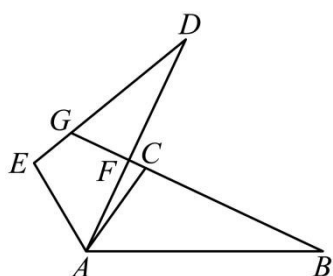
线相交于点 A_2 ，得 $\angle A_2$ ； $\angle A_{2019}BC$ 与 $\angle A_{2019}CD$ 的平分线相交于点 A_{2020} ，得 $\angle A_{2020}$ ，则 $\angle A_{2020} =$ _____ .



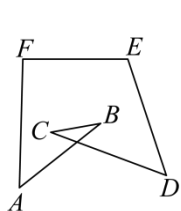
7. 如图所示，求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ 的度数.



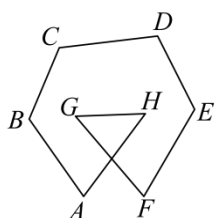
8. 如图所示, $\triangle ABC \cong \triangle ADE$, 且 $\angle CAD = 10^\circ$, $\angle D = 25^\circ$, $\angle EAB = 120^\circ$, 求 $\angle DFB$ 和 $\angle DGB$ 的度数.



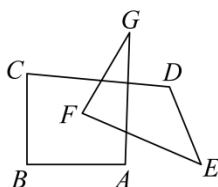
9. (1) 如图①, 求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ 的度数;
- (2) 如图②, 求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G + \angle H$ 的度数;
- (3) 如图③, 求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G$ 的度数.



图①



图②



图③

10. 【模型探究】(1) 如图①, 已知线段 AD 、 BC 相交于点 O , 连接 AB 、 CD , 则有

$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$. 我们把形如这样的图形称为“八字”模型 . 甲乙两名同学给出两种不同证明过程如下 :

甲同学证明 : $\because \angle A + \angle B + \angle AOB = 180^\circ$ (①———) , $\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ - \angle AOB$

同理可得 , $\angle C + \angle D = 180^\circ - \angle COD$,

又 $\because \angle AOB = \angle COD$,

$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D$.

乙同学证明 : $\because \angle AOC = \angle A + \angle B$ (②———) ,

$\angle AOC = \angle C + \angle D$,

$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D$.

甲同学证明过程的理论依据是 : ①——— ;

乙同学证明过程的理论依据是 : ②——— .

【模型应用】 (2) 如图② , 已知线段 AD 、 BC 相交于点 O , 连接 AB 、 CD , AP 、 CP 分别平分 $\angle BAD$ 、 $\angle BCD$.

①若 $\angle B = 30^\circ$, $\angle D = 20^\circ$, 求 $\angle P$ 的度数 .

补全下面求解过程 .

解 : $\because AP$ 、 CP 分别平分 $\angle BAD$ 、 $\angle BCD$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

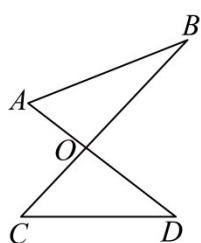
由“八字”模型知 ,

求解过程缺失

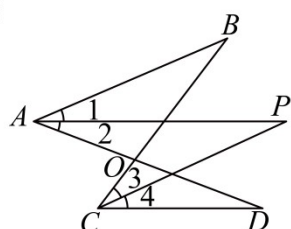
②若 $\angle B = \alpha$, $\angle D = \beta$, 直接写出 $\angle P =$ _____ (用含有 α 和 β 的代数式表示) .

【模型拓展】 (3) 如图③, 已知线段 AD 、 BC 相交于点 O , 连接 AB 、 CD , AP 、 CP 分别为 $\angle BAD$ 、 $\angle BCD$ 的三等分线, $\angle PAD = \frac{1}{3} \angle BAD$, $\angle PCB = \frac{1}{3} \angle BCD$, 若 $\angle B = 25^\circ$, $\angle D = 38^\circ$,

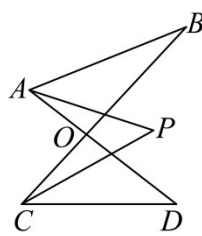
$\angle BAD + \angle BCD = 105^\circ$, 直接写出 $\angle P$ 的度数 = _____ .



图①



图②



图③

11. 如图¹所示的图形, 像我们常见的学习用品——圆规. 我们不妨把这样图形叫做“规形图”, 请发挥你

的聪明才智, 解决以下问题:

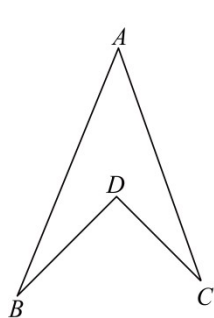


图1

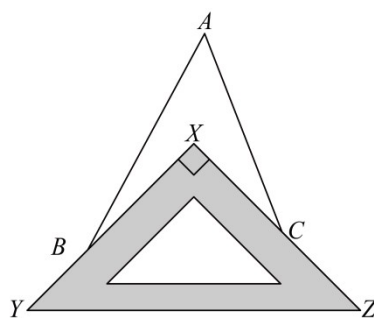


图2

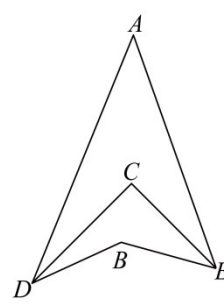


图3

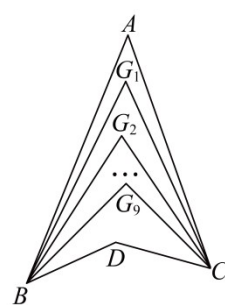


图4

(1) 观察“规形图”, 试探究 $\angle BDC$ 与 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之间的关系, 并说明理由;

(2) 请你直接利用以上结论, 解决以下三个问题:

①如图 2，把一块三角尺 XYZ 放置在 $\triangle ABC$ 上，使三角尺的两条直角边 XY 、 XZ 恰好经过点 B 、 C ，若

$\angle A = 50^\circ$ ，直接写出 $\angle ABX + \angle ACX$ 的结果；

②如图 3， DC 平分 $\angle ADB$ ， EC 平分 $\angle AEB$ ，若 $\angle DAE = 50^\circ$ ， $\angle DBE = 130^\circ$ ，求 $\angle DCE$ 的度数；

③如图 4， $\angle ABD$ 、 $\angle ACD$ 的 10 等分线相交于点 G_1 、 G_2 、 $\dots$ 、 G_9 ，若 $\angle BDC = 140^\circ$ ， $\angle BG_1C = 77^\circ$ ，求 $\angle A$ 的度数。

12. 直线 MN 与直线 PQ 垂直相交于 O ，点 A 在直线 PQ 上运动，点 B 在直线 MN 上运动。

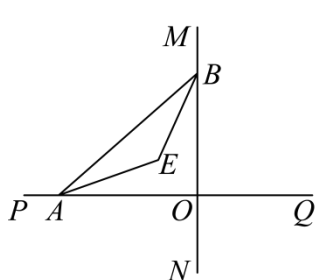


图1

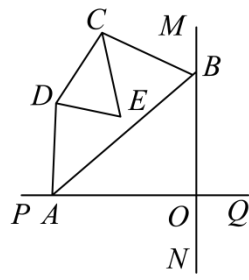


图2

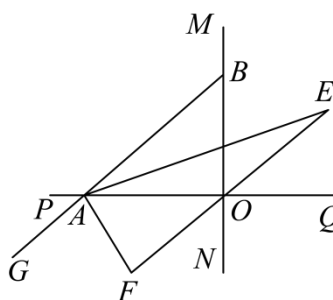


图3

(1)如图 1，已知 AE 、 BE 分别是 $\angle BAO$ 和 $\angle ABO$ 角的平分线，点 A 、 B 在运动的过程中， $\angle AEB$ 的大小是否会发生变化？若发生变化，请说明变化的情况；若不发生变化，试求出 $\angle AEB$ 的大小。

(2)如图 2，已知 AB 不平行 CD ， AD 、 BC 分别是 $\angle BAP$ 和 $\angle ABM$ 的角平分线，又 DE 、 CE 分别是 $\angle ADC$ 和

$\angle BCD$ 的角平分线，点 A, B 在运动的过程中， $\angle CED$ 的大小是否会发生变化？若发生变化，请说明理由；

若不发生变化，试求出其值．

(3)如图 3，延长 BA 至 G ，已知 $\angle BAO$ 、 $\angle OAG$ 的角平分线与 $\angle BOQ$ 的角平分线及延长线相交于 E, F ，在

$\triangle AEF$ 中，如果有一个角是另一个角的 3 倍，试求 $\angle ABO$ 的度数．