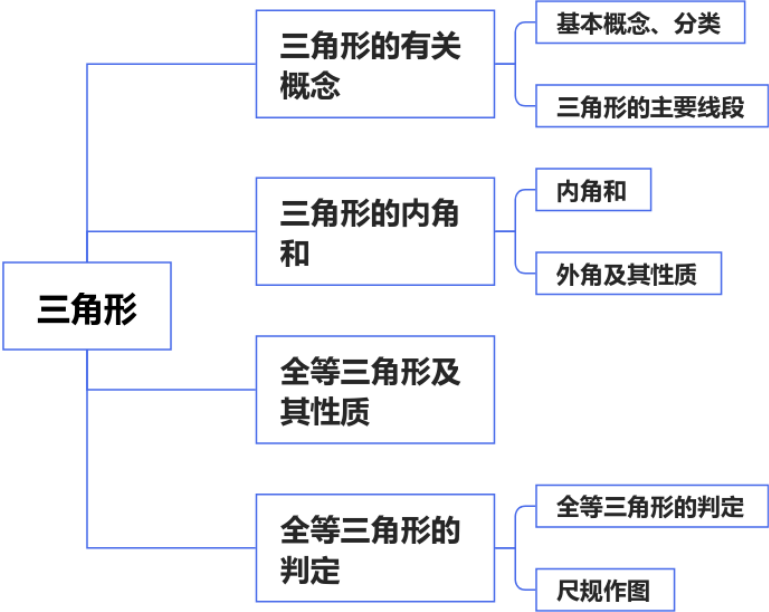


第十七章 三角形单元复习

内容概览



知识清单

知识点 1 三角形的有关概念

1. 三角形的三边关系

公理： 三角形的任意两边之和大于第三边.

利用不等式的性质，由上述公理可以推出“三角不等式”的推论；

推论： 三角形任意两边的差小于第三边

总结： 三角形任意一边的长大于另外两边之差，小于另外两边之和. $a-c < b < a+c$

【即学即练】 有两根长度分别为 5cm、7cm 的木棒，用长度为 13cm 的木棒与它们能拼成一个三角形吗？用

长度为 2cm 的木棒呢？

2. 三角形的分类

(1) 按角分



按角分 $\left\{ \begin{array}{l} \text{锐角三角形} \\ \text{直角三角形} \\ \text{钝角三角形} \end{array} \right.$

(2) 按边分



按边分 $\left\{ \begin{array}{l} \text{等腰三角形} \left\{ \begin{array}{l} \text{只有两边相等的等腰三角形} \\ \text{等边三角形} \end{array} \right. \\ \text{三边都不等的三角形} \end{array} \right.$

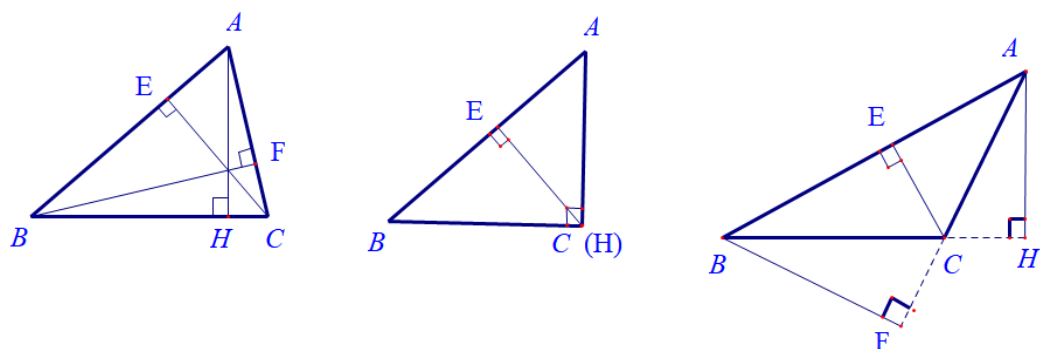
【即学即练】

一个等腰三角形的一边长是 5，周长是 17，那么它的另外两边长是多少？

3. 三角形的主要线段

(1) 三角形的高

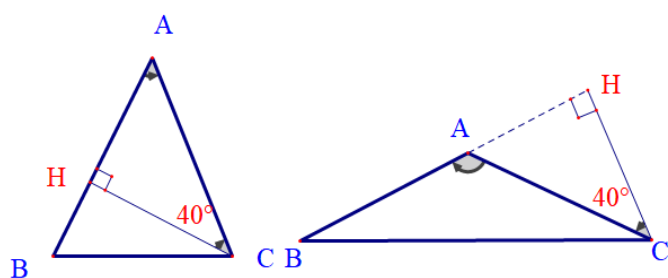
锐角三角形的高都在三角形的**内部**；直角三角形有两条高与两条直角边**重合**；钝角三角形有两条高在三角形**外部**。



应用：利用等积法计算

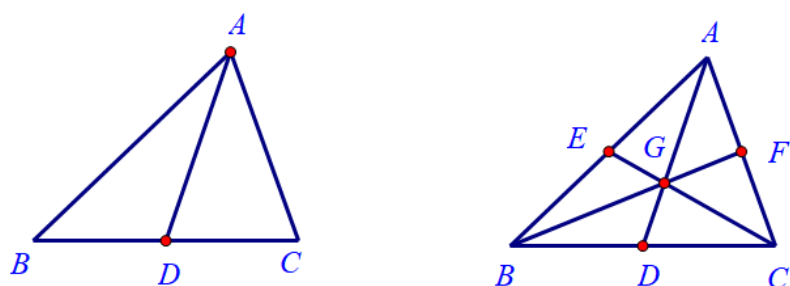
$$\begin{aligned} \text{因为 } S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} AB \cdot CE & \text{因为 } S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot CE \\ \text{所以 } BC \cdot AH &= AB \cdot CE & \text{所以 } AC \cdot BC &= AB \cdot CE \end{aligned}$$

根据高的位置分类讨论求角的度数



等腰三角形一腰上的高与腰的夹角是 40° ，则顶角的度数是_____.

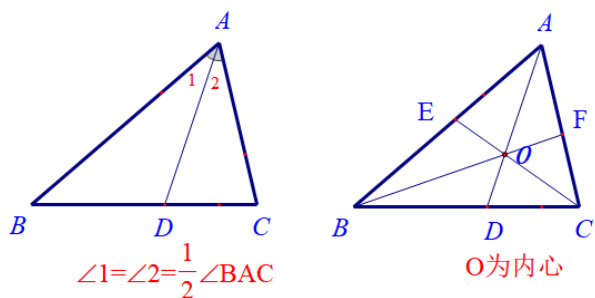
(2) 三角形的中线



应用：同（等）底等高的三角形面积相等

$$AD \text{ 为中线} \Rightarrow BD = DC \Rightarrow S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$$

(3) 三角形的角平分线



知识点 2 三角形的内角和

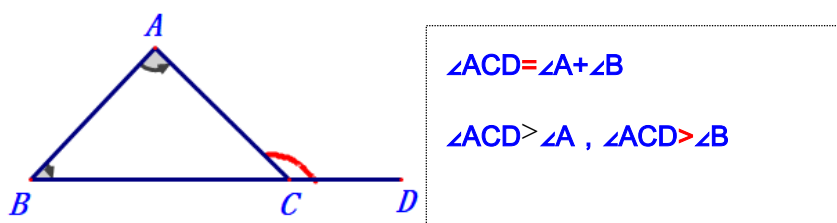
1. 三角形的内角和

三角形内角和定理：三角形内角和等于 180° 。

2. 三角形的外角及其性质

三角形的外角等于和它不相邻的两个内角的和。

三角形的外角大于和它不相邻 的任一内角。



3. 常见的导角模型

(1) 常见的三种基本模型

	8 字型	A 字型	燕尾型
图形			
结论	$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$	$\angle B + \angle C = \angle ADE + \angle AED$	$\angle BOC = \angle A + \angle B + \angle C$

(2) 三角形中的叠角模型

	不压边求角	压一边求角	压两边求角
图形			
结论	$\angle 1 + \angle 2 = 2\angle A$	$\angle 1 - \angle 2 = 2\angle A$	$\angle 1 + \angle 2 = 2\angle A$

(3) 双角平分线的夹角模型

	模型一 (双内角平分线)	模型二 (双外角平分线)	模型三 (内外角平分线)
图形			
结论	$\angle D = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$	$\angle D = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$	$\angle D = \frac{1}{2}\angle A$

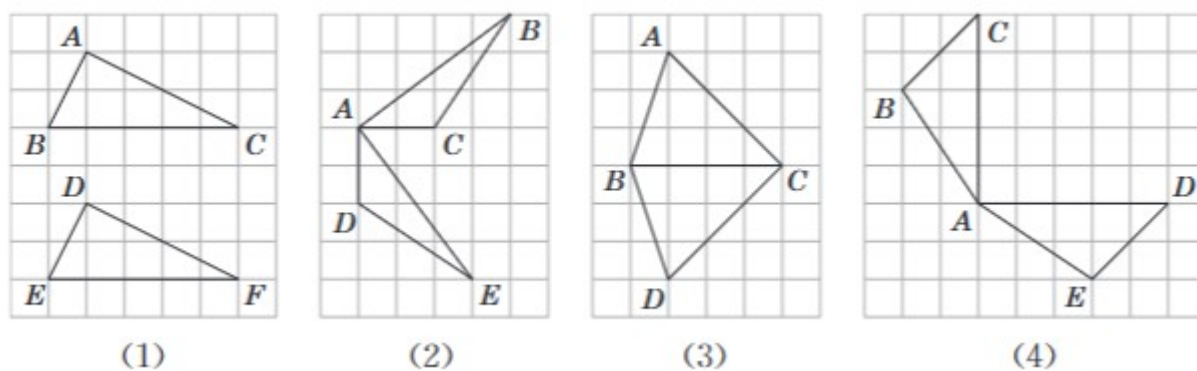
知识点 3 全等三角形及其性质

1. 全等变换

常见的全等变换有：**平移**、**旋转**、**翻折**

【即学即练】

如图所示，图中有四对三角形，每对中的 $\triangle ABC$ 通过怎样的运动能与另一个三角形重合？



解：图（1） $\triangle ABC$ 向下平移四个单位与 $\triangle DEF$ 重合；

（2） $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 与 $\triangle AEF$ 重合；

（3） $\triangle ABC$ 沿着直线 BC 翻折与 $\triangle DBC$ 重合；

（4） $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 再沿着 AC 边所在的直线翻折与 $\triangle AED$ 重合。

2. 全等三角形的性质

全等三角形的**对应边相等**，**对应角相等**。

知识点 4 全等三角形的判定

判定 1 公理：三边对应相等的两个三角形全等(简记为“边边边”或“SSS”)

判定2 公理：两边及其夹角对应相等的两个三角形全等(简记为“边角边”或“SAS”)；

判定3 公理：两角及其夹边对应相等的两个三角形全等(简记为“角边角”或“ASA”)

判定4 定理：两角对应相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等(简记为“角角边”或“AAS”)

题型精讲

题型01 三角形的有关概念

【典例1】 (²⁵⁻²⁶ 八年级上·上海浦东新·期中) 下列各组线段中，能组成三角形的是 ()

A . $2cm$ 、 $3cm$ 、 $5cm$

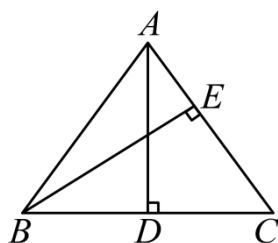
B . $3cm$ 、 $4cm$ 、 $8cm$

C . $4cm$ 、 $5cm$ 、 $6cm$

D . $5cm$ 、 $6cm$ 、 $12cm$

【典例2】 (²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海崇明·期中) 如图， AD ， BE 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC ， AC 的高线，

$AD=3$ ， $BC=5$ ， $AC=4$ ，则 BE 的长为_____。



【变式1】 (²⁰²⁵·海南·中考真题) 已知三角形三条边的长分别为 3 、 5 、 x ，则 x 的值可能是 ()

A . 2

B . 5

C . 8

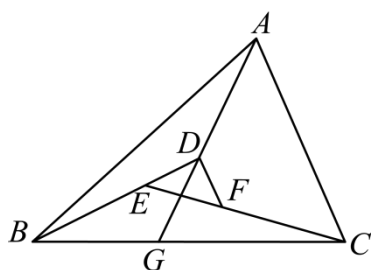
D . 11

【变式2】 (²⁴⁻²⁵ 八年级上·重庆巴南·月考) 如果一个三角形的三条高的交点恰是三角形的一个顶点，那

么这个三角形是 ()

- A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 直角三角形 D. 都有可能

【变式3】 (24-25 八年级上·安徽六安·期末) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， G 是边 BC 上任意一点， D 、 E 、 F 分别是 AG 、 BD 、 CE 的中点， $S_{\triangle ABC} = 48$ ，则 $S_{\triangle DEF}$ 的值为 ()



- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

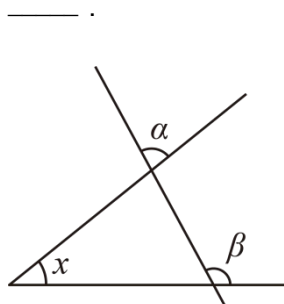
【变式4】 (24-25 七年级下·上海宝山·期中) a 、 b 、 c 为三角形的三边，化简： $|a-b-c|+|c-b+a|$

题型 02 三角形的内角和

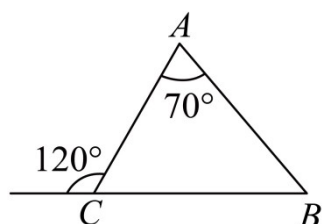
【典例1】 (25-26 八年级上·上海浦东新·期中) 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 50^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，则 $\angle C =$ _____ $^\circ$ ，

该三角形是_____三角形 (按角分类) 。

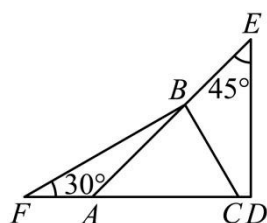
【典例2】 (24-25 七年级下·上海·期中) 如图， $\angle x$ 的两条边被一直线所截，用含 α 和 β 的式子表示 $\angle x =$ _



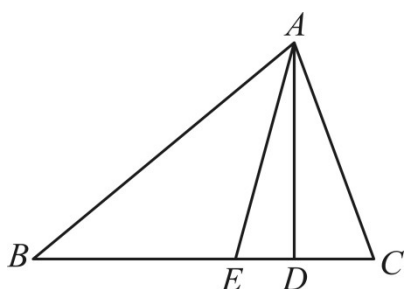
【变式1】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海宝山·期中）根据图中的数据，可得 $\angle B$ 的度数为_____。



【变式2】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海崇明·期中）将一副三角板按照如图方式摆放，则 $\angle FBA$ 的度数为_____。



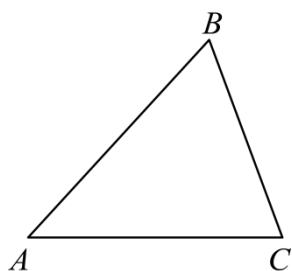
【变式3】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海·期中）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ ，垂足为点 D ， AE 平分 $\angle BAC$ ，交 BC 于点 E ， $\angle B = 40^\circ$ ， $\angle C = 70^\circ$ ，则 $\angle EAD$ 的度数是_____。



【变式4】（²⁵⁻²⁶ 八年级上·上海徐汇·期中）定义：若三角形的两个内角 α 和 β 满足 $\alpha + 2\beta = 90^\circ$ ，则称这样的三角形为“奇异互余三角形”。在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 58^\circ$ ， P 是射线 CB 上一点，若 $\triangle APB$ 是“奇异互余三角形”，则 $\angle APC =$ _____。

【变式5】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海金山·期中）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 48^\circ$ ， $\angle B = 62^\circ$ ， $\triangle ABC$ 绕点 A 逆

时针旋转的三角形的一边平行于原三角形的一边，如果旋转角 α 小于 180° ，那么 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。

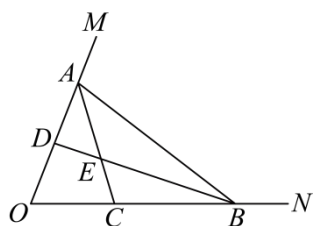


题型 03 三角形中的导角模型

【典例 1】（²⁵⁻²⁶ 八年级上·河北邢台·月考）如图，小明在计算机上用“几何画板”画了一个 $\angle MON = 70^\circ$ ，

点 A, B 分别在射线 OM, ON 上（均不与点 O 重合）， $\angle AOB$ 的角平分线 AC 与角平分线 BD 交于点 E 。

随着点 A, B 位置的变化，对于 $\angle MDB$ 和 $\angle AEB$ ，下列判断正确的是（ ）



A. $\angle MDB$ 和 $\angle AEB$ 的度数均会改变

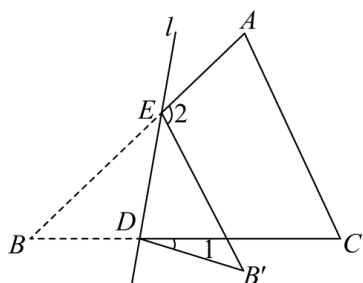
B. $\angle MDB$ 和 $\angle AEB$ 的度数均不会改变

C. 只有 $\angle MDB$ 的度数不会改变

D. 只有 $\angle AEB$ 的度数不会改变

【变式1】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海崇明·期中）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 40^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 沿直线 l 翻折，点

B 落在点 B' 的位置，则 $\angle 2 - \angle 1$ 的度数是（ ）



A. 90°

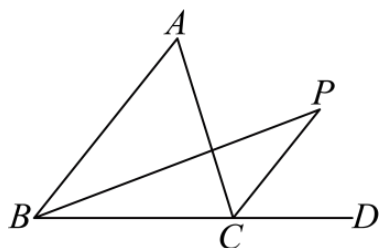
B. 80°

C. 50°

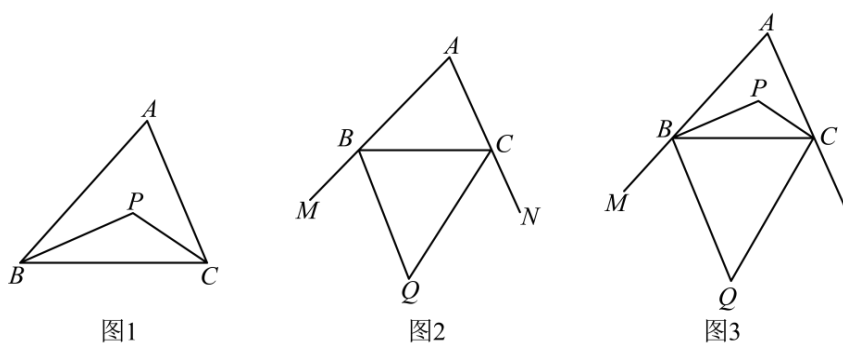
D. 40°

【变式2】（²⁵⁻²⁶ 八年级上·四川绵阳·月考）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 50^\circ$ ，外角 $\angle ACD = 110^\circ$ ，若 P

是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACD$ 的平分线的交点，则 $\angle P$ 的度数为 _____ .



【变式3】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海奉贤·期中）综合与实践



(1)如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线交于点 P ，如果 $\angle A = 50^\circ$ ，那么 $\angle BPC =$ _ .

(2)如图 2，作 $\triangle ABC$ 外角 $\angle MBC$ 、 $\angle NCB$ 的平分线交于点 Q ，试求出 $\angle Q$ 、 $\angle A$ 之间的数量关系 .

(3)如图 3，延长 BP 、 QC 交于点 E ，在 $\triangle BQE$ 中，存在一个内角等于另一个内角的 4 倍，请直接写出 $\angle A$ 的度数 .

【变式 4】 直线 MN 与直线 PQ 垂直相交于 O ，点 A 在直线 PQ 上运动，点 B 在直线 MN 上运动 .

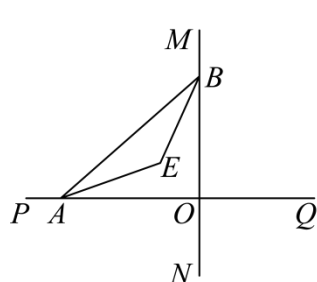


图1

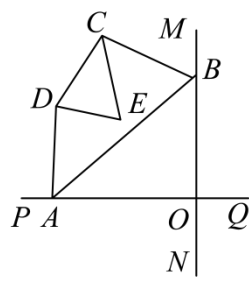


图2

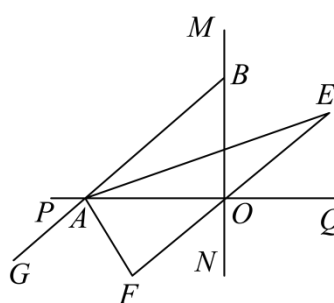


图3

(1)如图 1，已知 AE 、 BE 分别是 $\angle BAO$ 和 $\angle ABO$ 角的平分线，点 A 、 B 在运动的过程中， $\angle AEB$ 的大小是否会发生变化？若发生变化，请说明变化的情况；若不发生变化，试求出 $\angle AEB$ 的大小 .

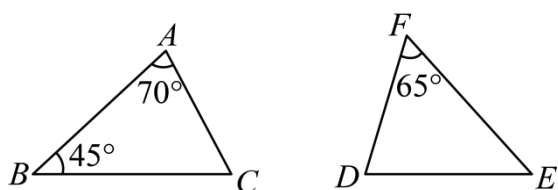
(2)如图 2，已知 AB 不平行 CD ， AD 、 BC 分别是 $\angle BAP$ 和 $\angle ABM$ 的角平分线，又 DE 、 CE 分别是 $\angle ADC$ 和 $\angle BCD$ 的角平分线，点 A 、 B 在运动的过程中， $\angle CED$ 的大小是否会发生变化？若发生变化，请说明理由；若不发生变化，试求出其值 .

(3)如图 3，延长 BA 至 G ，已知 $\angle BAO$ 、 $\angle OAG$ 的角平分线与 $\angle BOQ$ 的角平分线及延长线相交于 E 、 F ，在

$\triangle AEF$ 中，如果有一个角是另一个角的 3 倍，试求 $\angle ABO$ 的度数。

题型 04 全等三角形的性质

【典例 1】 (24-25 七年级下·上海闵行·期中) 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，那么 $\angle D$ 的度数是 ()



A . 45°

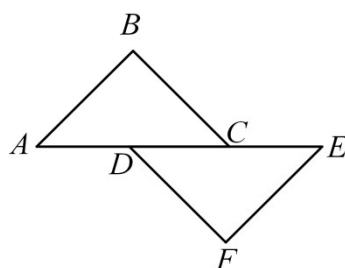
B . 65°

C . 70°

D . 115°

【变式 1】 (24-25 七年级下·上海·期中) 如图， $\triangle ABC \cong \triangle EFD$ 且 $AB = EF$ ， $CE = 2.5$ ， $CD = 2$ ，

$\angle A = 45^\circ$.

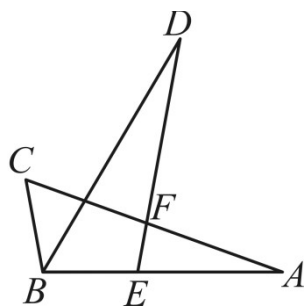


(1) 求 AC 的长度 .

(2) 求 $\angle E$ 的度数 .

【变式 2】 (24-25 七年级下·上海松江·期中) 如图， $\triangle ABC \cong \triangle DEB$ ，顶点 A 、 C 分别与顶点 D 、 B 对应，

点 E 在边 AB 上，边 DE 与边 AC 相交于点 F 。

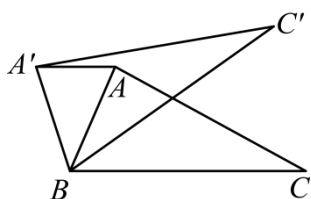


(1) 若 $DE = 10, BC = 4$ ，求线段 AE 的长；

(2) 若 $\angle D = 20^\circ, \angle C = 60^\circ$ ，求 $\angle DBC$ 的度数

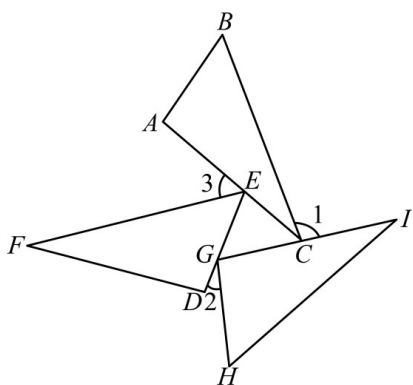
【变式3】 (24-25 七年级下·上海青浦·期中) 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle A'BC'$ ， $AA' \parallel BC$ ， $\angle ABC = 65^\circ$ ，那么

$\angle CBC' =$ _____。



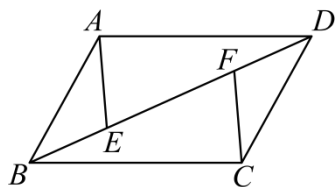
【变式4】 (24-25 七年级下·上海闵行·期中) 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF \cong \triangle GHI$ ，并将它们摆成如图所示

的形式，那么 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ 的度数等于_____。



题型 05 全等三角形的判定

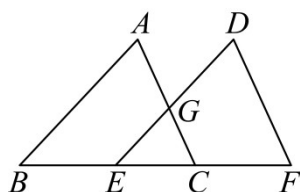
【典例 1】 如图，四边形 $ABCD$ 中， $AB = CD$ ， $AE = CF$ ， $BF = DE$ ，



(1) 求证： $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ；

(2) 求证： $\angle DAE = \angle BCF$ ；

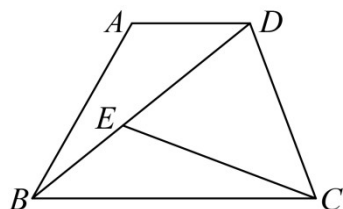
【变式 1】 如图，点 B 、 E 、 C 、 F 在同一直线上， $AB \parallel DE$ ， $AB = DE$ ， $BE = CF$ 。



(1) 求证： $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ；

(2) 若 $\angle A = 65^\circ$ ， $\angle B = 40^\circ$ ，求 $\angle DFE$ 的度数。

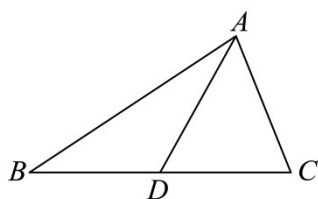
【变式 2】 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 为对角线 BD 上一点， $\angle A = \angle BEC$ ，且 $AD = BE$ 。



(1) 求证： $\triangle ABD \cong \triangle ECB$ ；

(2) 求证： $\angle BDC = \angle BCD$ 。

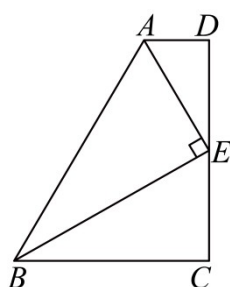
【变式3】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线，若 $AB=5$ ， $AC=3$ ，则 AD 的取值范围是（ ）



- A. $1 < AD < 4$ B. $2 < AD < 8$ C. $3 < AD < 5$ D. $4 < AD < 8$

【变式4】 如图，已知在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， E 为 CD 的中点，连接 AE ， BE ， $AE \perp BE$ ，

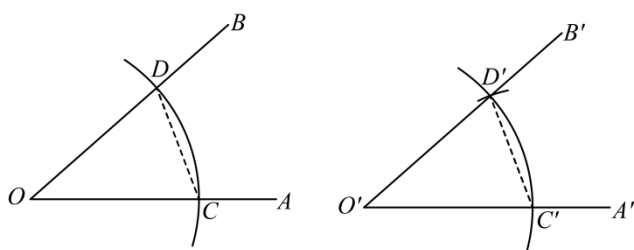
$AB=8$ ， $AD=2$ ，求 BC 的长度。



题型 05 尺规作图

【典例1】 如图，用直尺和圆规作一个角 $\angle A'O'B'$ 等于已知角 $\angle AOB$ ，请根据所学的三角形全等的有关知

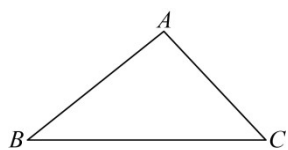
识，说明得出 $\angle A'O'B' = \angle AOB$ 的依据是_____。



【变式1】 尺规作图。

已知： $\triangle ABC$ （如图）。

求作： $\triangle A_1B_1C_1$ ，使 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 全等。



要求：

(1)不写作法，保留作图痕迹；

(2)写出作图时选取的相等的边或角。

【变式2】已知： $\angle \alpha$ ， $\angle AOB$ （图1、图2）。在图2中，以 OB 为一边，在 $\angle AOB$ 的内部作 $\angle BOC = \angle \alpha$

（要求：尺规作图，不写作法，保留作图痕迹）。

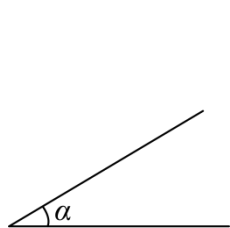


图1

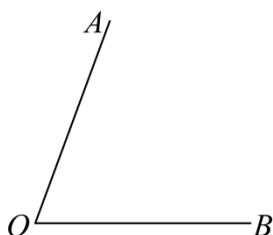
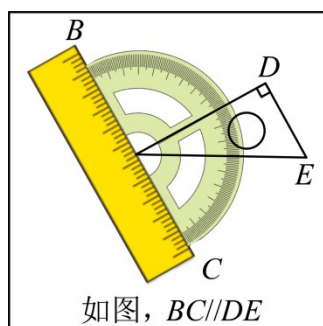


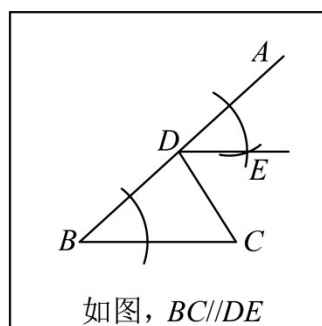
图2

【变式3】已知直线 BC ，小明和小亮想画出 BC 的平行线，他们的方法如下：



如图， $BC \parallel DE$

（小明）



如图， $BC \parallel DE$

（小亮）

下列说法正确的是（ ）

A. 小明的方法正确，小亮的方法不正确 B. 小明的方法不正确，小亮的方法正确

C. 小明、小亮的方法都正确

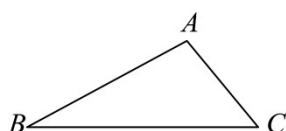
D. 小明、小亮的方法都不正确

【变式 4】 (24-25 七年级下·上海·期中) 通过“三角形全等的判定”的学习，大家知道“两边和它们的夹角分

别相等的两个三角形全等”是一个基本事实，可以判定两个三角形全等；而满足条件“两边和其中一边所对

的角分别相等”的两个三角形全等吗？下面请你来探究．

任务：已知 $\triangle ABC$ ，求作 $\triangle DEF$ ，使 $EF=BC$ ， $\angle E=\angle B$ ， $DF=AC$ （即两边和其中一边所对的角分别相等）．



(1) **【实践与操作】** 请依据下面的步骤，用尺规完成作图过程（保留作图痕迹）；

①作线段 $EF=BC$ ；

②在线段 EF 的上方作 $\angle MEF=\angle B$ ；

③作 $FD=AC$ ，交射线 EM 于点 D ；

④连接 DF 得所求三角形．

(2) **【观察与小结】** 观察你作的图形，你会发现满足条件的三角形有_____个；其中_____（填

三角形的名称）与 $\triangle ABC$ 不全等．

因此可得：“两边和其中一边所对的角分别相等的两个三角形全等”是：_____命题．（填“真”或“假”）