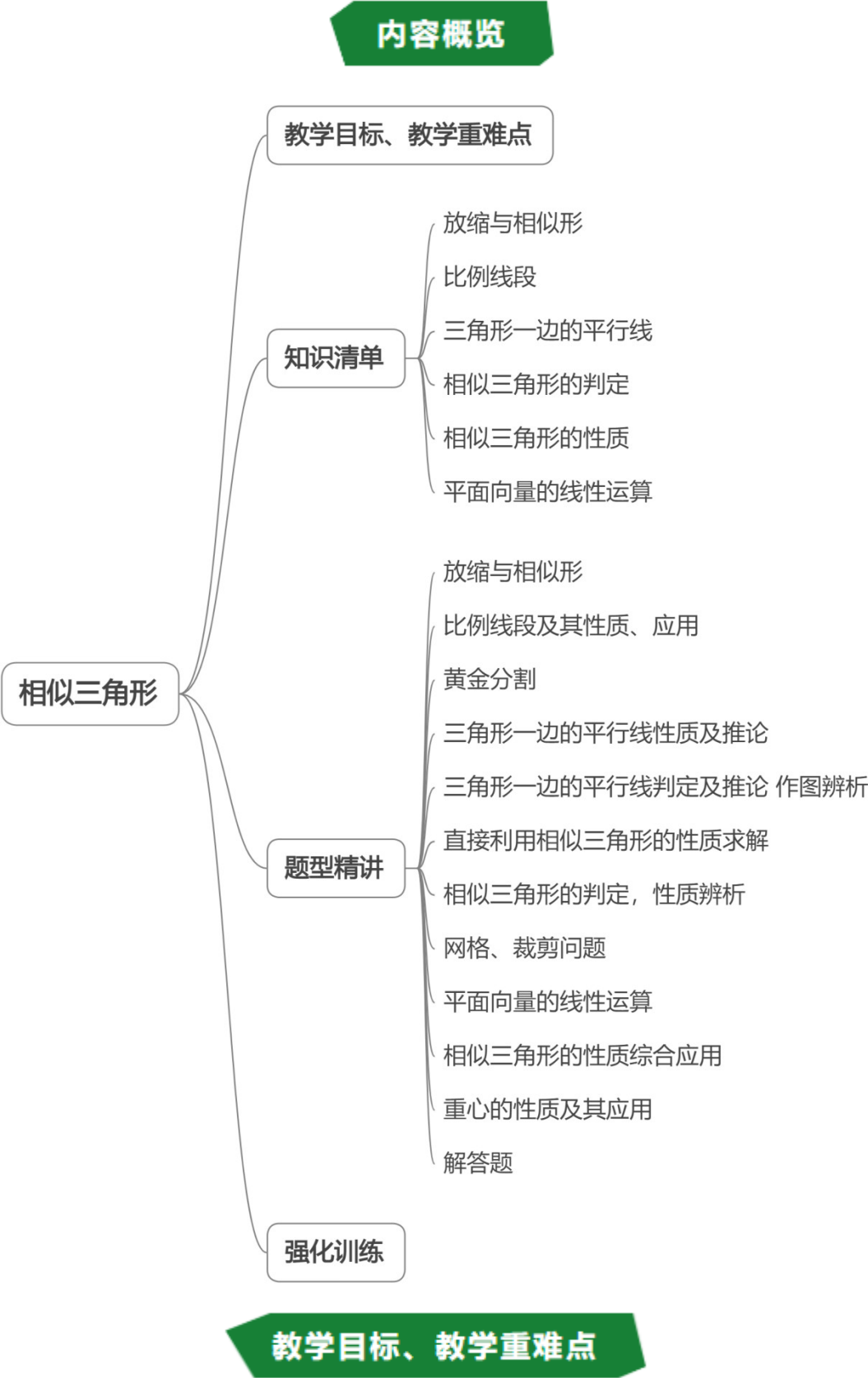


第 24 章 相似三角形



教学目标	1. 了解比例的基本性质，了解线段的比、成比例线段的概念； 2. 知道比例线段的性质；三角形一边平行线的性质定理与判定定理及其推论； 3. 知道相似三角形的对应角相等，对应边成比例，周长的比等于对应边的比，面积的比等于对应边比的平方； 4. 了解两个三角形相似的概念，探索两个三角形相似的条件； 5. 理解实数与向量相乘的定义及向量数乘的运算律.平面向量的线性运算.
教学重难点	1.重点 (1) 比例线段及其性质；黄金分割； (2) 三角形一边的平行线的性质定理、判定定理及其推论；平行线分线段成比例 (3) 相似三角形的判定与性质； (4) 实数与向量相乘；平面向量的线性运算. 2.难点 (1) 比例线段的性质、三角形一边的平行线的几何应用； (2) 相似三角形的判定与性质综合； (3) 动态几何问题；分类讨论思想等.

知识清单

知识点 1 放缩与相似形

1.图形的放缩运动

图形的放大或缩小，称为**图形的放缩运动**.将一个图形放大或缩小后，就得到与它形状相同的图形.

2.相似形

①**相似形**：我们把**形状相同的两个图形**说成是**相似的图形**，或者说就是**相似形**.

②相似的图形，它们的大小不一定相同.对于大小不同的两个相似形，可以看作大的图形由小的图形放大而得到，或小的图形由大的图形缩小而得到.

③对于**大小相同的两个相似形**，它们可以重合这时它们是**全等形**.

3.相似多边形

一般来说，两个多边形是相似形，就是说它们同为 **n 边形而且形状相同**.也就是这两个多边形的角对应相等，边的长度对应成比例.

如果四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似，且点 A 、 B 、 C 、 D 分别与点 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 对应，则记作：“四边形 $ABCD \sim$ 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ ”.

4.相似多边形的性质

根据多边形相似的含义，得到：

①如果两个多边形是相似形，那么这两个多边形的**对应角相等**，**对应边的长度成比例**.

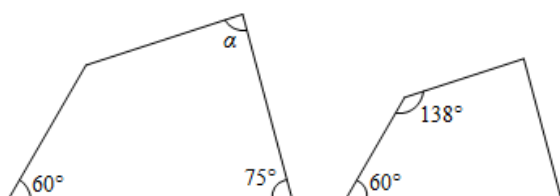
②当两个相似的多边形是**全等形**时，它们的对应边的长度的**比值都是1**。

【即学即练】

1. 下列各组图形中，一定相似的是 ()

- A. 两个菱形 B. 两个正方形 C. 两个三角形 D. 两个等腰三角形

2. 若如图所示的两个四边形相似，则 $\angle\alpha$ 的度数是 ()



- A. 75° B. 60° C. 87° D. 120°

3. 下列关于“相似形”的说法中正确的是 ()

- A. 相似形形状相同、大小不同 B. 图形的放缩运动可以得到相似形
C. 对应边成比例的两个多边形是相似形 D. 相似形是全等形的特例

知识点2 比例线段

1. 成比例：

如果 $a:b=c:d$ (或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$), 那么就说 a 、 b 、 c 、 d 成比例。

2. 两条线段的比：两条线段的长度的比叫做两条线段的比。

3. 求两条线段的比时，对这两条线段一定要用同一长度单位来度量。因为线段的长度是正量，所以两条线段的比值总是正数。

4. 成比例线段 (比例线段)

在图 24-6 中，DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线。线段 DE 与 BC 的比可记作 $\frac{DE}{BC}$ (或 DE:BC), 于是得到 $\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$ 。在四条线段中，如果其中两条线段的比与另两条线段的比相等，那么这四条线段叫做成比例线段，简称比例线段。

例如图 24-6 中，根据 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线的条件，可得 $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$ ，则线段 DE、BC、AD、AB 是比例线段。

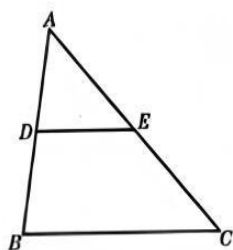


图 24-6

5.比例线段的基本性质：如果 a 、 b 、 c 、 d 是比例线段，即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (或 $a:b=c:d$)，那么线段 a 、 d 是比例外项，线段 b 、 c 是比例内项。

我们知道，比例线段有以下基本性质：两个外项的积等于两个内项的积。即

如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那么 $ad=bc$ 。

还可以得到 $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ， $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ， $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

6.合比性质：如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那么 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ 。

如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，那么 $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ 。

7.等比性质：如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ，那么 $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ 。

8.等比性质的推广

等比性质可以推广到任意有限多个相等的比的情形。例如：

如果 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$

那么 $\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$

对于其他的同类量，也有与线段一样的比例性质。但在实数范围内，要注意式中的分母不能为零，如 $b+d \neq 0, b_1+b_2+b_3 \neq 0$ 等

9.比例中项

在比例式 $\frac{PB}{AP} = \frac{AP}{AB}$ 中，两个内项都是线段 AP ，这时线段 AP 称为线段 AB 与 PB 的**比例中项**。

10.黄金分割

如果点 P 把线段 AB 分割成 AP 和 PB ($AP > PB$) 两段 (如图 24-9)，其中 AP 是 AB 和 PB 的比例中项，那么称这种分割为**黄金分割**，点 P 称为线段 AB 的**黄金分割点**。

注意：一般来说，一条线段的黄金分割点有两个。

AP 与 AB 的比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 称为**黄金分割数**(简称**黄金数**).黄金分割数是一个**无理数**，在应用时常取它的近似值 0.618.

【即学即练】

1. 下列各组中的四条线段成比例的是 ()

A. 2cm, 3cm, 4cm, 5cm

B. 2cm, 3cm, 4cm, 6cm

C. 1cm, 2cm, 3cm, 2cm

D. 3cm, 2cm, 6cm, 3cm

2. 在比例尺为 1:200000 的某地旅游地图上，经测量 A 景点与 B 景点相距约 20 cm，则这两景点实际距离约 km.

3. 如果 6 是 3 和 x 的比例中项，那么 $x =$ _____.

4. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ ，那么下列四个选项中一定正确的是 ()

A. $\frac{3x}{y} = \frac{9}{4}$

B. $\frac{x+3}{y+3} = \frac{6}{7}$

C. $\frac{x^2}{y} = \frac{9}{4}$

D. $\frac{x+y}{x-y} = 7$

5. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > PB$)， $AP = 4$ ，那么 AB 的长是_____.

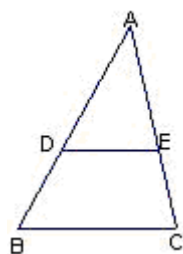
知识点 3 三角形一边的平行线

1. 三角形一边的平行线性性质定理 平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的对应线段成比例.

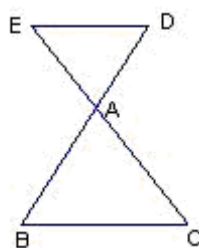
2. 三角形一边的平行线性性质定理推论 平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的三角形的三边与原三角形的三边对应成比例.

要点：

(1) 主要的基本图形：分 A 型和 X 型；



A 型



X 型

(2) 常用的比例式： $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$

对应线段成比例可用下面的语言形象表示：

$$\frac{\text{上}}{\text{下}} = \frac{\text{上}}{\text{下}}, \frac{\text{上}}{\text{全}} = \frac{\text{上}}{\text{全}}, \frac{\text{左上}}{\text{右上}} = \frac{\text{左全}}{\text{右全}} \text{ 等等.}$$

3.三角形一边的平行线判定定理：如果一条直线截三角形的两边所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.

4.三角形一边的平行线推论：如果一条直线截三角形两边的延长线（这两边的延长线在第三边的同侧）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.

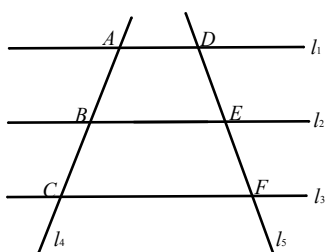
要点：

判断平行线的条件中，只能是被截的两条直线的对应线段成比例(被判断的平行线本身不能参与作比例).

5.平行线分线段成比例定理：两条直线被三条平行的直线所截，截得的对应线段成比例.

6.平行线等分线段定理：两条直线被三条平行的直线所截，如果在一条直线上截得的线段相等，那么在另一条直线上截得的线段也相等.

已知如图，直线 l_1, l_2, l_3 是一组等距离的平行线， l_4, l_5 是任意画的两条直线，分别于这组平行线一下相交于点 A, B, C, D, E, F ，则比例式 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}, \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}, \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}, \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$ ，成立.



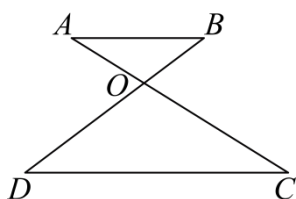
要点：

(1) 平行线等分线段定理是平行线分线段成比例定理的特例；

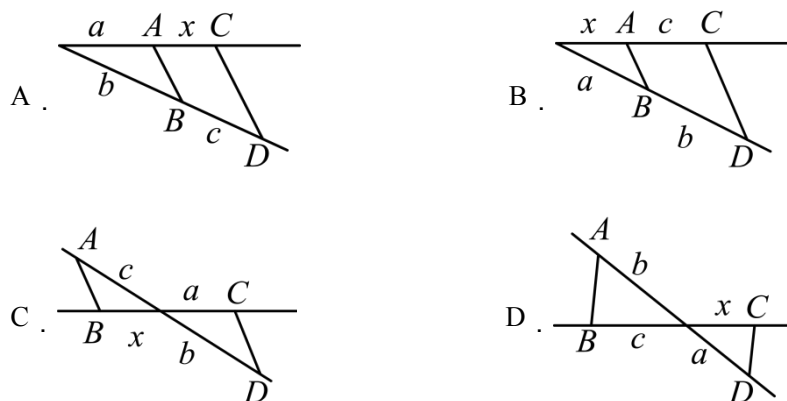
(2) 由于平行线分线段成比例定理中，平行线本身没有参与作比例，因此，有关平行线段的计算问题通常转化到“A”、“X”型中.

【即学即练】

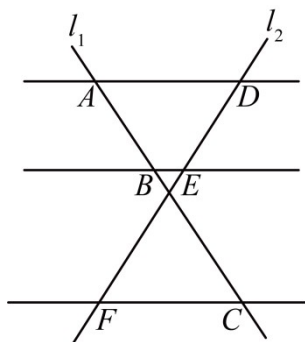
1. 如图，在 $\triangle ODC$ 中，点 A, B 分别在边 CO, DO 延长线上， $AB \parallel CD$ ，如果 $DO = 6$ ， $AO:CO = 2:3$ ，那么 BO 的长是_____.



2. 已知线段 a, b, c ，求作线段 x ，使 $x = \frac{ac}{b}$. 下列作图方法中 ($AB \parallel CD$) 不合理的是 ()



3. 如图，直线 $AD \parallel BE \parallel CF$ ，直线 l_1, l_2 与这三条平行线分别交于点 A, B, C 和点 D, E, F 。若 $AB:BC=1:2$ ， $DE=3$ ，则 DF 的长为_____。



4. $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别为边 AB 和边 AC 上的点，下列式子可以判定 $DE \parallel BC$ 的是 ()

- A. $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}$, $\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$ B. $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$, $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$
- C. $\frac{DB}{AB} = \frac{3}{5}$, $\frac{AE}{AC} = \frac{3}{5}$ D. $\frac{AE}{DB} = \frac{2}{3}$, $\frac{AD}{EC} = \frac{2}{3}$

知识点 4 相似三角形的判定

1. 相似三角形

如果一个三角形的三个角与另一个三角形的三个角对应相等，且它们各自的三边对应成比例，那么这两个三角形叫做相似三角形。

2. 相似三角形的表示

在两个相似三角形中，对应相等的角及其顶点分别是它们的对应角和对应顶点，以对应顶点为端点的边是它们的对应边。

两个三角形是相似三角形，也可以表述为“两个三角形相似”，或“一个三角形与另一个三角形相似”。

如图 24-31，已知 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，那么在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \angle A$, $\angle ADE = \angle B$, $\angle AED = \angle C$;

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$$

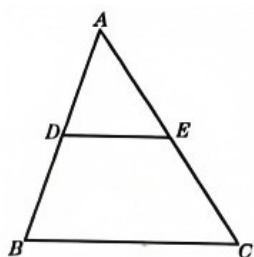


图 24-31

由相似三角形的定义，可知这两个三角形相似.用符号来表示，记作 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$,其中点 A 与点 A、点 D 与点 B、点 E 与点 C 分别是对应顶点；符号“ $\sim$ ”读作“相似于”.

用符号表示两个相似三角形时，通常把对应顶点的字母分别写在三角形记号“ $\triangle$ ”后相应的位置上.

3.相似三角形的性质：相似三角形的对应角相等、对应边成比例.

4.相似比：两个相似三角形的对应边的比，叫做这两个三角形的相似比(或相似系数).

5.两个三角形相似比的关系：设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比为 k , $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 k' ,则 $k' = \frac{1}{k}$.

6.三角形相似的传递性：

如果两个三角形分别与同一个三角形相似，那么这两个三角形也相似.

7.相似三角形判定预备定理：平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交所构成的三角形与原三角形相似.

8.相似三角形判定定理 1：如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似.

9.相似三角形判定定理 2：如果两个三角形的两组对应边的比相等，并且相应的夹角相等，那么这两个三角形相似.

10.相似三角形判定定理 3：如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似.（简述为：三边对应成比例，两个三角形相似）

11.直角三角形相似的判定定理：如果一个直角三角形的斜边及一条直角边与另一个直角三角形的斜边及一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似。

（简述为：斜边和直角边对应成比例，两个直角三角形相似）

【即学即练】

1. 下列各组条件中不能使 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似的是（ ）

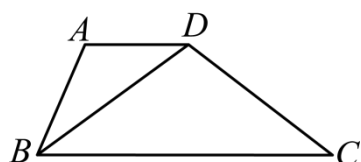
A. $\angle A = \angle D = 40^\circ$, $\angle B = \angle E = 60^\circ$, $AB = DE$

B. $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, $\angle E = 80^\circ$

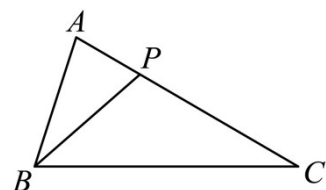
C. $\angle A = \angle D = 50^\circ$, $AB = 3$, $AC = 5$, $DE = 6$, $DF = 10$

D. $\angle B = \angle E = 70^\circ$, $AB : DE = AC : DF$

2. 如图, 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 要使 $\triangle BAD$ 与 $\triangle DBC$ 相似, 还需添加一个条件, 这个条件可以是_____ (只需填一个条件).



3. 如图所示, P 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的一点, 连接 BP , 以下条件中不能判定 $\triangle ABP \sim \triangle ACB$ 的是 ()



A. $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AB}$

B. $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BP}$

C. $\angle ABP = \angle C$

D. $\angle APB = \angle ABC$

知识点 5 相似三角形的性质

1. 根据相似三角形的定义, 可以直接得到相似三角形的性质:

相似三角形的对应角相等, 对应边的比相等.

2. 相似三角形性质定理 1 相似三角形对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比.

3. 相似三角形性质定理 2: 相似三角形周长的比等于相似比.

4. 相似三角形性质定理 3: 相似三角形面积的比等于相似比的平方.

【即学即练】

1. 如果两个相似三角形的对应中线之比为 $2:3$, 那么它们的对应高之比为_____.

2. 已知 $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_3B_3C_3$, $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的相似比为 $2:1$, $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_3B_3C_3$ 的相似比为 $3:1$, 那么 $\triangle A_3B_3C_3$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的相似比为 ()

A. $1:6$

B. $2:3$

C. $3:2$

D. $6:1$

3. 如果两个相似三角形的面积之比为 $4:9$, 则它们的周长之比为 ()

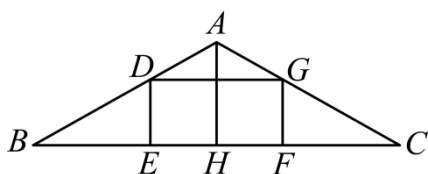
A. $4:9$

B. $2:3$

C. $\sqrt{2}:\sqrt{3}$

D. $16:81$

4. 如图, 长方形 $DEFG$ 的边 EF 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 顶点 D 、 G 分别在 AB 、 AC 上. 已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 长 120cm , 高 AH 为 40cm , 且长方形 $DEFG$ 的长 DG 是宽 DE 的 2 倍, 那么 DE 的长度是_____ cm .



5. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ，如果 $BC = 9$ ， $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\text{四边形}BCED}} = \frac{1}{8}$ ，那么 $DE =$ —

知识点 6 平面向量的线性运算

1. 实数与向量相乘的意义：

一般地，设 n 为正整数， $\vec{a}$ 为向量，我们用 $n\vec{a}$ 表示 n 个 $\vec{a}$ 相加；用 $-n\vec{a}$ 表示 n 个 $-\vec{a}$ 相加. 又当 m 为正整数时， $\frac{n}{m}\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 同向且长度为 $\frac{n}{m}|\vec{a}|$ 的向量.

2. 向量数乘的定义

一般地，实数 k 与向量 a 的相乘所得的积是一个向量，记作 ka ，它的长度与方向规定如下：

(1) 如果 $k \neq 0$ ，且 $a \neq 0$ 时，则：

① ka 的长度： $|ka| = |k||a|$ ；② ka 的方向：当 $k > 0$ 时， ka 与 a 同方向；当 $k < 0$ 时， ka 与 a 反方向；

(2) 如果 $k = 0$ ，或 $a = 0$ 时，则： $ka = 0$ ， ka 的方向任意.

实数 k 与向量 a 相乘，叫做向量的数乘.

3. 实数与向量的相乘的运算律：

设 m 、 n 为实数，则：

(1) $m(na) = (mn)a$ (结合律)；

(2) $(m+n)a = ma + na$ (向量的数乘对于实数加法的分配律)；

(3) $m(a+b) = ma + mb$ (向量的数乘对于向量加法的分配律)

4. 单位向量：长度为 1 的向量叫做单位向量.

要点：

任意非零向量 a 与它同方向的单位向量 a_0 的关系： $a = |a|a_0$ ， $a_0 = \frac{1}{|a|}a$.

5. 平行向量定理：如果向量 b 与非零向量 a 平行，那么存在唯一的实数 m ，使 $b = ma$.

6. 向量的线性运算定义：

向量的加法、减法、实数与向量相乘以及它们的混合运算叫做向量的线性运算.

7. 向量的分解：

平面向量基本定理：如果 e_1, e_2 是同一平面内两个不共线 (或不平行) 的向量，那么对于这一平面内的任一向量 a ，有且只有一对实数 λ_1, λ_2 ，使得 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$.

8. 用向量方法解决平面几何问题：

(1) 利用已知向量表示未知向量

用已知向量来表示另外一些向量，除利用向量的加、减、数乘运算外，还应充分利用平面几何的一些定理，因此在求向量时要尽可能转化到平行四边形或三角形中，利用三角形中位线、相似三角形对应边成比例等平面几何的性质，把未知向量转化为与已知向量有直接关系的向量来求解。

(2) 用向量方法研究平面几何的问题的“三步曲”：

- ①建立平面几何与向量的联系，将平面几何问题转化为向量问题.
- ②通过向量运算，研究几何元素的关系.
- ③把运算结果“翻译”成几何关系.

【即学即练】

1. 计算： $3(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b}) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 已知 a 、 b 、 c 都是非零向量，下列条件中不能判定 $b \parallel c$ 的是 ()

A. $a \parallel c$, $a \parallel b$

B. $c = 3b$

C. $|b| = |c|$

D. $a = 3b$, $c = -2a$

3. 已知一个单位向量 e ，设 a 、 b 、 c 是非零向量，那么下列说法正确的是 ()

A. $\frac{1}{|a|}\vec{a} = e$

B. 若 $|a| = |b|$ ，则有 $a = b$ ，或 $a = -b$

C. $0 \cdot a = 0$

D. 若 $a = 3c$ ， $b = -5c$ ，则 $a \parallel b$

4. 下列命题中，正确的是 ()

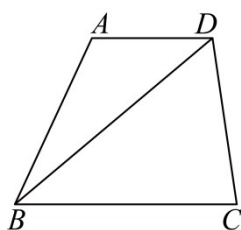
A. 如果 $k = 0$ 或 $a = 0$ ，那么 $ka = 0$

B. 如果 a 、 b 都是单位向量，那么 $a = b$

C. 如果 $|a| = 3|b|$ ，那么 $a \parallel b$

D. 如果 m 、 n 为实数，那么 $m(na) = (mn)a$

5. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ，设 $\vec{BA} = a$ ， $\vec{BC} = b$ ，那么 $\vec{BD}$ 可以用 a 、 b 表示为__



题型精讲

题型 01 放缩与相似形

【典例 1】. 对一个图形进行放缩时，下列说法中正确的是 ()

- A. 图形中线段的长度与角的大小都保持不变
- B. 图形中线段的长度与角的大小都会改变
- C. 图形中线段的长度保持不变、角的大小可以改变
- D. 图形中线段的长度可以改变、角的大小保持不变

【变式 1】. 下列图形，一定相似的是 ()

- A. 两个等边三角形
- B. 两个等腰三角形
- C. 两个矩形
- D. 两个菱形

【变式 2】. 用一个 2 倍放大镜照一个 $\triangle ABC$ ，下面说法中错误的是 ()

- A. $\triangle ABC$ 放大后， $\angle A$ 是原来的 2 倍
- B. $\triangle ABC$ 放大后，各边长是原来的 2 倍
- C. $\triangle ABC$ 放大后，周长是原来的 2 倍
- D. $\triangle ABC$ 放大后，面积是原来的 4 倍

题型 02 比例线段及其性质、应用

【典例 1】. 下列各组中的四条线段 (单位：厘米) 成比例线段的是 ()

- A. 1、2、3、4
- B. 2、3、4、6
- C. 4、5、5、6
- D. 1、2、5、20

【变式 1】. 如果 $\frac{x-2y}{2y}$ 的值是 $\frac{3}{4}$ ，那么 $\frac{x}{y}$ 的值为_____.

【变式 2】. 2024 年 8 月 2 日，北横通道东段主线正式试通车，标志着这一世界最长城市核心区地下道路全线双向贯通. 在一张比例尺为 1:1000000 的地图上，北横通道长约 1.9 厘米，那么北横通道实际长度约为_____.

()

- A . 0.19 千米 B . 1.9 千米 C . 19 千米 D . 190 千米

【变式3】 . 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{3}{4}$, 且 $b-2d+3f \neq 0$, 则 $\frac{a-2c+3e}{b-2d+3f} =$ _____ .

题型 03 黄金分割

【典例1】 . 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 , $AB=10$, 且 $AP > BP$, 则 $AP =$ _____ .

【变式1】 . 已知点 P 是线段 AB 上的一点 , 且 $BP^2 = AP \cdot AB$, 如果 $AB = 8\text{cm}$, 那么 $BP =$ _____ cm .

【变式2】 . 已知线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项 , 如果 $a=4$, $c=9$, 那么线段 b 的长为 ()

- A . $\frac{9}{4}$ B . 6 C . ± 6 D . 36

【变式3】 . 已知 P 是线段 AB 的黄金分割点 , 且 $AP > BP$, 那么下列等式不成立的是 ()

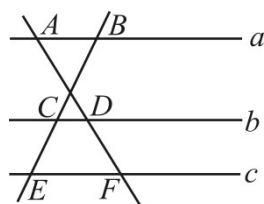
- A . $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{BP}$ B . $\frac{AB}{BP} = \frac{BP}{AP}$ C . $\frac{BP}{AP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D . $\frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【变式4】 . 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 , 且 $BP > AP$, 那么下列结论正确的是 ()

- A . $BP^2 = AP \cdot AB$ B . $AP^2 = BP \cdot AB$
C . $\frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D . $\frac{BP}{AP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

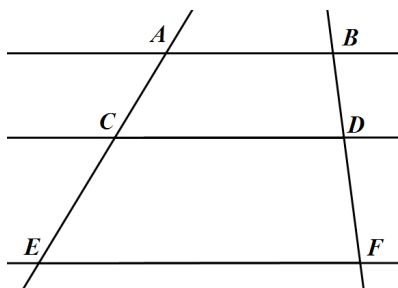
题型 04 三角形一边平行线的性质及推论

【典例1】 . 如图 , $a \parallel b \parallel c$, 若 $\frac{AD}{DF} = \frac{3}{2}$, 则下面结论错误的是 ()

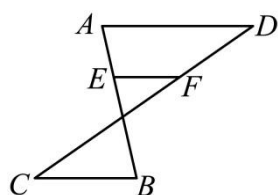


- A . $\frac{AD}{AF} = \frac{3}{5}$ B . $\frac{BC}{CE} = \frac{3}{2}$ C . $\frac{AB}{EF} = \frac{2}{3}$ D . $\frac{BC}{BE} = \frac{3}{5}$

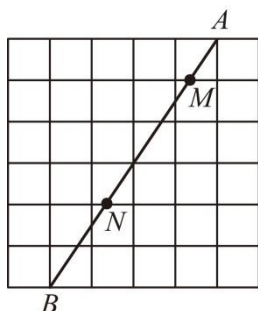
【变式1】 . 如图 , $AB \parallel CD \parallel EF$, 分别截两直线于六点 . 若 $\frac{AC}{CE} = \frac{2}{3}$, $BD=8$, 则 $BF =$ _____ .



【变式2】 . 如图，点 E 、 F 分别在线段 AB 、 CD 上， $AD \parallel EF \parallel BC$ ， $AE = 2$ ， $BE = 4$ ， $CF = 6$ ，那么 $DF =$ _____ .



【变式3】 . 如图，在 6×6 的正方形网格中，连接小正方形中两个顶点 A 、 B ，如果线段 AB 与网格线的其中两个交点为 M 、 N ，那么 $AM : MN : NB$ 的值是 ()



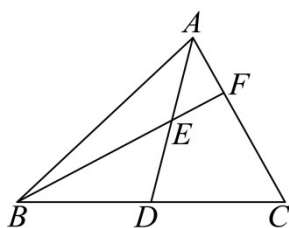
A . 3:5:4

B . 3:6:5

C . 1:3:2

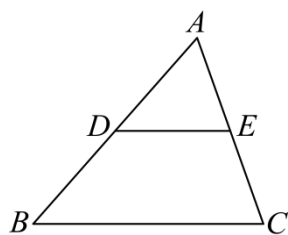
D . 1:4:2

【变式4】 . 如图，已知， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， E 是 AD 的中点，则 $AF:FC =$ _____ .



题型 05 三角形一边平行线的判定及推论 作图辨析

【典例1】 . 如图：在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 上，根据下列给定的条件，不能判断 DE 与 BC 平行的是 ()



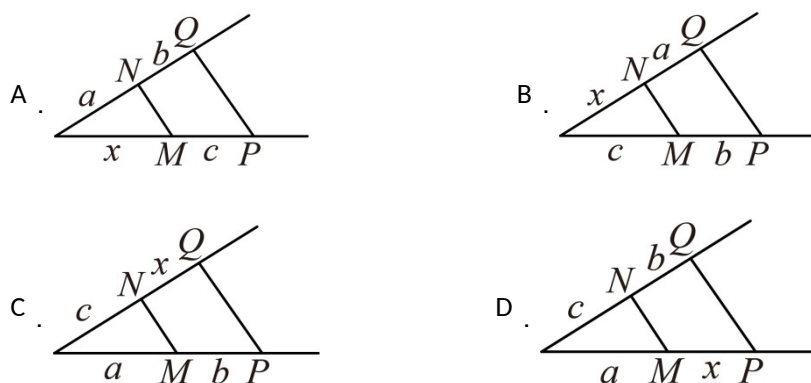
- A. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ B. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ C. $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ D. $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$

【变式1】 . 已知，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，那么下列各条件中，不一定能判定 $DE \parallel BC$ 的是（ ）

- A. $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{2}, \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$ B. $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}, \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$
 C. $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}, \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$ D. $\frac{DB}{AD} = \frac{1}{2}, \frac{AE}{EC} = 2$

【变式2】 . 已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 上的一点， $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$ ， $AC = 15$ ，要使 $DE \parallel BC$ ，那么 $AE =$ _____ .

【变式3】 . 已知线段 a, b, c ，求作线段 x ，使 $x = \frac{bc}{a}$ ，下列作图中正确的是（ ）



题型06 直接利用相似三角形的性质求解

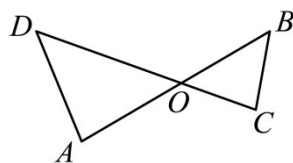
【典例1】 . 如果两个相似三角形面积的比为 $1:3$ ，那么它们周长的比为_____ .

【变式1】 . 如果两个相似三角形对应周长之比是 $2:3$ ，那么它们的对应边之比是（ ）

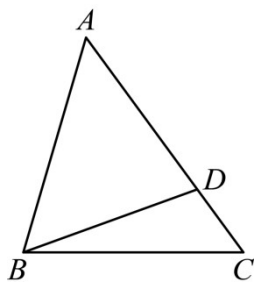
- A. $2:3$ B. $4:9$ C. $3:2$ D. $9:4$

题型07 相似三角形的判定，性质辨析

【典例1】. 如图， AB 、 CD 相交于点 O ，添加一个条件_____，可以使 $\triangle AOD \sim \triangle COB$.



【变式1】. 下列给出的条件不能得出 $\triangle ABD \sim \triangle ACB$ 的是 ()



A . $\frac{AD}{AB} = \frac{BD}{BC}$

B . $\angle ABD = \angle ACB$

C . $AB^2 = AD \cdot AC$

D . $\angle ADB = \angle ABC$

【变式2】. 已知 $\triangle ABC$ 的三边都不相等，如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似，且 $\angle B = \angle D$ ，那么下列等式一定不成立的是 ()

A . $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DF}$

B . $\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{DE}$

C . $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

D . $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EF}$

【变式3】. 如果 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (其中顶点 A 、 B 、 C 依次与顶点 D 、 E 、 F 对应) . 那么下列等式中，不一定成立的是 ()

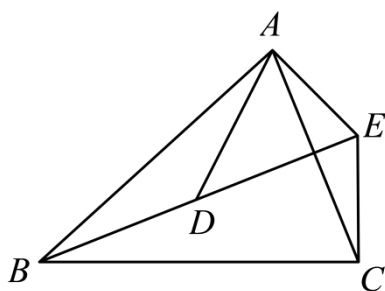
A . $\angle A = \angle D$

B . $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2$

C . $AB = DE$

D . $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$

【变式4】. 如图，已知 $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ ，下列添加的条件不能使 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ 的是 ()



A. $\angle BAD = \angle CAE$

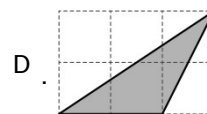
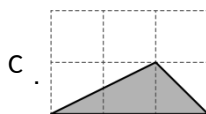
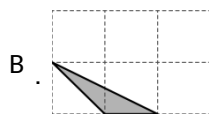
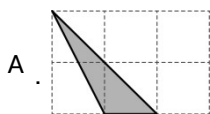
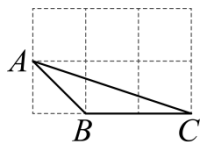
B. $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$

C. $\frac{AB}{BD} = \frac{AD}{CE}$

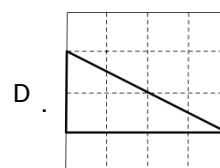
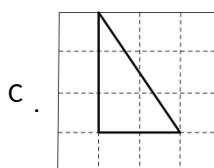
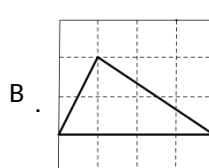
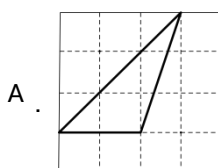
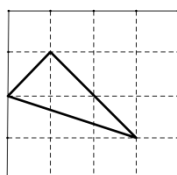
D. $\angle ABD = \angle ACE$

题型 08 网格、裁剪问题

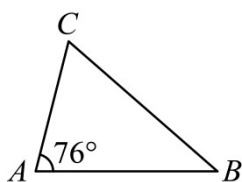
【典例 1】. 下列四个三角形，与左图中的三角形相似的是 ()

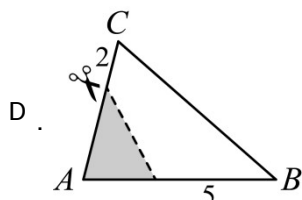
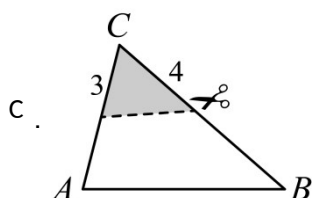
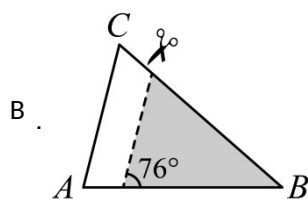
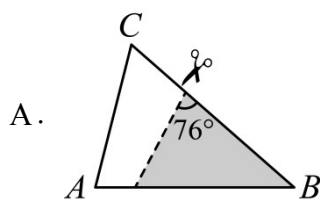


【变式 1】. 下列四个三角形，与如图中的三角形相似的是 ()



【变式 2】. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 76^\circ$ ， $AB = 8$ ， $AC = 6$ 。将 $\triangle ABC$ 沿图示中的虚线剪开，剪下的阴影三角形与原三角形不相似的是 ()





题型 09 平面向量的线性运算

【典例 1】. 已知 $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ (其中 k 为实数). 下列说法中错误的是 ()

A. 若 $k = 0$, 那么 $|\vec{a}| = 0$

B. 若 $k \neq 0$, 那么 $\vec{a}$ 一定是非零向量

C. 若 $k < 0$, 那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反

D. 若 $\vec{b}$ 是单位向量, 那么 $\vec{a}$ 的模是 $|k|$

【变式 1】. 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{x}$ 满足 $3(\vec{a} - \vec{x}) = 2(\vec{b} - \vec{x})$, 试用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\vec{x}$, 那么 $\vec{x} =$ _____.

【变式 2】. 下列说法中, 错误的是 ()

A. 设 $\vec{e}$ 为单位向量, 那么 $|\vec{e}| = 1$;

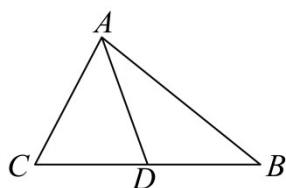
B. 如果 $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} = 3\vec{b}$ 或 $\vec{a} = -3\vec{b}$;

C. 如果 $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$, 其中 $\vec{c} \neq \vec{0}$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$;

D. 平面内任意一个非零向量都可以在给定的两个不平行向量的方向上分解.

【变式 3】. 已知 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 的方向相反, 且长度为 4, 那么 $\vec{e}$ 表示 $\vec{a}$ 为_____.

【变式 4】. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边的中线, 设向量 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, 那么用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\vec{AD}$ 是_____.



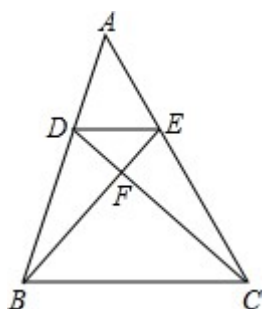
【变式 5】. 已知 $\vec{a}$ 是非零向量, 与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量记作 $\vec{e}$, 下列式子中, 正确的是 ()

A. $|e| \cdot a = |a|$ B. $|a| \cdot e = a$ C. $\frac{1}{|a|} \cdot \vec{a} = 1$ D. $\frac{|\vec{a}|}{|e|} = \vec{a}$

题型 10 相似三角形的性质综合应用

【典例 1】. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， BE 与 CD 相交于点 F ，如果 $S_{\triangle DEF} : S_{\triangle BCF} = 1:9$ ，那么

$S_{\triangle ADE} : S_{\triangle DEC}$ 等于

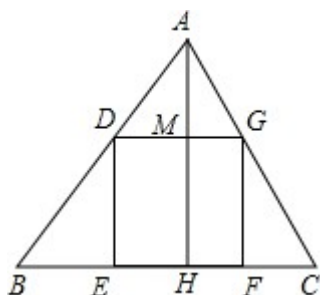


【变式 1】. 小明和小杰去公园游玩，小明给站在观景台边缘的小杰拍照时，发现他的眼睛、凉亭顶端、小杰的头顶三点恰好在一条直线上（如图所示）。已知小明的眼睛离地面的距离 AB 为 1.6 米，凉亭的高度 CD 为 6.6 米，小明到凉亭的距离 BD 为 12 米，凉亭与观景台底部的距离 DF 为 42 米，小杰身高为 1.8 米。

那么观景台的高度为_____米。

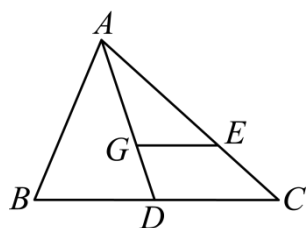


【变式 2】. 如图，已知正方形 $DEFG$ 的边 EF 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，顶点 D 、 G 分别在边 AB 、 AC 上， $BC = 15$ ，高 $AH = 10$ ，则正方形 $DEFG$ 的边长等于_____。

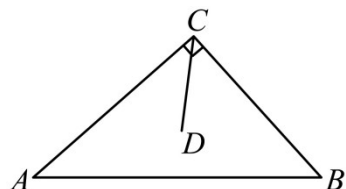


题型 11 重心的性质及其应用

【典例 1】. 如图，点 G 是 $\triangle ABC$ 重心， $GE \parallel BC$ ，如果 $BC = 6$ ，那么线段 GE 的长为



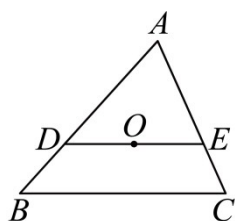
【变式1】. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是 $\triangle ABC$ 的重心，若 $CD = 2$ ，则 $AB =$ _____.



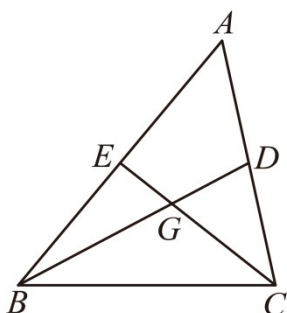
【变式2】. 已知边长为 4 的等边 $\triangle ABC$ 的重心为点 P ，则 $\triangle PBC$ 的面积为_____.

【变式3】. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 G 是重心，如果 $CG = 3$ ，那么 $AB =$ _____.

【变式4】. 如图，已知点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，过点 O 作 $DE \parallel BC$ ，分别交 AB 、 AC 于点 D 、 E ，如果设 $AB = a$ ， $AC = b$ ，那么用 a 、 b 表示 $DE =$ _____.



【变式5】. 如图，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，四边形 $AEGD$ 与 $\triangle ABC$ 面积的比值是_____.



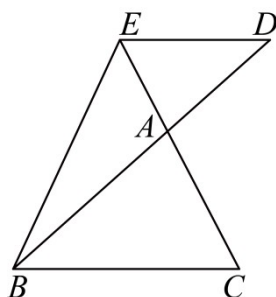
题型 12 解答题

【典例1】. 已知：线段 a, b, c ，且 $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$.

(1) 求 $\frac{a+b}{b}$ 的值；

(2) 如果线段 a, b, c ，满足 $a+b+c=36$ ，求 a, b, c 的值.

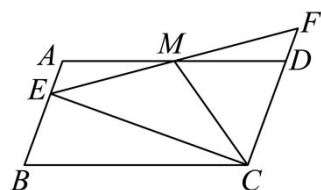
【变式1】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 延长线上， $DE \parallel BC$ ， $AC = 2EA$ ，已知 $\vec{BA} = a$ ， $\vec{BC} = b$.



(1) 用向量 a 、 b 分别表示向量 $\vec{ED}$ 、 $\vec{BE}$ ；

(2) 作出向量 $\vec{EA}$ ，分别在 $\vec{ED}$ 、 $\vec{BE}$ 方向上的分向量（写出结论，不要求写作法） .

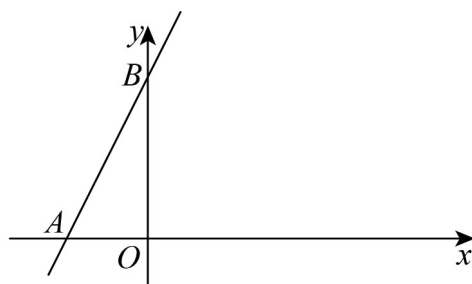
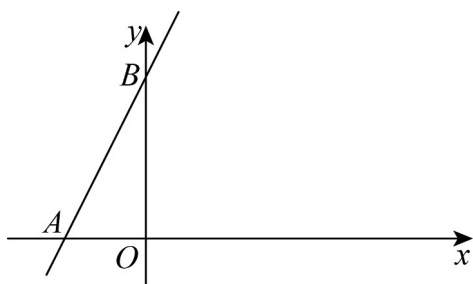
【变式2】 . 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AD = 2AB$ ， M 是边 AD 的中点，连接 MC . $CE \perp AB$ ，垂足 E 在边 AB 上，连接 EM 并延长，交 CD 延长线于点 F .



(1) 求证： $\angle EMC = 2\angle DMC$ ；

(2) 求证： $CM^2 = AB \cdot CF$.

【变式3】 . 如图所示，在平面直角坐标系中，直线 AB 经过点 $A(-3,0)$ 、 $B(0,m)$ ($m > 0$)，过 B 作 $BM \perp AB$ 交 x 轴于点 $M(12,0)$.



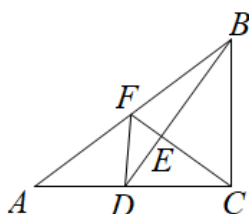
备用图

(1) 求直线 AB 的解析式；

(2) 反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ 的图象与直线 AB 交于第二象限内的点 C 、 D ($BD < BC$)，当 $AD = 2DB$ 时，求 k_1 的值；

(3) 设线段 AB 的中点为 E ，过点 E 作 x 轴的垂线，垂足为点 N ，交反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图象于点 F ，分别连接 OE 、 OF ，当 $\triangle OEF$ 与 $\triangle OBE$ 相似时，求满足条件的所有 k_2 的值。

【变式4】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是边 AC 上一动点（不与点 A 、 C 重合）， $CE \perp BD$ ，垂足为 E ，交边 AB 于点 F 。



- (1) 当点 D 是边 AC 中点时，求 DE ， EC 的值；
- (2) 设 $CD = x$ ， $AF = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域；
- (3) 当 $\triangle EFD$ 与 $\triangle EFB$ 相似时，求线段 CD 的长。

强化训练

一、单选题

1. 下列选项中的两个图形一定相似的是 ()

- A. 两个平行四边形 B. 两个正方形 C. 两个菱形 D. 两个等腰三角形

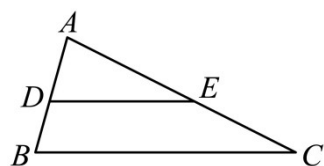
2. 已知 $2x = 3y$ ，则下列比例式成立的是 ()

- A. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ B. $\frac{x+y}{y} = \frac{4}{3}$ C. $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$ D. $\frac{x+y}{x} = \frac{3}{5}$

3. 已知非零向量 a 、 b ，且有 $a = -2b$ ，下列说法中，不正确的是 ()

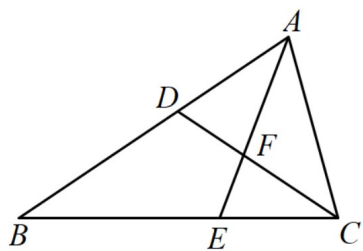
- A. $|a| = 2|b|$ B. $a \parallel b$ C. a 与 b 方向相反 D. $a + b = 0$

4. 如图， $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $AD = 2$ ， $DB = 1$ ， $AE = 4$ ，则 AC 的长度为 ()



- A. 2 B. 6 C. 3 D. 4

5. 如图，点 D 在 $\triangle ABC$ 边 AB 上， $\angle ACD = \angle B$ ，点 F 是 $\triangle ABC$ 的角平分线 AE 与 CD 的交点，且 $AF = 2EF$ ，则下列选项中不正确的是 ()



- A. $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$ B. $\frac{CF}{BE} = \frac{2}{3}$ C. $\frac{DC}{BC} = \frac{2}{3}$ D. $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$

二、填空题

6. 若 $\frac{x-y}{x} = \frac{3}{2}$ ，则 $\frac{x}{y}$ 的值为_____.

7. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ， $\triangle ABC$ 的周长与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长的比值是 $\frac{3}{2}$ ， BE 、 B_1E_1 分别是它们对应边上的中线，且 $B_1E_1 = 6$ ，则 $BE =$ _____.

8. 如图，已知 $a \parallel b \parallel c$ ，它们依次交直线 m 、 n 于点 A 、 B 、 C 和点 D 、 E 、 F ，如果 $AB = 1$ ， $AC = 4$ ， $DE = \sqrt{2}$ ，那么 $EF =$ _____.

