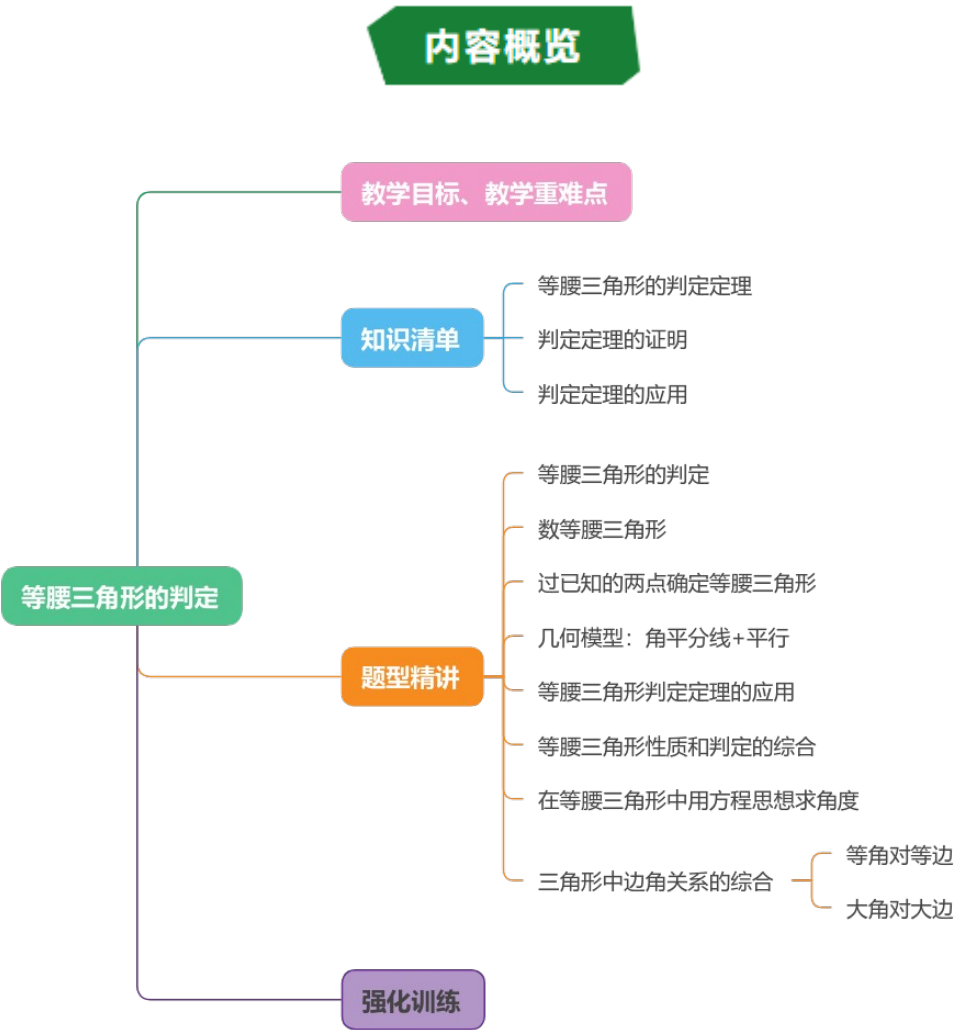


专题 18.2 等腰三角形的判定



教学目标、教学重难点

教学目标	1.掌握等腰三角形的判定方法： “等角对等边”：如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等； 2.能够运用判定定理判定等腰三角形； 3.综合运用等腰三角形的性质与判定进行推理和证明.
教学重难点	1.重点 等腰三角形的判定定理的理解与应用； 2.难点 理解“性质”与“判定”的区别与联系，运用判定定理识别、构造等腰三角形解决几何问

题.

知识清单

知识点 01 等腰三角形的判定

1. 判定方法

(1) 定义：有_____的三角形是等腰三角形；

(2) 判定定理：如果一个三角形有_____相等，那么_____也相等.(简称“_____”).

2. 性质和判定的区别

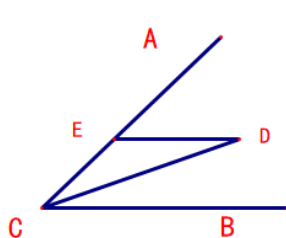
性质和判定是**互逆**命题；

性质是已知三角形_____相等，从而可知它的_____相等，简称“_____”；

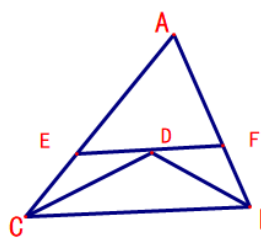
判定是已知三角形_____相等，从而判断它的_____相等.把判定改成“如果……那么……”时不能叙述

为：“如果一个三角形有两个底角相等，那么它是两腰等腰三角形”。因为在没有判定出它是等腰三角形之前，不能用“底角”“腰”这些“**专属概念**”.

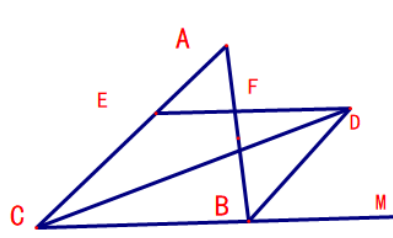
3. 一个基本模型：“角平分线+平行 $\Rightarrow$ 等腰”



CD平分 $\angle ACB$, $DE \parallel BC$
则 $DE=EC$



CD平分 $\angle ACB$, DB平分 $\angle ABC$, $DE \parallel BC$
则 $EF=CE+BF$



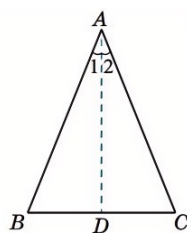
CD平分 $\angle ACB$, DB平分 $\angle ABM$, $DE \parallel BC$
则 $EF=CE-BF$

知识点 02 判定定理的证明和应用

1. 定理的证明

求证：如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等.

如图，已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \angle C$ ，求证： $AB = AC$.



【分析】在学习等腰三角形之前**证明两条线段相等最基本的思路是证明三角形全等**，所以本题要**作辅助线构造全等三角形**.

【证明】作 $\angle BAC$ 的平分线 AD ，有 $\angle 1 = \angle 2$. 又因为 $\angle B = \angle C$ ， AD 是公共边，所以由“角角边”得 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ ，从而 $AB = AC$.

2. “三线合一”的逆命题

(1) “三线合一”：等腰三角形的顶角平分线、底边上的高线、底边上的中线互相重合.

(2) 它的逆命题：在 $\triangle ABC$ 中① $AB = AC$ ，② $AD \perp BC$ ，③ AD 平分 $\angle BAC$ ，④ $BD = DC$ ，已知其中任意两个条件都能推出另外两个结论.

(三线合一) $\left. \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix} \right\} \Rightarrow ③, ④$; $\left. \begin{matrix} ① \\ ③ \end{matrix} \right\} \Rightarrow ②, ④$; $\left. \begin{matrix} ① \\ ④ \end{matrix} \right\} \Rightarrow ②, ③$;

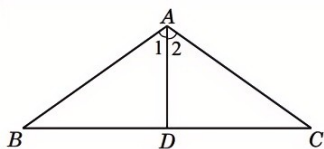
(判定) $\left. \begin{matrix} ② \\ ④ \end{matrix} \right\} \Rightarrow ①, ③$; $\left. \begin{matrix} ② \\ ③ \end{matrix} \right\} \Rightarrow ①, ④$; $\left. \begin{matrix} ③ \\ ④ \end{matrix} \right\} \Rightarrow ①, ②$;

四选二共有六种组合，其中属于等腰三角形判定的有三个。

【即学即练】

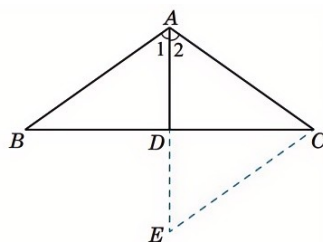
例1 如图，已知：在 $\triangle ABC$ 中， D 是边 BC 的中点， $\angle 1 = \angle 2$. 求证： $AB = AC$.

(已知 AD 是中线、角平分线，判定 $\triangle ABC$ 是等腰三角形)



【分析】在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，虽然有 $\angle 1 = \angle 2$ ， $AD = AD$ ， $BD = CD$ 这三个条件，但不能直接推出 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 全等.

思路一：**遇到中点倍长中线**



证明：如图,延长AD至点E,使 $DE=AD$,连接CE.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECD$ 中,

$\therefore BD=DC, \angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle \underline{\hspace{1cm}}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD (\underline{\hspace{1cm}}).$

$\therefore AB = \underline{\hspace{1cm}}, \angle 1 = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}}).$

又 $\because \angle 1 = \angle 2,$

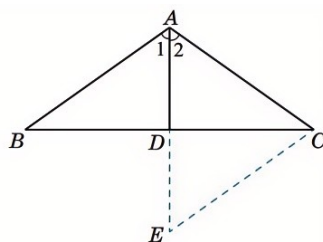
$\therefore \angle 2 = \underline{\hspace{1cm}}.$

$\therefore AC = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}}).$

$\therefore AB = AC.$

思路二：角平分线+平行 $\Rightarrow$ 等腰

过点C分别作AB的平行线,交AD延长线于点E(也可以过点B作AC的平行线)



证明：过点C分别作AB的平行线,交AD延长线于点E.

$\therefore AB \parallel CE$

$\therefore \angle 1 = \underline{\hspace{1cm}}$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$

$\therefore \angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle 2$

$\therefore AC = EC (\underline{\hspace{1cm}})$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECD$ 中,

$\therefore BD=DC$, _____, _____

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD$ (_____).

$\therefore AB=EC$ (_____).

$\therefore AB=AC$.

【点睛】 三线合一的逆命题都是**真命题**，但**不是定理**，所以在应用时不能作为定理直接用，往往需要借助全等的来推理证明，但是给予我们解题**思路——遇到“二线合一”想等腰（证全等）**。

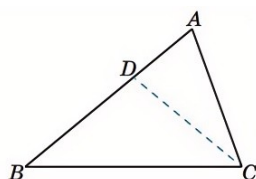
知识点 03 三角形边角关系的综合——等角对等边，大角对大边

三角形边角关系有：等边对_____，等角对_____；

大边对_____，大角对_____。

【即学即练】

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C > \angle B$. 求证： $AB > AC$.



分析：如图，由 $\angle ACB > \angle B$ ，在 $\angle ACB$ 内部作 $\angle BCD = \angle B$ ，CD交AB于点D. 根据“等角对等边”，有 $DB=DC$.

在 $\triangle ACD$ 中，根据三角不等式，有 $AD+DC > AC$ ，所以 $AB=AD+DB=AD+DC > AC$.

总结：上述结论可以简述为：在三角形中，**大角对大边**.

知识点 04 等腰三角形性质和判定的综合

	性质	判定
定理	等边对等角	等角对等边
三线合一	等腰 $\Rightarrow$ 三线合一	两线合一 $\Rightarrow$ 等腰
推广	大边对大角	大角对大边

题型精讲

题型 01 等腰三角形的判定

【典例 1】在 $\triangle ABC$ 中，已知两个内角的度数如下，则能判断 $\triangle ABC$ 为等腰三角形的是 ()

A. $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 80^\circ$

B. $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$

C. $\angle A = 20^\circ$, $\angle C = 80^\circ$

D. $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 70^\circ$

【变式 1】下列能断定 $\triangle ABC$ 为等腰三角形的是 ()

A. $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 50^\circ$

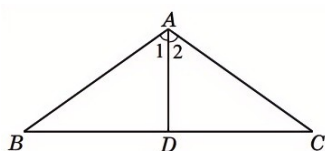
B. $\angle A = 2\angle B = 70^\circ$

C. $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 70^\circ$

D. $AB = 3$, $BC = 6$, 周长为 14

【变式 2】在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 50^\circ$, $\angle C = 65^\circ$ ，则 $\triangle ABC$ 是_____三角形。

【变式 3】如图，下列条件不能判定 $\triangle ABC$ 是等腰三角形的是 ()



A. $\angle B = \angle C$

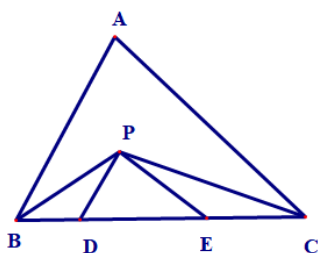
B. $AD \perp BC$, $\angle BAD = \angle CAD$

C. $BD = AD = CD$

D. $AD \perp BC$, $BD = CD$

【变式 4】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 8$ ，BP、CP 分别是 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的平分线，PD//AB，

PE//AC，那么 $\triangle PDE$ 的周长是()



A.2

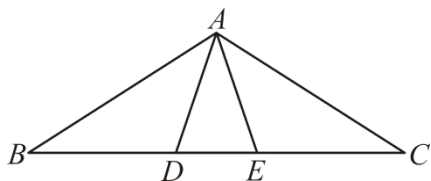
B.4

C.8

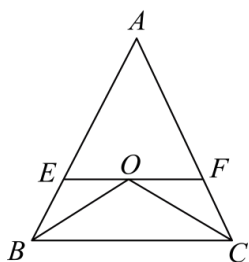
D.16

题型 02 数等腰三角形

【典例 1】 如图， $AB=AC$ ， $AD=AE$ ， $\angle BAC=108^\circ$ ， $\angle DAE=36^\circ$ ，则 $\angle BAD=$ _____， $\angle EAC=$ _____，图中的等腰三角形有 _____ 个。



【变式 1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 O ，过 O 作 $EF \parallel BC$ 交 AB 于 E ，交 AC 于 F ，那么图中所有的等腰三角形个数是 ()。



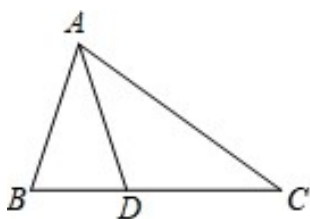
A. 4 个

B. 5 个

C. 6 个

D. 7 个

【变式 2】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC=BC$ ， $\angle C=36^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ，则图中等腰三角形的个数是 ()



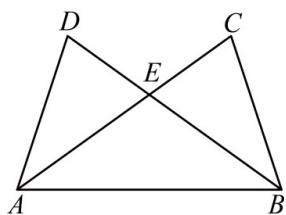
A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【变式 3】 如图， $AD=BC$ ， $AB=AC=BD$ ， $\angle C=72^\circ$ ，则图中一共有 () 个等腰三角形。



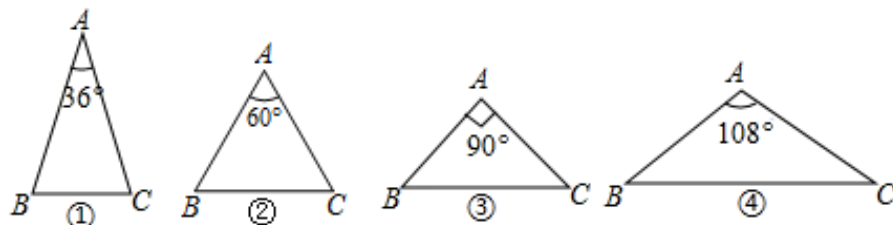
A . 3

B . 4

C . 5

D . 6

【变式4】如图，下列4个三角形中，均有 $AB=AC$ ，则经过三角形的一个顶点的一条直线能够将这个三角形分成两个小等腰三角形的是（ ）



A . ①②④

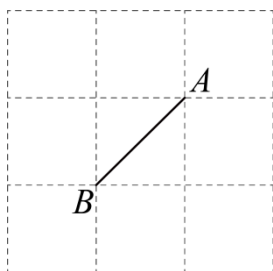
B . ②③④

C . ①②③

D . ①③④

题型 03 已知两点找等腰

【典例1】在正方形网格中，网格线的交点称为格点．如图所示，已知 A, B 是两个格点，如果点 C 也是图中的格点，且使 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，那么点 C 的个数是（ ）



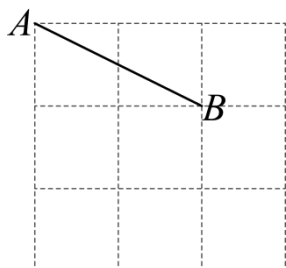
A . 6

B . 7

C . 8

D . 9

【变式1】在如图所示的正方形网格中，点 A, B 均在格点（小正方形的顶点）上，连接 AB ，以 AB 为一边，在格点上找一点 C ，使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形的点 C 有（ ）



A . 1个

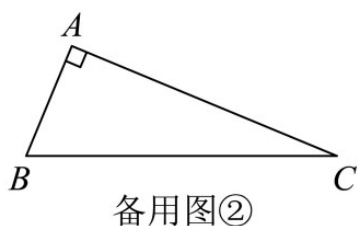
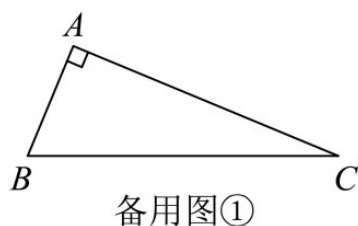
B . 2个

C . 3个

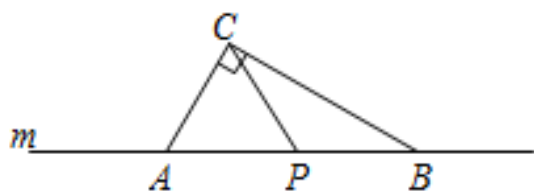
D . 4个

【变式2】已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=90^\circ$ ， $\angle B=67.5^\circ$ ，请画一条直线，把这个三角形分割成两个等腰三角形。（请

你选用下面给出的备用图，用两种不同的分割方法画出来．只需画图，不必说明理由，但要在图中标出相等两角的度数）



【变式3】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 60^\circ$ ，动点 P 在斜边 AB 所在的直线 m 上运动，连结 PC ，那点 P 在直线 m 上运动时，能使图中出现等腰三角形的点 P 的位置有（ ）



A. 6个

B. 5个

C. 4个

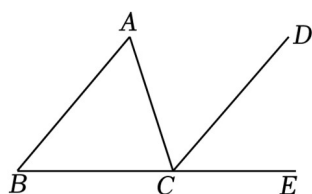
D. 3个

【变式4】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = BC > AB$ ，点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且点 P 与 $\triangle ABC$ 的任意两个顶点构成 $\triangle PAB$ ， $\triangle PBC$ ， $\triangle PAC$ 均是等腰三角形，则满足上述条件的所有点 P 的个数为_____个．



题型 04 角平分线+平行 $\Rightarrow$ 等腰

【典例1】如图， DC 平分 $\angle ACE$ ，且 $AB \parallel CD$ ，求证： $\triangle ABC$ 为等腰三角形．请你填空完成下面的推理过程，并在空白括号内注明推理的依据．



证明： $AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle A = \angle ACD \text{ () } ①$$

$$\angle B = \angle DCE$$

$\therefore DC$ 平分 $\angle ACE$

$$\therefore \angle ACD = \angle DCE$$

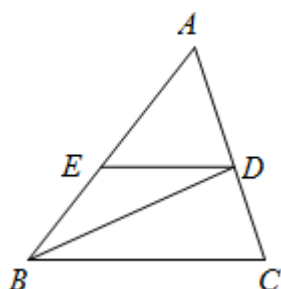
$$\therefore \angle B = \angle A \text{ () } ②$$

$$\therefore AC = BC \text{ () } ③$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形 .

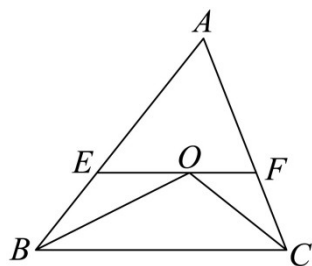
$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形 .

【变式1】 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， BD 平分 $\angle ABC$, $DE \parallel CB$ ，说明 $BE = DE$ 的理由 .

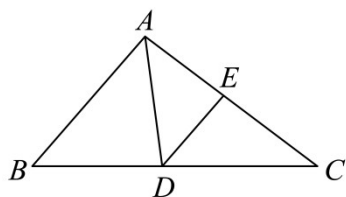


【变式2】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的平分线交于点 O ，过点 O 作 $EF \parallel BC$ 交 AB 于 E ，交 AC

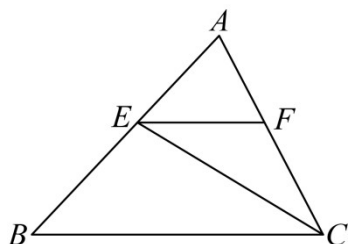
于 F . 求证： $\triangle EBO$ 为等腰三角形；



【变式3】 如图， AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \parallel AB$ 交 AC 于 E ，若 $AE = 5\text{cm}$ ，则 $DE =$ _____ cm 。

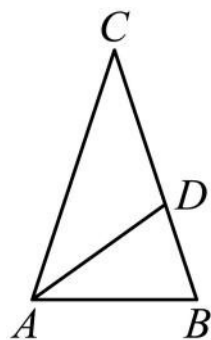


【变式4】 如图， $EF \parallel BC$ 交 AC 于点 F ， EF 平分 $\angle AEC$ ，求证： $\triangle BEC$ 是等腰三角形。

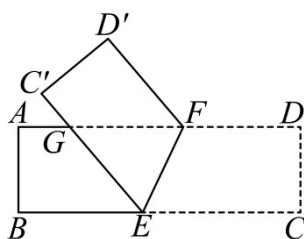


题型 05 等腰三角形判定的应用

【典例1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 36^\circ$ ， $\angle B = 72^\circ$ ， AD 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于点 D 。写出图中的等腰三角形，并加以证明。



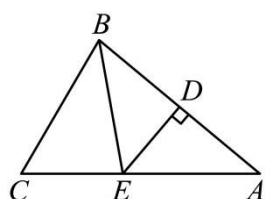
【变式1】 如图，将一张长方形纸条 $ABCD$ 沿 EF 折叠，使点 C ， D 分别落在点 C' ， D' 处， EC' 交 AD 于点 G ， $\angle AGC' = 48^\circ$ ， $AD \parallel BC$ 。



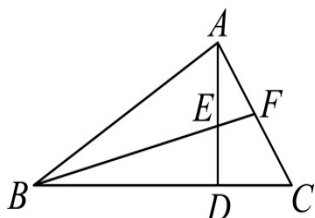
(1) 求 $\angle CEF$ 的度数；

(2) 求证： $\triangle EFG$ 是等腰三角形。

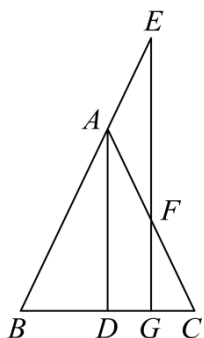
【变式2】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 40^\circ$ ， $\angle ABC = 80^\circ$ ， BE 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 E ， $ED \perp AB$ 于点 D 。求证： ED 平分 $\angle AEB$ 。



【变式3】 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AD \perp BC$ ， AD 与 $\angle ABC$ 的平分线交于点 E ，试说明 $\triangle AEF$ 是等腰三角形的理由。



【变式4】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 为 BC 中点，点 E 是 BA 延长线上一点，点 F 是 AC 上一点，连接 EF 并延长交 BC 于点 G ，且 $AE = AF$ 。

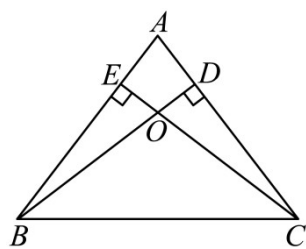


(1) 若 $\angle ABC = 50^\circ$ ，求 $\angle AEF$ 的度数；

(2)求证： $AD \parallel EG$.

题型 06 等腰三角形性质和判定的综合

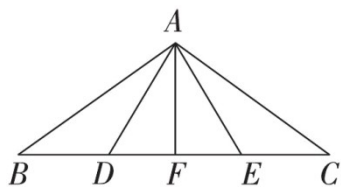
【典例 1】 如图， $\triangle ABC$ 是等腰三角形， $AB = AC$ ， $BD \perp AC$ 于点 D ， $CE \perp AB$ 于点 E ， BD 与 CE 相交于点 O .



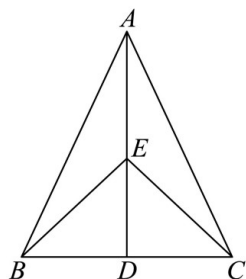
(1)求证： $\triangle OBC$ 是等腰三角形；

(2)若 $AB = 5$ ， $BD = 4$ ， $BC = 6$ ，求点 A 到 BC 边的距离 .

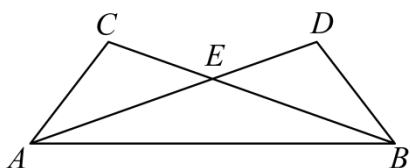
【变式 1】 如下图，已知点 D, E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上， $AB = AC$ ， $BD = CE$ ， F 为 DE 的中点 . 试说明： $AF \perp BC$.



【变式 2】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， E 是 AD 上一点， $AB = AC$ ， $\angle ABE = \angle ACE$ ，请填写理由，说明 $AD \perp BC$.



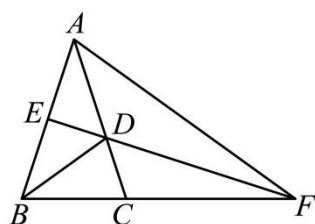
【变式 3】 如图，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 中， $\angle C = \angle D$ ， $AC = BD$ ， $BC = AD$ ，求证： $AE = BE$.



【变式4】 图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle BAC=36^\circ$ ， BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，交 AC 于点 D ， E 是 AB 的中点，连接 ED 并延长，交 BC 的延长线于点 F ，连接 AF 。

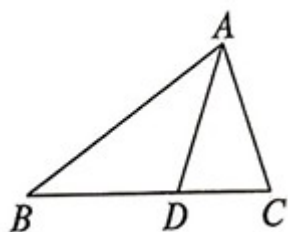
求证：(1) $EF \perp AB$ ；

(2) $\triangle ACF$ 为等腰三角形。

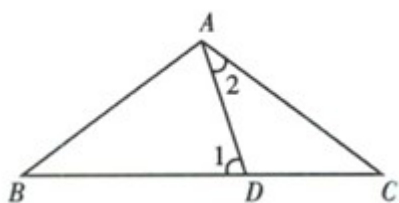


题型 07 三角形中边角关系的综合以及用方程思想计算角度

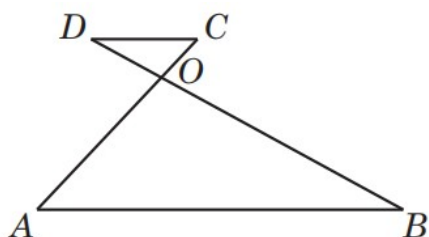
【典例1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BA=BC$ ，点 D 在边 CB 上，且 $DB=DA=AC$ 。求 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的度数。



【变式1】 如图， $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 上一点，且 $AB=AC=BD$ ， $\angle 1=70^\circ$ ，求 $\angle 2$

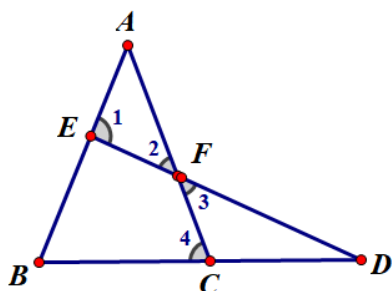


【变式2】 如图，已知： $DC \parallel AB$ ， AC 与 BD 相交于点 O ，且 $OA < OB$ 。求证： $OC < OD$ 。



【变式3】 已知：在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， D 是边 BC 延长线上一点， E 是边 AB 上一点， DE 交边 AC 于点 F 。

求证： $AE < AF$ 。



【变式4】 实验与探究：

学习了等腰三角形，我们知道：在一个三角形中，等边所对的角相等；反过来，等角所对的边也相等。那么，不相等的边（或角）所对的角（或边）之间的大小关系怎样呢？大边所对的角也大吗？某校数学兴趣小组的同学们对此展开探究：

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 2\angle B$ ，若 $AD \perp BC$ ，写出 AC ， CD ， BD 之间的数量关系并说明理由。

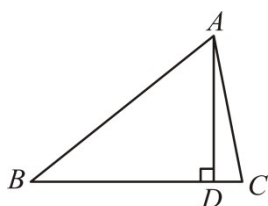


图3

强化训练

一、单选题

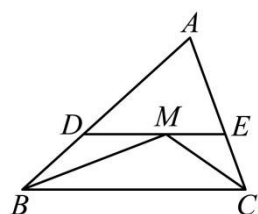
1. 下列条件中，不能判定 $\triangle ABC$ 是等腰三角形的是（ ）

- A. $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 1 : 3$ B. $BC : AC : AB = 2 : 2 : 3$
 C. $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 80^\circ$ D. $2\angle A = \angle B + \angle C$

2. 下列命题中，不正确的是 ()

- A. 两个外角相等的三角形是等腰三角形
 B. 一个外角的平分线平行于一边的三角形是等腰三角形
 C. 两个内角不相等的三角形不是等腰三角形
 D. 两个内角分别是 50° 和 65° 的三角形是等腰三角形

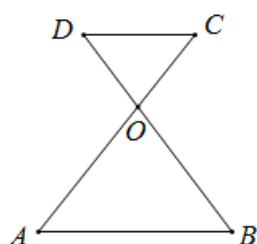
3. 如图， $\triangle ABC$ 的两个角平分线交于点 M ，过 M 点作 BC 的平行线交 AB 、 AC 于点 D 、 E ，已知 $AB = 9$ ， $AC = 6$ ，则 $\triangle ADE$ 的周长为 ()



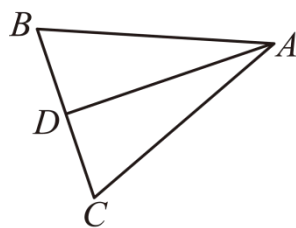
- A. 15 B. 12 C. 9 D. 6

二、填空题

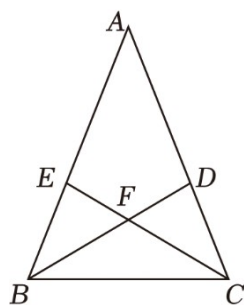
4. 若等腰三角形 ABC 一个外角是 100° 度，那么它的底角是 _____ 度。
 5. 一个三角形三个内角的比是 $3 : 3 : 6$ ，且最短边长为 10 厘米，则该三角形的面积是 _____ 平方厘米。
 6. 如图， AC 和 BD 相交于点 O ，且 $AB \parallel DC$ ， $OA = OB$ ， $OC = 3\text{cm}$ ，则 $OD =$ _____ cm 。



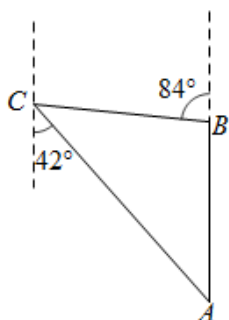
7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \angle C$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ， $BD = 2$ ， $AB = 5$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长为 _____。



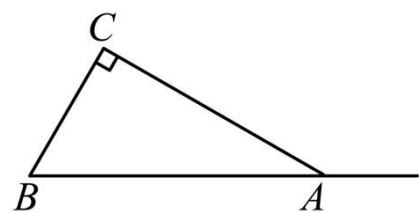
8. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 36^\circ$ ， BD 、 CE 分别为 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的角平分线，且相交于点 F ，则图中的等腰三角形有_____个



9. 如图，一条船从海岛 A 处出发，向正北方向航行 8 海里到达海岛 B 处。从 C 望海岛 A ， A 在 C 的南偏东 42° 方向上；从 B 望灯塔 C ， C 在 B 的北偏西 84° 方向上。则海岛 B 到灯塔 C 的距离是_____海里。

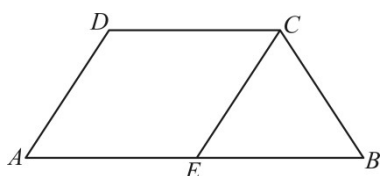


10. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，在射线 BA 上找一点 D ，使 $\triangle ACD$ 为等腰三角形，则 $\angle ADC$ 的度数为_____。

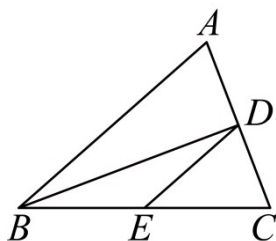


三、解答题

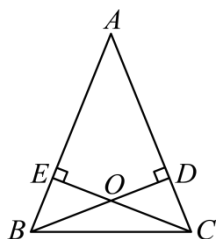
11. 如图， $\angle A = \angle B$ ， $CE \parallel DA$ ， CE 交 AB 于点 E 。求证： $\triangle CEB$ 是等腰三角形。



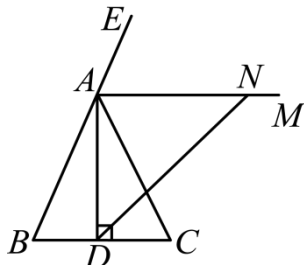
12. 如图， BD 平分 $\angle ABC$ ，点 E 在 BC 上，且 $DE \parallel AB$ ；找出图形中的等腰三角形，并加以证明。



13. 已知：如图， $\triangle ABC$ 的高 BD 、 CE 相交于点 O 且 $BD = CE$ ，求证： $\triangle ABC$ 是等腰三角形。



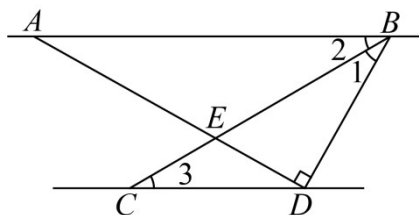
14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ， AM 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CAE$ 的平分线。



(1) 求证： $AM \parallel BC$ ；

(2) 若 DN 平分 $\angle ADC$ 交 AM 于点 N ，证明 $\triangle ADN$ 为等腰直角三角形。

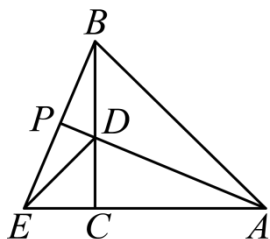
15. 如图，已知 $AB \parallel CD$ ， BC 平分 $\angle ABD$ ，交 AD 于点 E 。



(1) 求证： $\triangle BCD$ 是等腰三角形；

(2) 若 $AD \perp BD$ 于点 D ， $\angle CDA = 28^\circ$ ，求 $\angle 3$ 的度数。

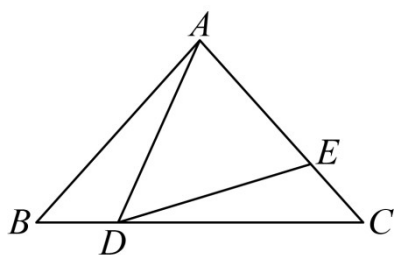
16. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABE$ 是等腰三角形， $AB = AE$ ， $AC = BC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，在 BC 上截取 $CD = CE$ ，连接 AD ， DE ，延长 AD 交 BE 于点 P 。



(1) $AD = BE$ 吗？请说明理由；

(2) 试说明 AD 平分 $\angle BAE$ 。

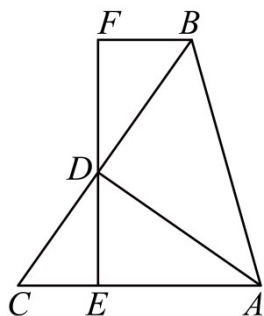
17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \angle C$ ，点 D, E 分别在边 BC, AC 上，连结 AD, DE ，且 $AD = DE$ ， $\angle AED = \angle ADC$ 。



(1) 求证： $\triangle ABD \cong \triangle DCE$ ；

(2) 若 $BD = 1$ ， $CD = 3$ ，求 AE 的长。

18. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \perp AC$ ，垂足为 E ， $BF \parallel AC$ 交 ED 的延长线于点 F ， BC 平分 $\angle ABF$ 。试说明：



(1) $\triangle ABC$ 是等腰三角形

(2) $DE = DF$