

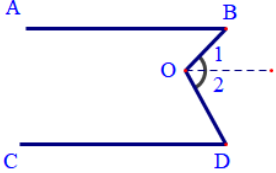
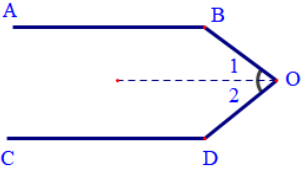
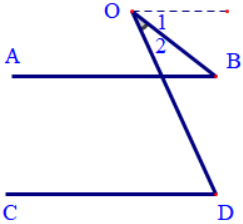
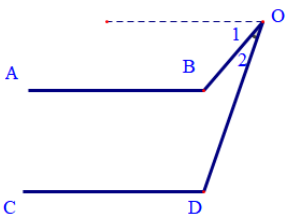
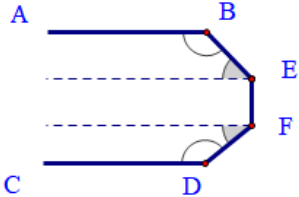
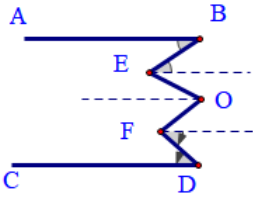
专题 01 平行线中的拐角模型

题型归纳

题型一：内拐模型

题型二：外拐模型

题型三：多拐点模型

内拐	 结论：$\angle BOD = \angle B + \angle D$	 结论：$\angle BOD + \angle B + \angle D = 360^\circ$
外拐	 结论：$\angle BOD = \angle D - \angle B$	 结论：$\angle BOD = \angle B - \angle D$
多拐点	 结论：$\angle B + \angle BEF + \angle EFD + \angle D = 540^\circ$	 结论：$\angle B + \angle O + \angle D = \angle BEO + \angle OFD$

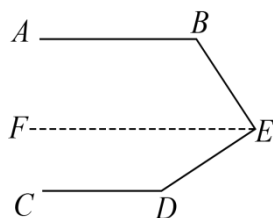
题型专练

题型 01 内拐模型

题型点拨：过拐点添加一条平行线构成两组三线八角的基本图形。

【典例1】（24-25 七年级下·上海·期中）如图，已知 $AB \parallel CD$ ， $\angle E = 90^\circ$ ，那么 $\angle B + \angle D$ 等于多少度？

为什么？



解：过点 E 作 $EF \parallel AB$ ，

得 $\angle B + \angle BEF = 180^\circ$ （_）

因为 $AB \parallel CD$ （已知）

$EF \parallel AB$ （所作）

所以 $EF \parallel CD$ （_）。

得_（两直线平行，同旁内角互补）

所以 $\angle B + \angle BEF + \angle DEF + \angle D = _\circ$ 。（等式性质）

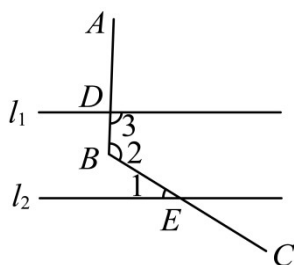
即 $\angle B + \angle BED + \angle D = _\circ$ 。

因为 $\angle BED = 90^\circ$ （已知）

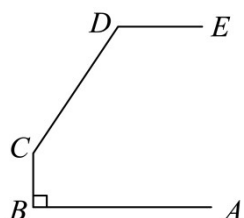
所以 $\angle B + \angle D = _\circ$ 。（等式性质）

【变式1】（24-25 七年级下·上海·期中）如图，直线 $l_1 \parallel l_2$ ， AB 交 l_1 于点 D ， BC 交 l_2 于点 E ，若 $\angle 1 = 32^\circ$ ，

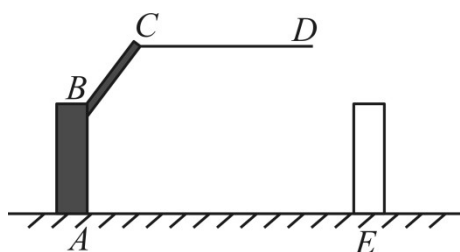
$\angle 2 = 120^\circ$ ，则 $\angle 3 = _____\circ$ 度。



【变式2】（24-25 七年级下·上海闵行·月考）近几年中学生近视的现象越来越严重，为保护视力，某公司推出了护眼灯，其侧面示意图（台灯底座高度忽略不计）如图所示，其中 $BC \perp AB$ ， $DE \parallel AB$ ，经使用发现，当 $\angle EDC = 126^\circ$ 时，台灯光线最佳．则此时 $\angle DCB$ 的度数为_____．



【变式3】（24-25 七年级下·上海嘉定·期末）某小区车库门口需要用到曲臂直杆道闸，模型如图所示．如果 $BA \perp AE$ ， $CD \parallel AE$ ， $\angle ABC = 143^\circ$ ，那么 $\angle BCD =$ _____°．



【变式4】（24-25 七年级下·上海奉贤·期中）在学习了《相交线与平行线》后，数学小组进行探究平行线的“等角转化”功能的的活动．

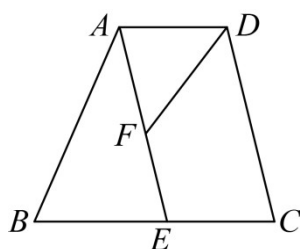


图 1

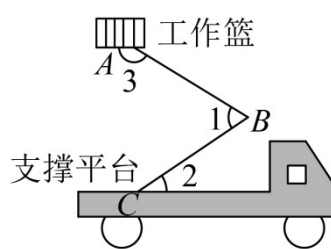


图 2

(1)如图 1，已知 $\angle CDF + \angle DFE = 180^\circ$ ， $\angle C = \angle DAE$ 。

①求证： $AD \parallel BC$ ；

②探究 $\angle ADF$ ， $\angle AEB$ 与 $\angle DFE$ 之间有怎样的数量关系？并说明理由：

(2)实际应用：如图 2 是路灯维护工程车的工作示意图，工作篮与支撑平台平行，如果 $\angle 1 = 76^\circ$ ，那么

$\angle 3 - \angle 2$ 的度数为

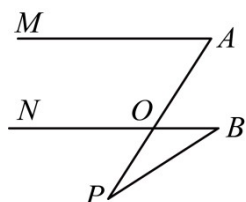
题型 02 外拐模型

题型点拨:

外拐模型的解题策略和内拐一样，过拐点作条平行线，构造两个组三线八角的基本图形。

【典例 1】（24-25 七年级下·上海嘉定·期中）如图，已知 $MA \parallel NB$ ， AP 与 BN 交于 O 点， $\angle A = 70^\circ$ ，

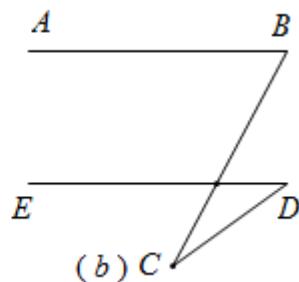
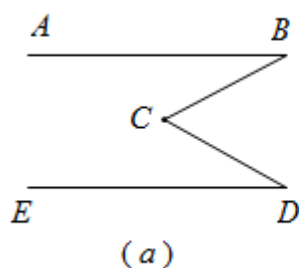
$\angle B = 40^\circ$ ，则 $\angle P$ 的度数为多少？



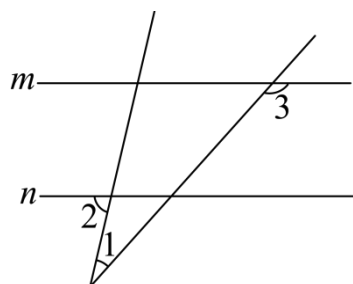
【变式 1】（24-25 八年级上·全国·课后作业）（1）已知：如图（a），直线 $DE \parallel AB$ 。求证：

$$\angle ABC + \angle CDE = \angle BCD ;$$

(2) 如图 (b), 如果点 C 在 AB 与 ED 之外, 其他条件不变, 那么会有什么结果? 你还能就本题作出什么新的猜想?



【变式2】 (23-24 七年级上·吉林长春·期末) 如图, 直线 $m \parallel n$, $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 的数量关系是 ()



A . $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

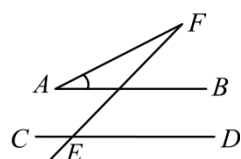
B . $\angle 1 + \angle 3 - \angle 2 = 180^\circ$

B . C . $\angle 2 + \angle 3 - \angle 1 = 180^\circ$

D . $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$

【变式3】 (24-25 七年级下·上海奉贤·期中) 如图, 已知 $AB \parallel CD$, EF 交 CD 于点 E , $\angle A = 22^\circ$,

$\angle DEF = 50^\circ$, 那么 $\angle F =$ _____



【变式4】 (24-25 七年级下·湖南株洲·期末) ①如图 1, $AB \parallel CD$, 则 $\angle A + \angle E + \angle C = 360^\circ$; ②如图 2,

$AB \parallel CD$ ，则 $\angle P = \angle A - \angle C$ ；③如图 3， $AB \parallel CD$ ，则 $\angle E = \angle A + \angle 1$ ；④如图 4，直线 $AB \parallel CD \parallel$

EF ，点 O 在直线 EF 上，则 $\angle \alpha - \angle \beta + \angle \gamma = 180^\circ$ 。以上结论正确的个数是 ()

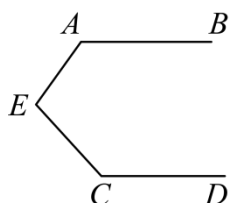


图1

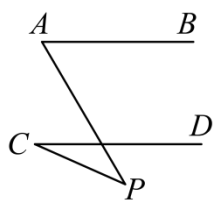


图2

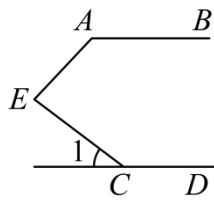


图3

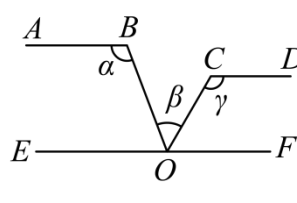


图4

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

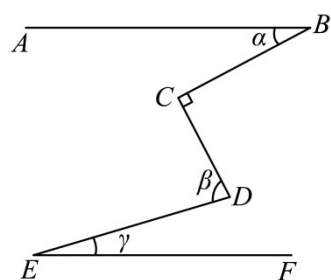
题型 03 多拐点模型

题型点拨:

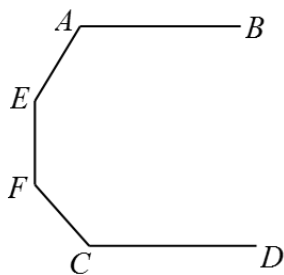
多拐点是指在两条平行线之间包含两个或多个拐点，解题策略是过拐点作平行线，构造两组或多组三线八角的基本图形。

【典例 1】(24-25 七年级下·江苏无锡·期中) 如图， $AB \parallel EF$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，则 α ， β 和 γ 的数量关系是

_____。



【变式 1】(24-25 七年级下·辽宁·月考) 如图所示， $AB \parallel CD$ ，则 $\angle A + \angle E + \angle F + \angle C$ 等于 ()



- A . 180° B . 360° C . 540° D . 720°

【变式2】 (24-25 七年级下·河南·期末) (1) 如图 1 , $AB \parallel CD$, $\angle ABE=45^\circ$, $\angle CDE = 21^\circ$, 直接写出 $\angle BED$ 的度数 .

(2) 如图 2 , $AB \parallel CD$, 点 E 为直线 AB, CD 间的一点 , BF 平分 $\angle ABE$, DF 平分 $\angle CDE$, 写出 $\angle BED$ 与 $\angle F$ 之间的关系并说明理由 .

(3) 如图 3 , AB 与 CD 相交于点 G , 点 E 为 $\angle BGD$ 内一点 , BF 平分 $\angle ABE$, DF 平分 $\angle CDE$, 若 $\angle BGD = 60^\circ$, $\angle BFD = 95^\circ$, 直接写出 $\angle BED$ 的度数 .

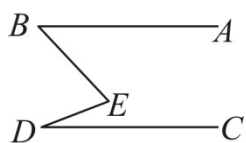


图1

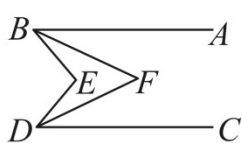


图2

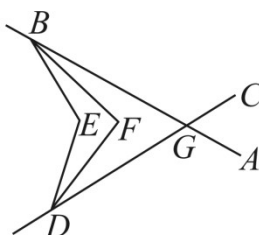
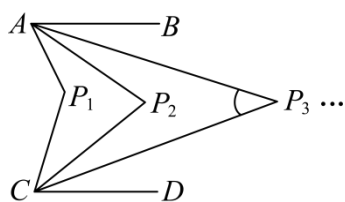
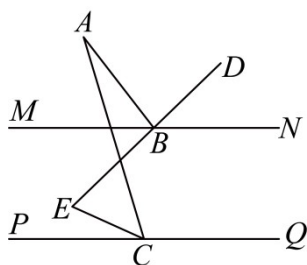


图3

【变式3】 (24-25 七年级下·上海崇明·期末) 如图 , $AB \parallel CD$, 点 P_1 位于两平行线之间且在点 A 、 C 的右侧 , 分别作 $\angle BAP_1$ 和 $\angle DCP_1$ 的平分线交于点 P_2 , 再分别作 $\angle BAP_2$ 和 $\angle DCP_2$ 的平分线交于点 P_3 ; 设 $\angle AP_1C$ 的度数是 α , 则 $\angle AP_nC$ 的度数用 α 表示为_____ .



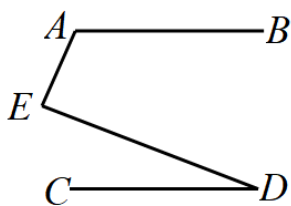
【变式4】 (23-24 七年级下·福建厦门·期末) 如图, 已知 $MN \parallel PQ$, 点 B 在 MN 上, 点 C 在 PQ 上, 点 A 在 MN 上方, $\angle ABD:\angle DBN=3:2$, 点 E 在 BD 的反向延长线上, 且 $\angle ACE:\angle ECP=3:2$, 设 $\angle A=\alpha$, 则 $\angle E$ 为度数用含 α 的式子一定可以表示为 ()



- A . 2α B . $72+\frac{2}{5}\alpha$ C . $108-\frac{3}{5}\alpha$ D . $90-\alpha$

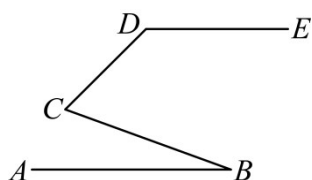
题型强练

1. 如图, $AB \parallel CD$, 那么 $\angle A$ 、 $\angle D$ 、 $\angle E$ 三者之间的关系为 () .

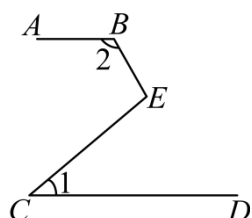


- A . $\angle A + \angle D + \angle E = 360^\circ$ B . $\angle A + \angle D - \angle E = 180^\circ$
C . $\angle A - \angle D + \angle E = 180^\circ$ D . $\angle A + \angle D + \angle E = 180^\circ$

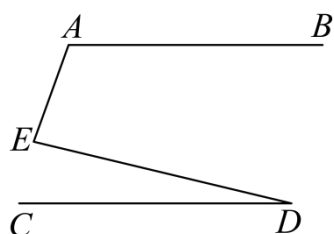
2. 如图, $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 20^\circ$, $\angle CDE = 135^\circ$, 那么 $\angle BCD =$ _____ $^\circ$.



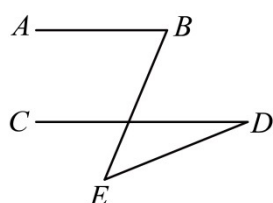
3. 如图，如果 $AB \parallel CD$ ， $\angle BEC = 100^\circ$ ， $\angle 2 = 120^\circ$ ，那么 $\angle 1 =$ _____ 度。



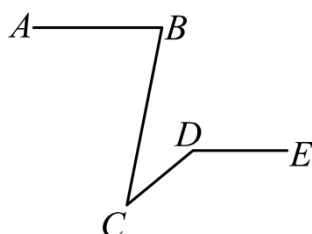
4. 如图， $AB \parallel CD$ ， $\angle A = 140^\circ$ ， $\angle E = 75^\circ$ ，那么 $\angle D$ 的度数是 _____。



5. 如图， $AB \parallel CD$ ，已知 $\angle B = 66^\circ$ ， $\angle D = 21^\circ$ ，则 $\angle E =$ _____ $^\circ$ 。

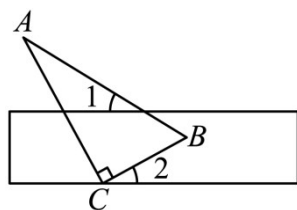


6. 如图，已知 $AB \parallel DE$ ， $\angle ABC = 80^\circ$ ， $\angle CDE = 140^\circ$ ，则 $\angle BCD =$ _____。

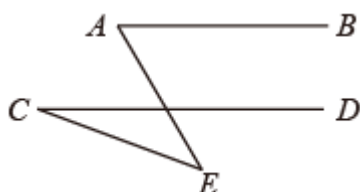


7. 如图，将 $\angle A$ 为 30° 的直角三角板 ABC 的直角顶点 C 放在直尺的一边上，则 $\angle 1 + \angle 2$ 的度数为 _____。

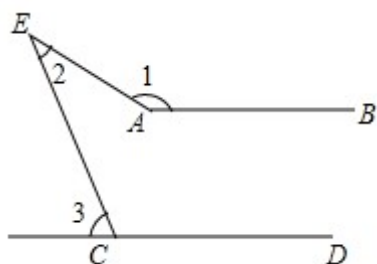
_____ .



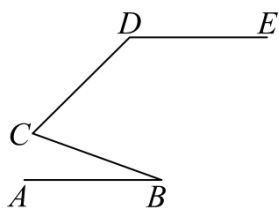
8. 如图所示, $AB \parallel CD$, $\angle E = 37^\circ$, $\angle C = 20^\circ$, 则 $\angle EAB$ 的度数为_____ .



9. 如图, 若 $AB \parallel CD$, 则 $\angle 1 + \angle 3 - \angle 2$ 的度数为_____

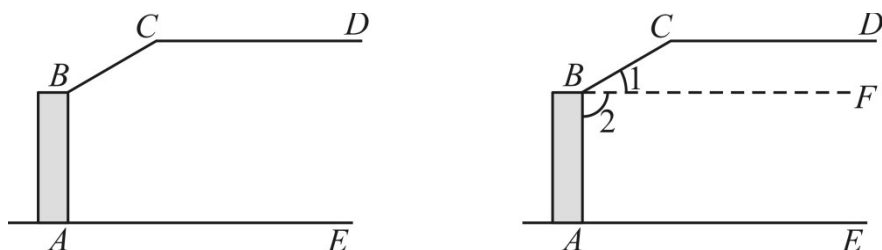


10. 如图, $AB \parallel DE$, $\angle B = 20^\circ$, $\angle D = 135^\circ$, 求 $\angle C$ 的度数 .



11. 一大门栏杆的平面示意图如图所示, BA 垂直地面 AE 于点 A , CD 平行于地面 AE , 若 $\angle BCD = 150^\circ$,

求 $\angle ABC$ 的度数 ;



解：过点 B 作 $BF \parallel CD$

$\because CD \parallel AE$

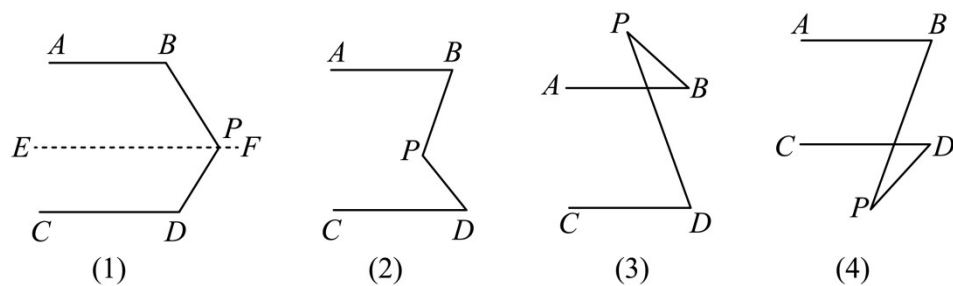
$\therefore \underline{\hspace{1cm}} \parallel \underline{\hspace{1cm}} \parallel \underline{\hspace{1cm}} \quad (\underline{\hspace{1cm}})$

(余下的说理过程请写在下方)

12. (1) 如图(1) $AB \parallel CD$ ，猜想 $\angle BPD$ 与 $\angle B$ 、 $\angle D$ 的关系，说出理由。

(2) 观察图(2)，已知 $AB \parallel CD$ ，猜想图中的 $\angle BPD$ 与 $\angle B$ 、 $\angle D$ 的关系，并说明理由。

(3) 观察图(3)和(4)，已知 $AB \parallel CD$ ，猜想图中的 $\angle BPD$ 与 $\angle B$ 、 $\angle D$ 的关系，不需要说明理由。

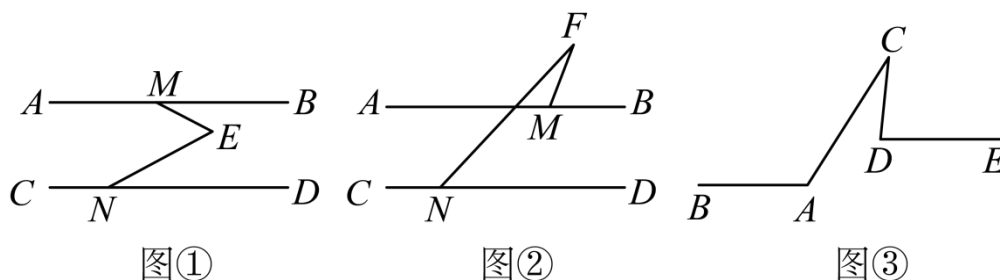


13. 【感知探究】如图①，已知 $AB \parallel CD$ ，点 M 在 AB 上，点 N 在 CD 上。求证：

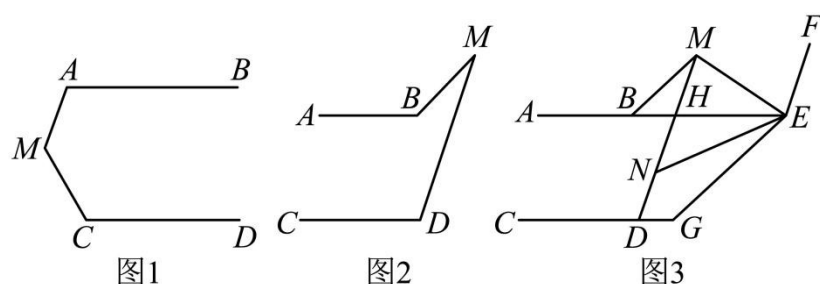
$$\angle MEN = \angle BME + \angle DNE$$

【类比迁移】如图②， $\angle F$ 、 $\angle BMF$ 、 $\angle DNF$ 的数量关系为_。(不需要证明)

【结论应用】如图③，已知 $AB \parallel DE$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $\angle D = 80^\circ$ ，则 $\angle ACD = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ 。



14. 已知点 M 是直线 AB , CD 所确定的平面内的一点 .



(1)如图 1 , 若 $\angle A = 110^\circ$, $\angle C = 120^\circ$, $\angle AMC = 130^\circ$, AB 与 CD 平行吗 ? 为什么 ?

(2)如图 2 , 已知 $AB \parallel CD$, 求出 $\angle BMD$, $\angle B$, $\angle D$ 之间的数量关系 ;

(3)在图 2 的基础上 , 延长 AB 至点 E , 延长 CD 至点 G , 过点 E 作 $EF \parallel DM$, 连接 EM , EG , 且

$\angle FEM = \angle MEG$, 过点 E 作 EN 平分 $\angle AEG$ 交 DM 于点 N , 如图 3 所示 . 若 $\angle BMD = 30^\circ$, $\angle ABM = 140^\circ$,

求 $\angle MEN$ 的度数 .