

专题 01 期末解答压轴题

考点归纳

考点 01 数轴的综合应用

考点 02 线段的和、差、倍

考点 03 角的和、差、倍

考点 04 三角板问题

考点 05 线段、角的综合应用

考点 06 实际应用题

考点 07 一次式及其应用

考点 08 新定义题

考点 09 材料阅读、规律题

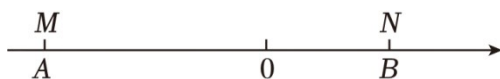
考点 10 绝对值的化简问题

考点 11 幻方的综合应用 (有理数、一次式、一元一次方程)

考点专练

考点 01 数轴的综合应用

1. 如图，点 A 、 B 在数轴上表示的数分别是 -24 和 16 ，动点 M 、 N 分别从 A 、 B 两点同时出发，相向而行，点 M 的速度是 2 个单位长度/秒， N 的速度是 4 个单位长度/秒，点 M 、点 N 分别与点 B 、点 A 重合时，停止运动。



(1) 若运动 t 秒钟时，点 M 、 N 重合，求 t 的值以及重合点在数轴上所表示的数；

(2) 若运动 t 秒钟时，点 M 、 N 之间距离为 30 ，求 t 的值；

(3) 设点 P 是线段 AM 中点，点 Q 是线段 BN 中点，若运动 t 秒钟时点 P 、 Q 重合，求 t 的值。

2. 已知数轴上有 A, B 两点，分别代表 $-40, 20$ ，两只电子蚂蚁甲，乙分别从 A, B 两点同时出发，甲沿线段 AB 以 1 个单位长度/秒的速度向右运动，甲到达点 B 处时运动停止，乙沿 BA 方向以 4 个单位长度/秒的速度向左运动。

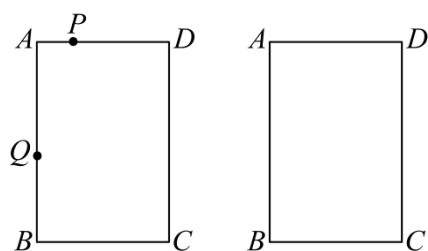


(1) 甲，乙在数轴上的哪个点相遇？

(2) 多少秒时，甲、乙相距 10 个单位长度？

(3) 若乙到达 A 点后立刻掉头并保持速度不变，则甲到达 B 点前，甲，乙还能在数轴上相遇吗？若能，求出相遇点所对应的数；若不能，请说明理由。

3. 在长方形 $ABCD$ 中， $AB = 6\text{cm}$ ， $BC = 4\text{cm}$ ，点 P 以每秒 1cm 的速度沿折线 $AD-DC$ 运动，点 Q 以每秒 3cm 的速度沿折线 $BA-AD-DC$ 运动。点 P, Q 同时出发，当点 Q 到达终点 C 时，点 P 停止运动。设运动时间为 t (秒)。($t > 0$)



备用图

(1) ① 当点 Q 在 AD 上运动时， $QD = \underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$ ；(用含 t 的代数式表示)

② 当点 Q 在 DC 上运动时， $QD = \underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$ 。(用含 t 的代数式表示)

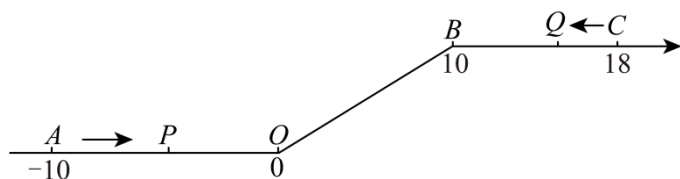
(2) 当点 P, Q 在运动过程中到点 D 的距离相等时，求 t 的值。

(3) 当点 P, Q 到线段 BC 的距离相等时，求 t 的取值范围。

(4) 当 $S_{\triangle PBC} = 2S_{\triangle QBC}$ ，直接写出 t 的值。

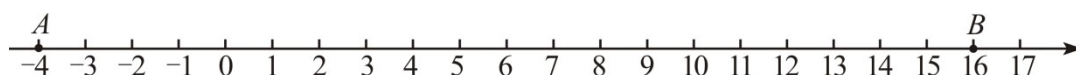
4. 如图，将一条数轴在原点 O 和点 B 处各折一下，得到一条“折线数轴”。图中点 A 表示 -10 ，点 B 表示 10 ，点 C 表示 18 ，我们称点 A 和点 C 在数轴上相距 28 个长度单位。动点 P, Q 同时开始运动，点 P 从点 A 出发，以 2 单位/秒的速度沿着“折线数轴”的正方向运动，从点 O 运动到点 B 期间速度变为原来的一半，之后立刻恢复原速，直至点 C 处停止运动；点 Q 从点 C 出发，以 1 单位/秒的速度沿着数轴的负方向运动，

从点 B 运动到点 O 期间速度变为原来的两倍，之后也立刻恢复原速，直至点 A 处停止运动．设运动的时间为 t 秒．问：



- (1) 当点 P 运动 2 秒时，点 P 在数轴上表示的数是_____；当点 Q 运动 10 秒时，点 Q 在数轴上表示的数是_____；
- (2) 动点 P 从点 A 运动至 C 点需要多少时间？
- (3) P 、 Q 两点何时相遇？相遇时，求出相遇点 M 所对应的数是多少？
- (4) 在整个运动过程中，当 t 为何值时， P 、 O 两点在数轴上相距的长度与 Q 、 B 两点在数轴上相距的长度相等．（直接写出结果）

5. 【背景知识】数轴是初中数学的一个重要工具，利用数轴可以将数与形完美地结合．研究数轴我们发现了许多重要的规律：若数轴上点 A 、点 B 表示的数分别为 a 、 b ，则 A 、 B 两点之间的距离 $AB=|a-b|$ ，线段 AB 的中点表示的数为 $\frac{a+b}{2}$ ．



【问题情境】如图，数轴上点 A 表示的数为 -4 ，点 B 表示的数为 16 ，点 P 从点 A 出发，以每秒 3 个单位长度的速度沿数轴向右匀速运动，同时点 Q 从点 B 出发，以每秒 2 个单位长度的速度向左匀速运动．设运动时间为 t 秒 ($t > 0$)．

【综合运用】

(1) 填空：

① A 、 B 两点间的距离 $AB=$ _____，线段 AB 的中点表示的数为_____；

② 当 t 为_____秒时，点 P 与点 Q 相遇．

(2) ① 用含 t 的代数式表示： t 秒后，点 P 表示的数为_____；点 Q 表示的数为_____；

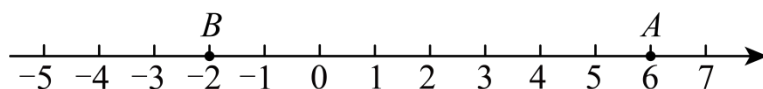
② 若将数轴翻折，使点 A 与数轴上表示 6 的点重合，则此时点 B 与数轴上表示数_____的点重合．

(3) 若点 M 为 PA 的中点，点 N 为 PB 的中点，点 P 在运动过程中，线段 MN 的长度是否发生变化？若变

化，请说明理由；若不变，请求出线段 MN 的长。

6. 我们规定：对于数轴上不同的三个点 M, N, P ，当点 M 在点 N 右侧时，若点 P 到点 M 的距离恰好为点 P 到点 N 的距离的 n 倍，且 n 为正整数，（即 $PM = nPN$ ），则称点 P 是“ $[M, N]n$ 关联点”

如图，已知在数轴上，原点为 O ，点 A ，点 B 表示的数分别为 $6, -2$ 。



(1) 原点 O (填“是”或“不是”) “ $[A, B]n$ 关联点”；

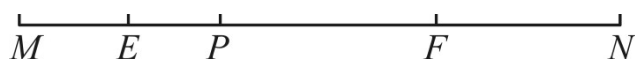
(2) 若点 C 是“ $[A, B]3$ 关联点”，则点 C 所表示的数_；

(3) 若点 A 沿数轴向右运动，每秒运动 1 个单位长度，同时点 B 沿数轴向左运动，每秒运动 1 个单位长度，则运动时间为_秒时，原点 O 恰好是“ $[A, B]n$ 关联点”，此时 n 的值为_；

(4) 点 Q 在 A, B 之间运动，且不与 A, B 两点重合，作“ $[A, Q]2$ 关联点”，记为 A' ，作“ $[Q, B]3$ 关联点”，记为 B' ，且满足 A', B' 分别在线段 AQ 和 BQ 上。当点 Q 运动时，若存在整数 m, n ，使得式子 $mQA' + nQB'$ 为定值，求出 m, n 满足的数量关系。

考点 02 线段的和、差、倍

7. 如图， P 是线段 MN 上一点， E, F 两点分别在线段 PM, PN 上运动，且 $NF = 2PE$ 。



(1) 若 $PM = \frac{1}{2}PN$ ， $ME = 2$ ，求线段 PF 的长；

(2) 如果不论 E, F 两点如何运动，都有 $PF = 2EM$ 。

① 若 Q 是直线 MN 上一点，且 $MQ - NQ = PQ$ ，求 $\frac{PQ}{MN}$ 的值；

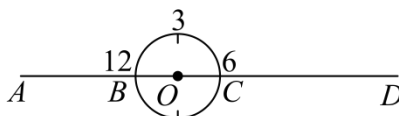
② 若 $PE = 5$ 时，恰好有 $EF = \frac{1}{2}MN$ ，此时 E 点停止不动，将 F 点向左移动（ F 点始终在线段 PN 上），

C, D 分别是 EF, PF 的中点，试判断在 F 点向左移动的过程中， $\frac{CD}{MN}$ 是否发生变化？如果不变，请求出该值；如果发生变化，请说明理由。

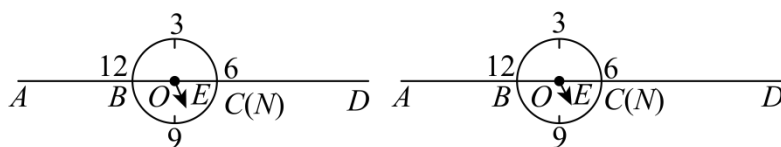
8. 小敏在商场买了一块机械手表，爱钻研的小敏发现了手表上的数学问题，如图¹所示是一块手表，可以看成如图²的数学模型（点 A 和点 D 是表带的两端，点 A, B, C, D 在同一条线段上）。



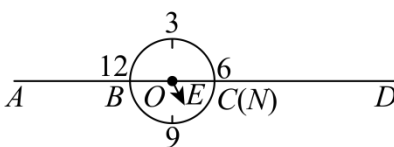
图①



图②



图③

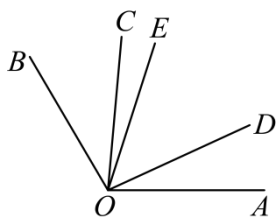


图④

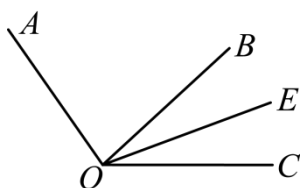
- (1) 已知表盘直径 BC 为 3cm ， $CD = 2AB$ ，若 B 是 AC 中点，求 AD 的长度；
- (2) 在某个时刻，分针 ON 指向表盘上的数字“6”（此时 ON 与 OC 重合），时针为 OE ，小敏一看现在正好是 $8:30$ ，如图 3 所示。
- ① 求 $8:30$ 时分针和时针夹角的度数；
- ② 作射线 OF ，使 $\angle EOF = 20^\circ$ ，求此时 $\angle BOF$ 的度数。
- (3) 如图 4 所示，自 $8:30$ 之后， OM 始终是 $\angle EON$ 的角平分线（分针还是 ON ），在一小时以内，直接写出经过多少分钟后， $\angle EOM$ 的度数是 25° 。

考点 03 角的和、差、倍

9. 如图，已知射线 OC 、 OD 是钝角 $\angle AOB$ 内的两条射线， $\angle AOB = 2\angle COD$ ， OE 平分 $\angle BOD$ 。



- (1) 如果 $\angle AOB = 120^\circ$ ， $\angle AOD = 30^\circ$ ，求 $\angle COE$ 的度数；
- (2) 如果 $\angle AOB$ 的度数不确定，只给出 $\angle AOD$ 的度数，还能求出 $\angle COE$ 的度数吗？为什么；
- (3) 作 $\angle AOC$ 的角平分线 OF ，如果现在只给出 $\angle AOB$ 的度数，是否能确定 $\angle EOF$ 的度数？请说明理由。
10. 如图，已知 $\angle AOC = 120^\circ$ ， OB 是 $\angle AOC$ 内部的一条射线， OE 是 $\angle BOC$ 的平分线。



- (1) 若 $\angle BOC$ 与 $\angle AOC$ 互补，那么 $\angle COE = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ；
- (2) 若 OD 是 $\angle AOB$ 的平分线，求 $\angle DOE$ 的度数；
- (3) 若 $\angle BOC = 2\angle AOB$ ， OD 是 $\angle AOC$ 内部的一条射线，使得 $\angle BOD$ 与 $\angle BOC$ 互余，那么 $\angle DOE = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 已知 $\angle MON = 120^\circ$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ ， OC 平分 $\angle AON$ 。

(1) 如图 1，射线 OA 与射线 OB 均在 $\angle MON$ 的内部。

- ① 若 $\angle BOC = 20^\circ$ ， $\angle MOA = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ；
- ② 若 $\angle BOC = \alpha$ ，直接写出 $\angle MOA$ 的度数（用含 α 的式子表示）；
- (2) 如图 2，射线 OA 在 $\angle MON$ 的内部，射线 OB 在 $\angle MON$ 的外部。
- ① 若 $\angle BOC = \alpha$ ，求 $\angle MOA$ 的度数（用含 α 的式子表示）；
- ② 若在 $\angle MOA$ 的内部有一条射线 OD ，使得 $\angle AOD = \angle BON$ ，直接写出 $\angle MOD$ 的度数。

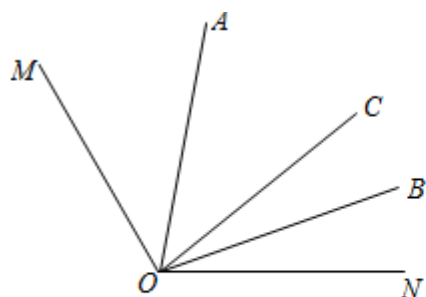


图1

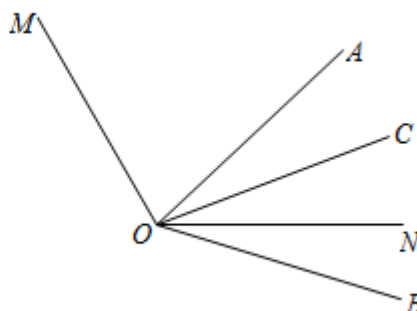


图2

12. 如图 1，已知 OC 、 OD 是 $\angle AOB$ 内的两条射线。

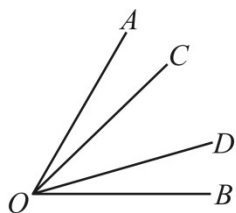


图1

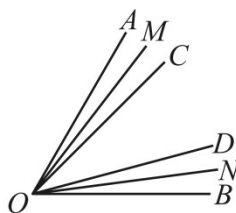


图2

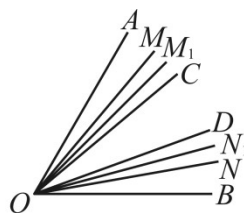
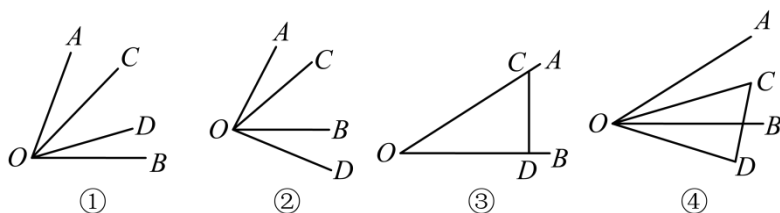


图3

- (1) 已知 $\angle AOB = 60^\circ$ ， $\angle COD = 28^\circ$ ， $\angle AOC = \angle BOD$ ，那么 $\angle AOC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 如图 2，设 $\angle AOB$ 的度数是 x ， $\angle COD$ 的度数是 y ，作射线 OM 平分 $\angle AOC$ ，射线 ON 平分 $\angle BOD$ 。
- ① 如果 $x = 60^\circ$ ， $y = 30^\circ$ ，求 $\angle MON$ 的度数。
- ② 如图 3，作 OM_1 平分 $\angle MOC$ ， ON_1 平分 $\angle NOD$ ；作 OM_2 平分 $\angle M_1OC$ ， ON_2 平分 $\angle N_1OD$ ，按此规律以

此类推……作 OM_n 平分 $\angle M_{n-1}OC$ ， ON_n 平分 $\angle N_{n-1}OD$ ，用含 x 、 y 、 n 的代数式表示 $\angle M_1ON_1$ 和 $\angle M_nON_n$ 的度数。（直接写出答案）

13. 定义：从一个角的顶点出发，在角的内部引两条射线，如果这两条射线所成的角等于这个角的一半，那么这两条射线所成的角叫做这个角的内半角、如图①所示，若 $\angle COD = \frac{1}{2} \angle AOB$ ，则 $\angle COD$ 是 $\angle AOB$ 的内半角。



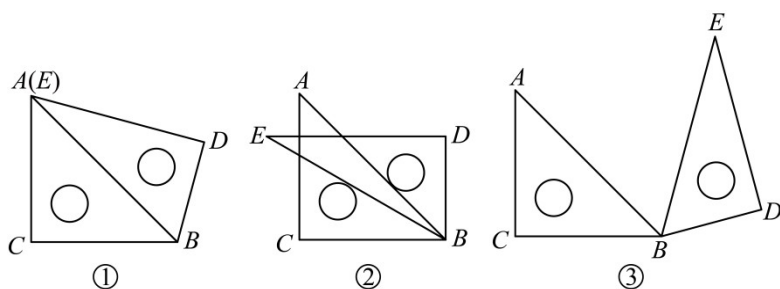
(1) 如图①所示，已知 $\angle AOB = 70^\circ$ ， $\angle AOC = 15^\circ$ ， $\angle COD$ 是 $\angle AOB$ 的内半角，则 $\angle BOD =$ _____；

(2) 如图②，已知 $\angle AOB = 63^\circ$ ，将 $\angle AOB$ 绕点 O 按顺时针方向旋转一个角度 α ($0 < \alpha < 63^\circ$) 至 $\angle COD$ ，当旋转的角度 α 为何值时， $\angle COB$ 是 $\angle AOD$ 的内半角？

(3) 已知 $\angle AOB = 30^\circ$ ，把一块含有 30° 角的三角板如图③叠放，将三角板绕顶点 O 以 $3^\circ/\text{秒}$ 的速度按顺时针方向旋转，如图④，问：在旋转一周的过程中，射线 OA ， OB ， OC ， OD 能否构成内半角？若能，请求出旋转的时间；若不能，请说明理由。

考点 04 三角板问题

14. 在数学研究中，观察、猜想、实验验证、得出结论，是我们常用的几何探究方式。请利用一副含有 45° 角的直角三角板 ABC 和含有 30° 角的直角三角板 BDE 尝试完成探究。



【实验操作】

(1) 若边 BA 和边 BE 重合摆成图①的形状，则 $\angle CBD =$ _____；

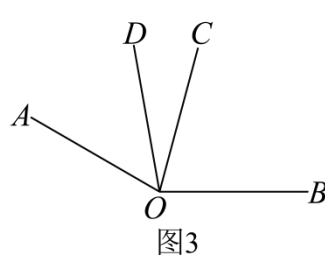
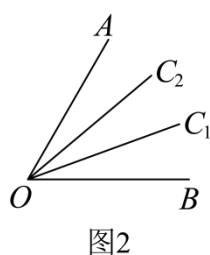
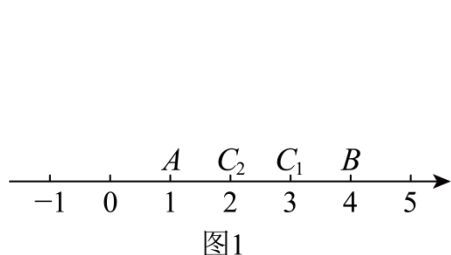
(2) 保持三角板 ABC 不动，将 45° 角的顶点与三角板 BDE 的 60° 角的顶点重合，然后摆动三角板 BDE ，请问：当 $\angle ABE$ 为多少度时， $\angle CBD = 90^\circ$ 。请说明理由；

【拓展延伸】

(3) 试探索：保持三角板 ABC 不动，将 45° 角的顶点与三角板 BDE 的 60° 角的顶点重合，然后摆动三角板 BDE ，使得 $\angle ABD$ 是 $\angle ABE$ 的两倍，请直接写出 $\angle ABE$ 的度数。

考点 05 线段、角的综合应用

15. 已知 A 、 B 、 C 为数轴上三点，若点 C 到点 A 的距离是点 C 到点 B 的距离的 2 倍，则称点 C 是点 (A, B) 的“倍距点”。如图 1 中，点 A 表示的数为 1，点 B 表示的数为 4，点 C_1 表示的数为 3，点 C_2 表示的数为 2，则点 C_1 是点 (A, B) 的“倍距点”但不是点 (B, A) 的“倍距点”，点 C_2 是点 (B, A) 的“倍距点”但不是点 (A, B) 的“倍距点”。对于角，我们定义角的一条三等分线为这个角的两边的“倍角线”。如图 2，射线 OC_1 ， OC_2 是 $\angle AOB$ 的三等分线，即 $\angle AOC_2 = \angle C_2OC_1 = \angle C_1OB = \frac{1}{3}\angle AOB$ ，则称射线 OC_1 是射线 (OA, OB) 的“倍角线”但不是射线 (OB, OA) 的“倍角线”，射线 OC_2 是射线 (OB, OA) 的“倍角线”但不是射线 (OA, OB) 的“倍角线”。



- (1) A 、 B 、 C 为数轴上三点，点 A 表示的数是 -2 ，点 B 表示的数是 4 ，点 C 在点 A ，点 B 之间，若点 C 是点 (A, B) 的“倍距点”，求点 C 表示的数；
- (2) 在 (1) 的条件下，动点 P 从点 A 出发，沿数轴向右以 2 个单位长度 / 秒的速度运动，设点 P 的运动时间为 t 秒，当点 B 是点 (A, P) 的“倍距点”时，求 t 的值；
- (3) 如图 3， $\angle AOB = 150^\circ$ ， OC 平分 $\angle AOB$ ，射线 OD 是射线 (OB, OA) 的“倍角线”。
 - ① 求 $\angle COD$ 的度数；
 - ② $\angle COD$ 绕点 O 以 $5^\circ/\text{秒}$ 的速度按顺时针方向旋转，在旋转的过程中，射线 OC ， OD 对应的射线分别为 OM ， ON ，当射线 ON 与射线 OB 重合时，停止旋转，设旋转的时间为 t 秒，当射线 ON 是射线 (OA, OB) 的“倍角线”时，求 t 的值；
- (4) 在 (2) 的条件下，当射线 OM ， ON ， OB 三条射线中，有一条射线是另外两条射线的“倍角线”时，直接

写出 t 的值．

16．利用数轴和绝对值的知识我们可以研究两点之间的距离．线段的计算和角的计算也有密切关联，借助对数轴的研究，可以迁移到角度的研究．

【观察】已知数轴上有两点 A 、 B

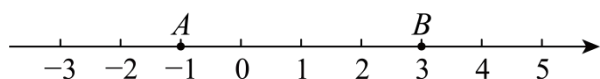


图1

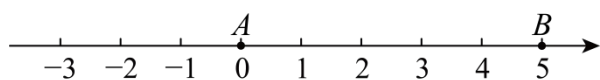


图2

(1) 如图1，点 A 表示的数是 -1 ，点 B 表示的数是 3 ，线段 AB 的长度——，可以理解为 $AB = |(-1) - 3|$ ；

如图2，点 A 表示的数是 0 ，点 B 表示的数是 5 ，线段 AB 的长度是——，可以理解为 $AB = |0 - 5|$ 。

【归纳】(2) 由此小华得出结论：若点 A 表示的数是 x ，点 B 表示的数是 y ，则 A 与 B 两点之间的距离 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 若点 A 表示的数是 x ，点 B 表示的数是 -3 ， $AB = 5$ ，则 $|x - (-3)| = 5$ ，得 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【迁移】小华根据数轴的定义结合圆规设计了一种“曲形数轴”用来解决角度问题．如图3，标记射线 OA 表示 0° ，规定顺时针方向为正方向，选取 1° 为单位长度。例如：射线 OM 表示 30° ，射线 ON 表示 110° ，则可以得到 $\angle MON = |30^\circ - 110^\circ| = 80^\circ$ 。

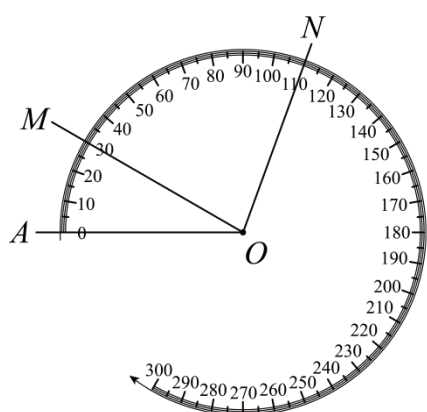


图3

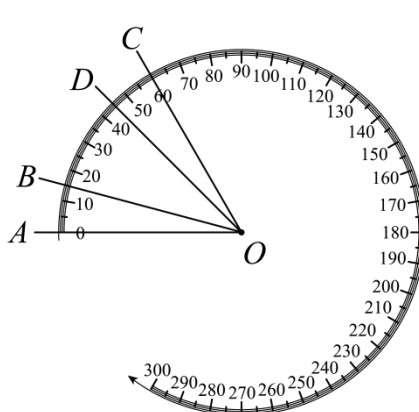


图4

(4) 若射线 OM 表示 m° ，射线 ON 表示 n° ，则 $\angle MON = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ (用含 m, n 的代数式表示)。

【应用】如图4，已知 $\angle AOC = 60^\circ$ ， $\angle BOD = 30^\circ$ ， $\angle AOB = 15^\circ$ ，射线 OB, OD 同时绕点 O 以 $5^\circ/s$ 的速度顺

时针旋转，设旋转时间为 t ($0 < t < 27$) 秒

(5) 当 $t =$ _____ 秒时， $\angle BOC = 30^\circ$.

(6) 当 $t =$ _____ 秒时， $\angle AOB = 3\angle COD$.

考点 06 实际应用题

17 . 小明与同学约定好在距家 6 千米的公园聚会，可供小明选择的出行方式如下表所示，其中从小明家往公园方向 0.5 千米处有公交专线直达公园 .

出行方式	等待上车时间 (分钟)	速度 (千米/小时)	费用	
出租车	2	30	不超过 3 千米	超过 3 千米部分
			10 元	里程费：2 元 /千米 时长费：0.5 元 /分钟
公交专线	3	20	票价共 3 元	
便民自行车	0	15	每 15 分钟 1 元，不足 15 分钟按 15 分钟计算	
步行	0	5	0 元	

- (1)若小明乘坐公交专线前往，则小明需要花费的时间为多少分钟？
- (2)下午 5:30 同学聚会结束，小明想利用剩余的 14 元，并在下午 6:00 前到家；
- ①若小明选择乘坐出租车，则小明能否按照计划到家并支付费用？若能，请计算出所需要的费用和到家的时间，若不能，请说明理由；
- ②请你帮他设计一种用时最短的返程方案，并计算出所需要的费用和到家时间 .

18 . 如图，甲、乙两台搬运机器人分别固定在数轴型仓库的 8 号货架 (甲初始位置) 和 13 号货架 (乙初始

位置)，货架编号沿数轴正方向递增，机器人仅沿数轴正/负方向移动，每次移动以“货架间距”为单位（¹个单位对应¹个货架间距）。系统每次下达¹条运输指令，指令类型分为三类，各类指令对应的机器人移动规则唯一且固定：



- ①协同搬运指令：甲向正方向移动²个单位，乙向负方向移动²个单位；
- ②甲优先搬运指令：甲向正方向移动²个单位，乙向正方向移动¹个单位；
- ③乙优先搬运指令：甲向负方向移动²个单位，乙向负方向移动¹个单位。

(1)从初始位置出发，仅执行¹条“协同搬运指令”后，甲、乙两台机器人之间的货架间距为_个单位长度；

(2)从初始位置出发，累计执行 k 条运输指令

- ①若 $k=8$ ，且两台机器人只执行“优先搬运指令”，设“甲优先搬运指令”执行次数为 n ，甲最终停留的货架编号为_（用 n 的代数式表示）；
- ②若“协同搬运指令”次数与“优先搬运类指令”总次数的比为 $1:1$ ，设“甲优先搬运指令”执行次数为 n ，最终停留的货架编号为_（用 $k、n$ 的代数式表示）；若此时甲、乙的位置间距为³个货架单位，求所有符合条件的 k 值及对应的各类指令执行次数。

考点 07 一次式及其应用

19. 数学活动课上，小海利用列表法研究一次式 $3x-6$ 、 $-3x-6$ 的值随着 x 的取值的变化情况。

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
$3x-6$	...	-18	-15	-12	-9	m	-3	0	...
$-3x-6$	...	6	3	0	-3	-6	-9	-12	...

根据表格，完成下列问题：

- (1)表格中的 $m=$ _____；
- (2)从表格中可以发现，当 x 的取值增大时，一次式 $3x-6$ 的值_____（填“增大”、“不变”或“减小”），一次式 $-3x-6$ 的值_____（填“增大”、“不变”或“减小”）；

(3)小海在研究时，得到这样一个结论：“当 x 的值每增加 1 时，一次式 $3x-6$ 减去一次式 $-3x-6$ 的差就增加 6 ”，你同意小海的结论吗？请利用所学知识说明理由．

20．把四张形状大小完全相同的小长方形卡片（如图¹），分两种不同形式不重叠的放在一个底面长为 m ，宽为 n 的长方形盒子底部（如图²，³），盒子底面未被卡片覆盖的部分用阴影表示．设图²中阴影部分图形的周长为 l_1 ，图³中两个阴影部分图形的周长的和为 l_2 ，

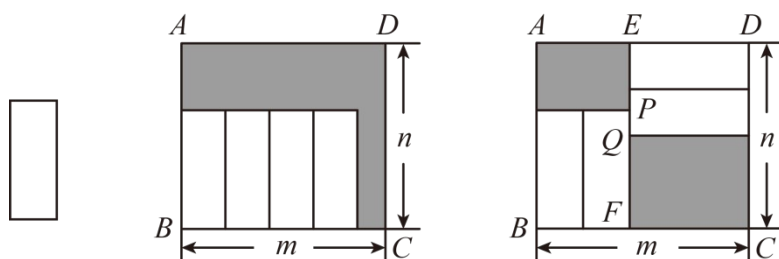


图1

图2

图3

(1)用含 m, n 的式子表示图²阴影部分的周长 l_1

(2)若 $l_1 = \frac{5}{4}l_2$ ，求 m, n 满足的关系？

21．把正整数 $1, 2, 3, 4, \dots$ ，排列成如图¹所示的一个表，从上到下分别称为第¹行、第²行、 $\dots$ ，从左到右分别称为第¹列、第²列、 $\dots$ ．用图²所示的方框在图¹中框住表中的 16 个数，把其中没有被阴影覆盖的四个数分别记为 A, B, C, D ．

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
...	...	...	...	...	...	...

图1

	A		
			B
D			
		C	

图2

(1)在图¹中， 2024 排在第_行，第_列；

(2) $A-B+C-D$ 的值是否为定值？如果是，请求出它的值；如果不是，请说明理由；

(3)若将图¹中的偶数都改为原数的相反数，奇数不变．

①设此时图¹中排在第 m 行第 n 列的数（ m 为正奇数， n 为正整数）为 w ，请用含 m, n 的式子表示 w ；

②此时 $A-B+C-D$ 的值能否为 2020 ？如果能，请求出 A 所表示的数；如果不能，请说明理由．

考点 08 新定义题

22. 定义新运算： $a*b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ ， $a \otimes b = \frac{1}{ab}$ （右边的运算为平常的加、减、乘、除）。

例如： $3*7 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}$ ， $3 \otimes 7 = \frac{1}{3 \times 7} = \frac{1}{21}$ 。

若 $a \otimes b = a*b$ ，则称有理数 a, b 为“隔一数对”。

例如： $2*3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ， $2 \otimes 3 = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$ ， $2 \otimes 3 = 2*3$ ，所以 $2, 3$ 就是一对“隔一数对”。

(1) 下列各组数是“隔一数对”的是_____（请填序号）。

① $a = -\frac{4}{3}$ ， $b = -\frac{1}{3}$ ；

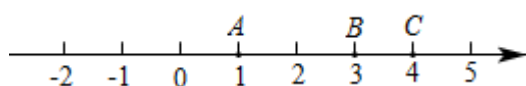
② $a = -1$ ， $b = 1$ 。

(2) 计算： $(-3)*4 - (-3) \otimes 4 + (-2024)*(-2024)$ ；

(3) 已知两个连续的非零整数都是“隔一数对”。

计算： $1 \otimes 2 + 2 \otimes 3 + 3 \otimes 4 + 4 \otimes 5 + \cdots + 2023 \otimes 2024 + 2024 \otimes 2025$ 。

23. 对于数轴上的 A, B, C 三点，给出如下定义：若其中一个点与另外两个点的距离恰好满足 2 倍的数量关系，则称该点是另外两个点的“联盟点”。



例如：数轴上点 A, B, C 所表示的数分别为 $1, 3, 4$ ，此时点 B 是点 A, C 的“联盟点”。

(1) 若点 A 表示数 -3 ，点 B 表示数 3 ，下列各数， $-1, 0, 1$ 所对应的点分别是 C_1, C_2, C_3 ，其中是点 A, B 的“联盟点”的是_____；

(2) 点 A 表示数 -10 ，点 B 表示数 5 ， P 为数轴上的一个动点：

① 若点 P 在点 A 的左侧，且点 P 是点 A, B 的“联盟点”，求此时点 P 表示的数；

② 若点 P 在点 B 的右侧，点 P, A, B 中，有一个点恰好是另外两个点的“联盟点”，求此时点 P 表示的数。

24. 在数轴上，把表示数 1 的点称为基准点，记作点 $\bar{0}$ ，对于两个不同的点 P 和 Q ，若点 P 、点 Q 到基准点 $\bar{0}$ 的距离相等，则称点 P 与点 Q 互为基准变换点。例如，点 P 表示数 -1 ，点 Q 表示数 3 ，它们与基准点

$\overline{0}$ 的距离都是两个单位长度，点 P 与点 Q 互为基准变换点．

(1) 已知点 A 表示数 a ，点 B 表示数 x ，点 A 与点 B 互为基准变换点．

① 若 $a = 0$ ，则 $x = \underline{\hspace{1cm}}$ ；若 $a = 4$ ，则 $x = \underline{\hspace{1cm}}$ ；

② 用含 a 的一次代数式表示 x ，则 $x = \underline{\hspace{1cm}}$ ；

(2) 点 M 在点 N 的左边 8 个单位长度处，对点 M 做如下操作：点 M 沿数轴向右移动 k ($k > 0$) 个单位长度得到 M_1 , M_2 为 M_1 的基准变换点，点 M_2 沿数轴向右平移移动 k 个单位长度得到 M_3 , M_4 为 M_3 的基准变换点，... 依此顺序不断地重复，得到 $M_5, M_6 \dots, M_n$ ．若无论 k 为何值， M_n 与 N 两点间的距离都是 2024 ，则此时 $M_n = \underline{\hspace{1cm}}$ ．

考点 09 材料阅读、规律题

25．小丽是个爱思考的学生，最近，她发现一些特殊的两位数乘法，

如： $21 \times 29 = 609$ $23 \times 27 = 621$

$31 \times 39 = 1209$ $52 \times 58 = 3016$

(1) 根据上述算式的规律请计算： $87 \times 83 = \underline{\hspace{1cm}}$

(2) 试写出一个与上述算式具有同样特征的算式：

(3) 为了反映上述规律，如果设其中一个因数十位上的数字为 m ，个位上的数字为 n ，那么该因数可表示为： $\underline{\hspace{1cm}}$ ，另一个因数可表示为 $\underline{\hspace{1cm}}$ ，计算结果可表示为

26．七年级智远团成员自主开展数学微项目研究，结合最近所学内容，他们开展了立方数的性质研究．根据背景素材，探索解决问题：

探索立方数的性质		
素材	古希腊数学家发现：一个正整数 k 的三次幂总能表示成 k 个连续奇数之和．	举例论证： $1^3 = 1$ $2^3 = 3 + 5$ $3^3 = 7 + 9 + 11$ (1) 请按规律写出： $4^3 =$
归 纳	(2) 如果 k^3 表示成 k 个连续奇数之和时，	(3) 当 $k = 10$ 时，等号右边的式子的中间两个

数 学 规 律	其中有一个奇数是 3^5 , $k =$	数 (即第 5 个数和第 6 个数) 是
应用数 学规律	(4) 利用这个结论计算 : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3 + 11^3$	

27. 当前计算机常用的数据形式是二进制, 二进制数与十进制数之间的转化问题、二进制数的计算问题十分常见. 为了区分二进制与十进制的数, 我们一般在二进制数的右下角标注 2 , 例如 $(10101)_2$.

(1) 类比十进制的计数原理: $12306 = 1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 6$, 把一个二进制数转化为十进制数的方法为: $(10110)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 = 22$

① 将二进制数 $(11001)_2$ 转化为十进制数为_____;

② 一个字长为 7 位的二进制数能表示的十进制数值的最大值为_____;

(2) ① 把十进制数 39 转化为二进制数;

② 把二进制数 $(1011001)_2$ 转化为八进制数.

(3) 二进制的四则运算与十进制的四则运算原理相同, 不同的是十进制的数位有十个数码 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, 满十进一, 而二进制的数位有两个数码 0 和 1 , 满二进一.

二进制的四则运算口诀如下:

加法: $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=(10)_2$.

减法: $0-0=0$, $1-0=1$, $1-1=0$, $(10)_2-1=1$ (同一数位不够减时, 向高一位借 1 当 2).

乘法: $0 \times 0 = 0$, $1 \times 0 = 0$, $0 \times 1 = 0$, $1 \times 1 = 1$.

除法: $0 \div 1 = 0$, $1 \div 1 = 1$.

请根据以上信息和所学的竖式计算相关知识, 填空:

① $(10110)_2 + (1101)_2 = (\text{_____})_2$;

② $(110101)_2 - (11110)_2 = (\text{_____})_2$;

③ $(1101)_2 \times (101)_2 + (10101)_2 \times (111)_2 = (\text{_____})_2$.

28. 【溯源】“+、-”号是 15 世纪德国数学家魏德曼正式使用的，他在工作中发现用横线加一竖可以表示增加的意思，于是把“+”作为加号，从而“+”号中拿去“|”竖，就可表示减少的意思，于是把“-”作为减号。“ $\times$ ”号是 18 世纪英国数学家欧德莱发明的，他觉得乘法也是增加的意思，但又和加法不同，于是他就把加号斜过来写，表示数字增加的另一种运算。“ $\div$ ”号是瑞士学者雷恩于 1656 年出版的一本代数书中提到的，当该书几年后被译成英文时，才逐渐被人们认识和接受。四则运算的性质和规律是许多数学理论的重要组成部分，对四则运算的深入研究和拓展，推动了数学的不断发展！

【提出问题】小文同学通过有理数运算的学习，他深深感受到四则运算的运算法则来源于生活实际，符合人们认知规律。

基于以上学习和认知，小文同学也定义了一个新的运算“ $@$ ”，满足以下两个要求：

① $x @ x = 0$ ；② $x @(y @ z) = x @ y + z$ ，其中 x 、 y 、 z 可以取任何有理数，

求： $2024 @ 1012$ 的值。

【分析问题】爱思考的小丽同学看到上面的这个问题，做了以下尝试：

第一步：先让②中的 $z = y$ ，于是就有了： $x @(y @ y) = x @ y + y$ ，由①可以知道 $y @ y = \underline{\hspace{2cm}}$ ，于是有： $x @ 0 = x @ y + y$ 记为 (1) 式。

第二步：令②中的 $y = x, z = x$ ，则有 $x @(x @ x) = x @ x + x$ ，继续由①的条件，于是就有： $x @ 0 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
(用含字母 x 的式子表示) 记为 (2) 式。

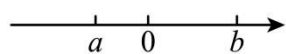
结合 (1) 式和 (2) 式，聪明的你应该可以得到 $x @ y = \underline{\hspace{2cm}}$ (用含字母 x 、 y 的式子表示)。

【解决问题】 $2024 @ 1012$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【拓展问题】已知 $(-3 @ 7) + |m| = (-2^2) @ \frac{4}{3}$ ，求 m 的倒数。

考点 10 绝对值的化简问题

29. 如图点 A ， B 在数轴上分别表示有理数 a ， b ， A ， B 两点之间的距离表示为 AB ，在数轴上 A ， B 两点之间的距离 $AB = |a - b|$ 。



回答下列问题：

(1) 1 与 -3 两点之间的距离是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ， x 和 -3 两点之间的距离是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若 x 表示一个有理数，请你化简 $|x-1|+|x+3|$ ，并结合数轴求 $|x-1|+|x+3|$ 的最小值。（写解答过程）

(3) $|x-1|-|x+3|$ 的最大值是_____。

(4) $|x-1|+|x-2|+|x-3|$ 的最小值是_____。

(5) $|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$ 的最小值是_____。

(6) $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-2025|$ 的最小值是_____。

30. 分类讨论是一种重要的数学方法，如在化简 $|a|$ 时，可以这样分类：当 $a > 0$ 时， $|a| = a$ ；当 $a = 0$ 时， $|a| = 0$ ；当 $a < 0$ 时， $|a| = -a$ 。用这种方法解决下列问题：

(1) 当 $a > 0$ 时，则 $\frac{a}{|a|} = \underline{\hspace{1cm}}$ ；当 $a < 0$ 时，则 $\frac{a}{|a|} = \underline{\hspace{1cm}}$ ；当 $|ab| = -ab$ 时，则 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(2) 若 $a+b+c=0$ ， $abc < 0$ ，求 $\frac{b+c}{|a|} + \frac{a+c}{|b|} + \frac{a+b}{|c|}$ 的值。

(3) 若 $a+b+c=0$ ， $a > 0$ ， $c < 0$ ，且 $a+c < 0$ ，请分析 b 的正负性，并求出 $\frac{2a+b+c}{|a|} + \frac{a+2b+c}{|b|} + \frac{a+b+2c}{|c|}$ 的值。

考点 11 幻方的综合应用（有理数、一次式、一元一次方程）

31. 综合与实践

阅读材料，解答下列问题：

幻方历史悠久，传说最早出现在夏禹时代的“洛书”，如图 1。把图 1 的洛书用今天的数学符号翻译出来，就是一个三阶幻方，如图 2，它的每行、每列、每条对角线上的三个数的和都相等。

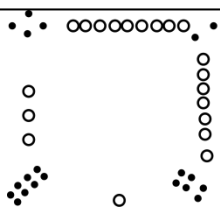


图1

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图2

$x+3$	$x-4$	
$x-2$	x	
$x-1$		$x-3$

图3

17	$2x$	
	$3x$	
$x+5$		

图4

(1) 在图 2 中，每行、每列、每条对角线上三个数的和都是_____；

(2) 设图³所示的三阶幻方中间的数为 x (x 为整数)，请用含 x 的代数式将图³幻方补充完整；

(3) 如图⁴是一个三阶幻方，按方格中已给的信息，求 x 的值．

32．三阶幻方是最基础的幻方，又叫九宫格，要求由连续的九个整数组成一个三行三列的数阵，其对角线、横行、纵行的和都相等．

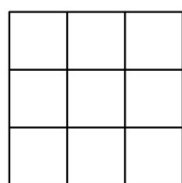


图1

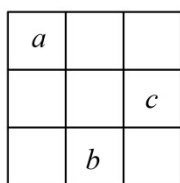


图2

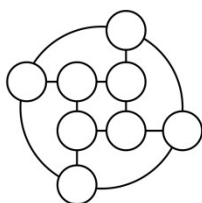


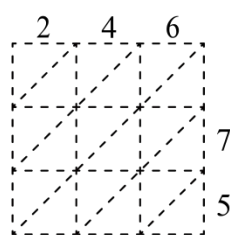
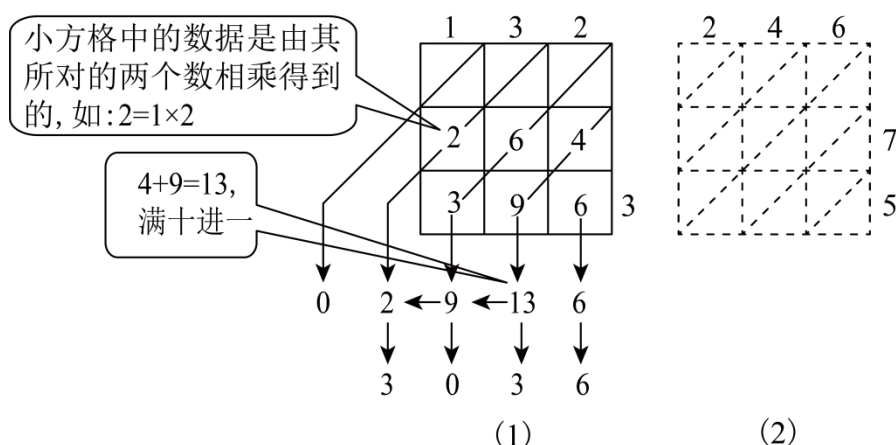
图3

(1) 如图¹，请用 $1-9$ 这九个整数填写幻方数阵；

(2) 如图²，一数学兴趣小组的同学发现，对于三阶幻方，任何一个角上的数（如数 a ）都等于与这个数不在同一横行、竖列及对角线上的两个数（如数 b 、 c ）之和的一半，即 $a = \frac{1}{2}(b+c)$ ，你认为他们的发现正确吗？说你的道理；

(3) 如图³，一数学兴趣小组的同学研究了一个变形幻方，要求填入 $1-8$ 这 8 个整数，使每一横行（ 3 个数）、每一纵行（ 3 个数）以及里面 4 个数的和都相等，请你填写出这 8 个数。（填写 1 种情况即可）

33．问题的提出：“铺地锦”是我国古代一种乘法运算方法，可将多位数乘法运算转化为一位数乘法和简单的加法运算．图（¹）表示 132×23 ，运算结果为 3036 ．



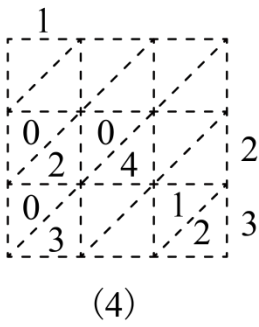
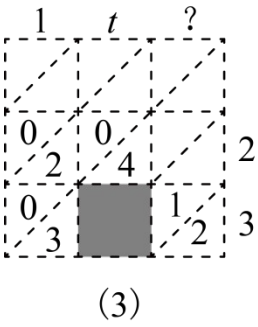
(2)

(1) 用示例的方法，计算 246×75 ，要求在图（²）中对应位置标数．

问题的拓展：

(2) 如图（³）一个百位为 1 的三位数，十位和个位数字未知，与 23 相乘，请直接写出 t 与 $?$ 的值；

(3) 在图 (4) 中按图 (1) 示例完成 (2) 的计算 .



延伸与运用：

(4) 图 (5) 表示一个三位数 xyz 与一个两位数 mn 相乘，表格中部分数据被墨迹覆盖，根据图 (5) 中现

有数据进行推断，运算结果可以用含 a 的式子表示为_____。（直接写出结果）

