

专题 02 几何压轴题（复习篇）

考点归纳

考点 01 三角形中的不等关系的应用

考点 02 等腰三角形的分类讨论

考点 03 传统解答证明题

考点 04 综合实践类

考点 05 动点问题

考点 06 动态几何（旋转、翻折等）

考点 07 新定义题

考点 08 几何的综合应用

考点专练

考点 01 三角形中的不等关系的应用

1. (1) 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB > AC$.

如图 1，通过定理“在三角形中，_____”可以证明 $\angle C > \angle B$ ；

如图 1，若 D 是 BC 边的中点，连接 AD ，求证： $\angle BAD < \angle CAD$.

(2) 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB = AC$ ，且 D 是 $\triangle ABC$ 内的一点， $\angle ADB > \angle ADC$. 求证： $DC > DB$.

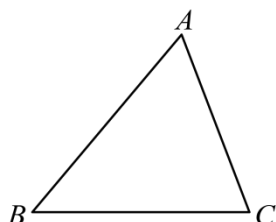


图1

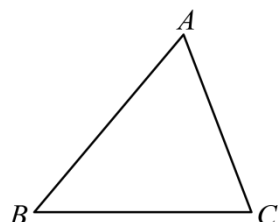


图1备用

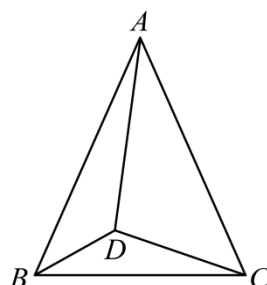


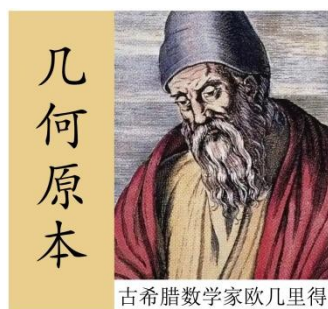
图2

2. 阅读与思考

小明周末去图书馆学习，偶然间发现一本《几何原本》，阅读第一卷，就对其中的一个命题很感兴趣，于

是将这段抄录在笔记本上，并完成了证明。下面是小明的笔记内容，请仔细阅读并完成相应任务。

《几何原本》是一部集前人思想和欧几里得个人创造性于一体的不朽之作，把人们公认的一些事实列成定义，公理和公设，用它们来研究各种几何图形的性质，从而建立了一套从定义，公理和公设出发，论证命题得到定理的几何学论证方法。在其第一卷中记载了这样一个命题：“在任意三角形中，大边对大角”。



古希腊数学家欧几里得

下面是上述命题的证明。

已知：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $AC > AB$ 。

求证： $\angle ABC > \angle C$ 。

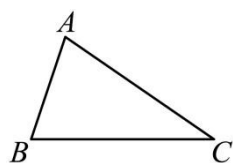


图1

证明：如图 2，由于 $AC > AB$ ，故在 AC 边上截取 $AD = AB$ ，连接

BD 。

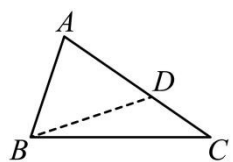


图2

$\therefore AD = AB$

$\therefore \angle ABD = \angle ADB$ ，（依据 1）

$\therefore \angle ADB$ 是 $\triangle BCD$ 的外角，

$\therefore \angle ADB = \angle C + \angle DBC$ ，（依据 2）

$\therefore \angle ADB > \angle C$ ，

$\therefore \angle ABD > \angle C$ 。

$\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ ， $\therefore \angle ABC > \angle ABD$ ， $\therefore \angle ABC > \angle C$ 。

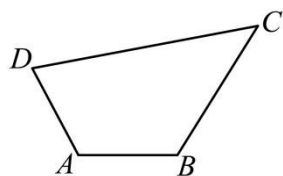


图3

任务：

(1) 填空：材料中的依据 1 是指：_____；依据 2 是指：_____。

(2) 如图 3，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $CD > BC$ 。请猜想 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的关系，并证明你的结论。

3. 阅读下列材料，完成相应任务。

三角形中边与角之间的不等关系

学习了等腰三角形，我们知道：在一个三角形中，等边所对的角相等；反过来，等角所对的边也相等。那么，不相等的边所对的角之间的大小关系怎样呢？大边所对的角也大吗？下面是奋进小组的证明过程。

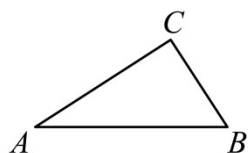


图1

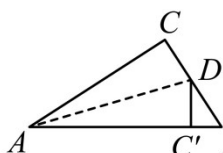


图2

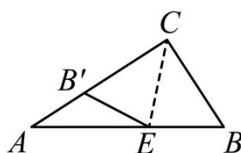


图3

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB > AC > BC$ 。

求证： $\angle C > \angle B > \angle A$ 。

证明：如图 2，将 $\triangle ABC$ 折叠，使边 AC 落在 AB 上，

点 C 落在 AB 上的点 C' 处，折痕 AD 交 BC 于点 D 。

则 $\angle AC'D = \angle C$ 。

$\therefore \angle AC'D = \angle B + \angle BDC'$ (依据 1)

$\therefore \angle AC'D > \angle B$

$\therefore \angle C > \angle B$ (依据 2)

如图 3，将 $\triangle ABC$ 折叠，使边 CB 落在 CA 上，点 B 落在 CA 上的点 B' 处，折痕 CE 交 AB 于点 E 。则

$\angle CB'E = \angle B$ 。

$\therefore \angle CB'E = \angle A + \angle AEB'$

$\therefore \angle CB'E > \angle A$

$\therefore \angle B > \angle A$

$$\therefore \angle C > \angle B > \angle A .$$

归纳总结：利用轴对称的性质可以把研究边与角之间的不等问题，转化为较大量的一部分与较小量相等的问题，这是几何中研究不等问题是常用的方法．

类似地，应用这种方法可以证明“在一个三角形中，大角对大边，小角对小边”的问题．如图 1，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C > \angle B > \angle A$ ．求证： $AB > AC > BC$ ．下面是智慧小组的证明过程（不完整）．

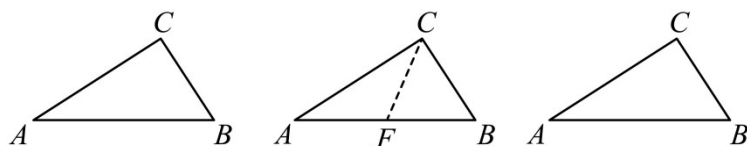


图1

图2

备用图

证明：如图 2，在 $\angle BCA$ 的内部，作 $\angle BCF = \angle B$ ， CF 交 AB 于点 F ．

则 $CF = BF$ （依据 3）

在 $\triangle ACF$ 中， $AF + CF > AC$ ，

$$\therefore AF + BF > AC ,$$

$$\therefore AB > AC ; \dots$$

任务一：①上述材料中依据 1，依据 2，依据 3 分别指什么？

依据 1：_；

依据 2：_；

依据 3：_．

②上述材料中不论是由边的不等关系，推出角的不等关系，还是由角的不等关系推出边的不等关系，都是转化为较大量的一部分与较小量相等的问题，再用三角形外角的性质或三边关系进而解决，这里主要体现的数学思想是_____；（填正确选项的代码）

A．转化思想 B．方程思想 C．数形结合思想

任务二：请将智慧小组的证明过程补充完整，并在备用图中作出辅助线．

任务三：根据上述材料得出的结论，判断下列说法，正确的有_____（将正确的代码填在横线处）．

①在 $\triangle ABC$ 中， $AB > BC$ ，则 $\angle A > \angle B$ ；

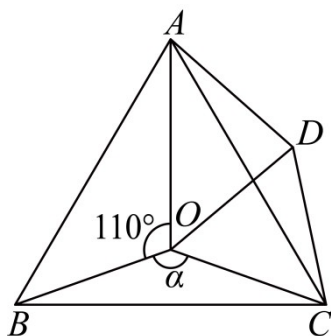
②在 $\triangle ABC$ 中， $AB > BC > AC$ ， $\angle C = 89^\circ$ ，则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形；

③ $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ，则最长边是 AC ；

④在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=55^\circ$ ， $\angle B=70^\circ$ ，则 $AB=BC$ 。

考点 02 等腰三角形的分类讨论

4. 如图，点 O 是等边 $\triangle ABC$ 内一点， D 是 $\triangle ABC$ 外的一点， $\angle AOB=110^\circ$ ， $\angle BOC=\alpha$ ， $\triangle BOC \cong \triangle ADC$ ，连接 OD 。



(1)求证： $\triangle OCD$ 是等边三角形；

(2)当 $\alpha=150^\circ$ 时，试判断 $\triangle AOD$ 的形状，并说明理由；

(3)探究：当 α 为多少度时， $\triangle AOD$ 是等腰三角形。

5. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，点 D 是边 AB 上一点， $\angle BCD=\angle A$ 。

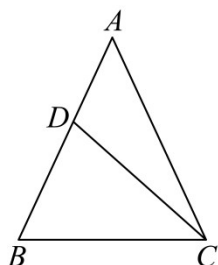


图1

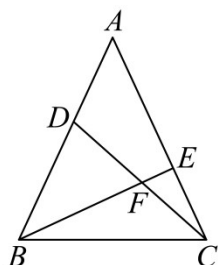
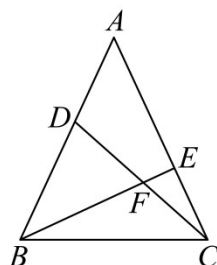


图2



备用图

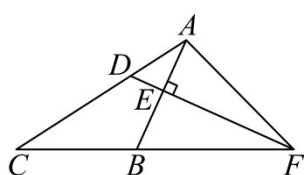
(1)如图1，试说明 $CD=CB$ 的理由；

(2)如图2，过点 B 作 $BE \perp AC$ ，垂足为点 E ， BE 与 CD 相交于点 F 。

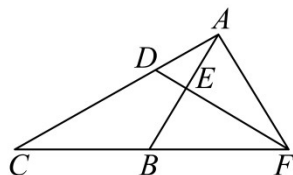
①试说明 $\angle BCD=2\angle CBE$ 的理由；

②如果 $\triangle BDF$ 是等腰三角形，求 $\angle A$ 的度数。

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=BC$ ， AB 的垂直平分线分别交边 AC 、边 AB 和直线 CB 于点 D 、 E 、 F ，连接 AF 。



①图



②图

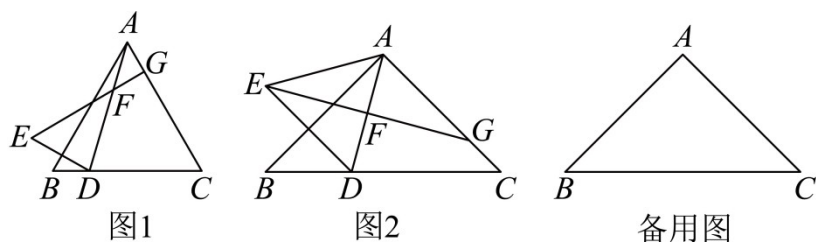
(1)点 F 在 CB 的延长线上，

①如图，求证： $\angle ABC = 2\angle ADE$ ；

②如图，当 $DC = DF$ ， $BC = 1$ 时，求 $\triangle ABF$ 的周长；

(2)当 $\triangle ACF$ 是等腰三角形时，请直接写出 $\angle C$ 的度数。

7. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 是 BC 边上一点（点 D 不与 B 、 C 重合）。点 D 关于直线 AB 的对称点为点 E ，连接 AD 。在直线 AD 上取一点 F ，使 $\angle EFD = \angle BAC$ ，直线 EF 与直线 AC 交于点 G 。



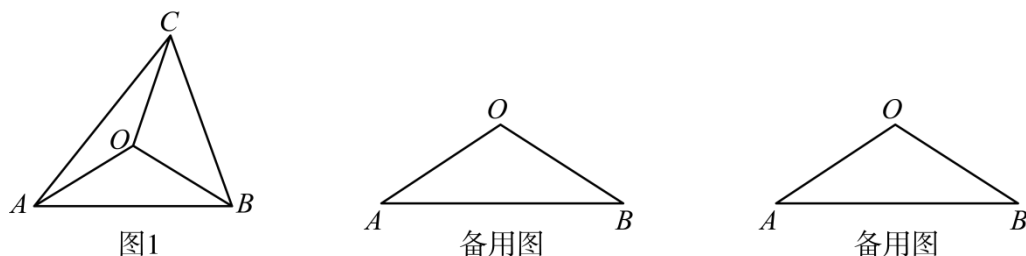
(1)如图 1，如果 $\angle BAC = 60^\circ$ ， $BD < CD$ ， $\angle BAD = \alpha$ 。

①求 $\angle AGE$ 的度数（用含 α 的代数式表示）；

②求证： $GE = AD$ ；

(2)如图 2，如果 $\angle BAC = 90^\circ$ ，连接 AE ，当 $\triangle AEG$ 为等腰三角形时，求 $\angle BAD$ 的度数。

8. 已知在 $\triangle AOB$ 中， $OA = OB$ ， $\angle AOB = 120^\circ$ ，点 C 是平面内一点，连接 AC 、 BC 、 OC ， $OA = OC$ 。



(1)如图 1，点 O 在 $\triangle ABC$ 的内部。

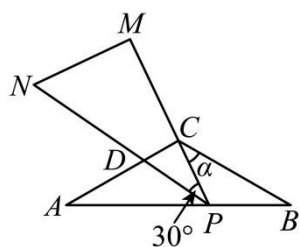
①当 $\angle ACO = 20^\circ$ ，求 $\angle OBC$ 的度数；

②当 CO 平分 $\angle ACB$ ，判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由；

(2)如果直线 BC 与直线 AO 相交于点 D ，如果 $\triangle COD$ 是以 DO 为腰的等腰三角形，求 $\angle OCB$ 的度数（直接写出答案）。

9. 在综合实践课上，李老师以“含 30° 的三角板和等腰三角形纸片”为模具与同学们开展数学活动。已知，在等腰 $\triangle ABC$ 纸片中， $CA = CB = 5$ ， $\angle ACB = 120^\circ$ ，将一块含 30° 角的足够大的直角三角尺 PMN （ $\angle M = 90^\circ$ ， $\angle MPN = 30^\circ$ ）按如图所示放置，顶点 P 在线段 BA 上滑动（点 P 不与 A ， B 重合），三角尺

的直角边 PM 始终经过点 C ，并与 CB 的夹角 $\angle PCB = \alpha$ ，斜边 PN 交 AC 于点 D 。



(1) 当 $\angle BPC = 100^\circ$ 时， $\alpha = \underline{\quad}^\circ$ ；

(2) 当 AP 等于何值时， $\triangle APD \cong \triangle BCP$ ？请说明理由；

(3) 在点 P 的滑动过程中，存在 $\triangle PCD$ 是等腰三角形吗？若存在，请求出夹角 α 的大小；若不存在，请说明理由。

考点 03 传统解答证明题

10. 已知：如图 1，点 D 是 BC 的中点， $AB \parallel CE$ ， AD 平分 $\angle EAB$ ，点 F 在线段 AE 上，且 $AF = AB$ 。

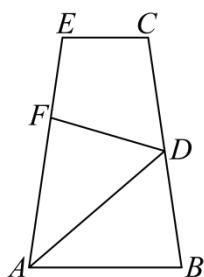


图1

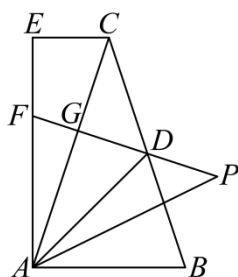


图2

(1) 求证： $EC = EF$ ；

(2) 如图 2，连接 CA ，交 DF 于点 G ，如果 $\angle E = 90^\circ$ ， $CA = CB$ 。

i) 当 $CE = 2$ 时，求四边形 $ABCE$ 的面积；

ii) 延长 GD 至点 P ，使 $PD = GD$ ，连接 AP ，求 $\angle P$ 的度数。

11. 已知 $\triangle ABC$ ，分别以 AB 、 AC 为边作 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ ，且 $AD = AB$ ， $AC = AE$ ， $\angle DAB = \angle CAE$ ，连接 DC 与 BE ， G 、 F 分别是 DC 与 BE 的中点。

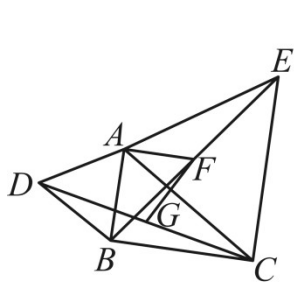


图1

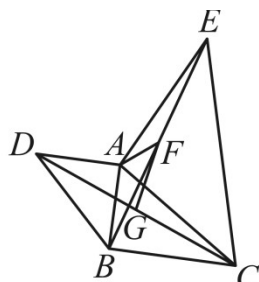


图2

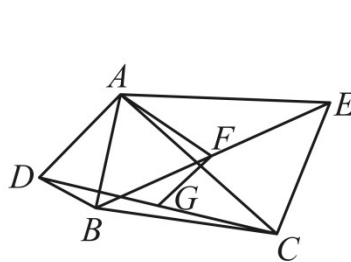


图3

(1)如图1,若 $\angle DAB = 60^\circ$,则 $\angle AFG =$ _____;

(2)如图2,若 $\angle DAB = 90^\circ$,则 $\angle AFG =$ _____;

(3)如图3,若 $\angle DAB = \alpha$,试探究 $\angle AFG$ 与 α 的数量关系,并给予证明.

12. (1)如图1,在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$,过点C作直线DE,且有 $AD \perp DE$ 于点D, $BE \perp DE$ 于点E,猜想AD、BE与DE之间满足的数量关系,并说明理由.

(2)如图2,在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$,过点C作直线CE,过点A作 $AD \perp CE$ 于点D,过点B作 $BE \perp CE$ 于点E, $AD = 11$, $BE = 5$,则DE的长为_____.

(3)如图3, $\angle BAD = \angle CAE = 90^\circ$, $AB = AD$, $AC = AE$,连接BC,DE,且 $BC \perp AF$ 于点F,DE与直线AF交于点G.若 $BC = 28$, $AF = 19$,求 $\triangle ADG$ 的面积.

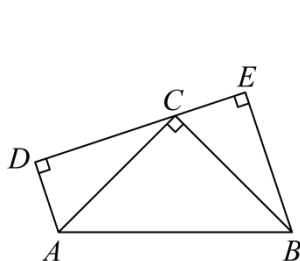


图1

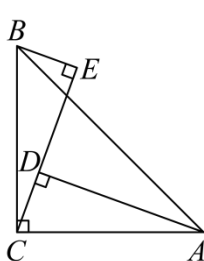


图2

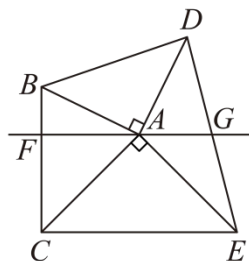


图3

考点 04 综合实践类

13. 综合与实践

【问题情境】课外数学社团开展活动时,指导老师提出了如下问题:如图1,在 $\triangle ABC$ 中,若 $AB = 6$, $AC = 4$,D为BC边上的中点,试求中线AD长的取值范围.

【探究方法】小明同学在组内和同学们合作交流后,得到了如下解决方法:如图2,延长AD到点E,使 $DE = AD$,连接BE.请根据小明同学的方法思考:

(1)由已知条件和作辅助线,能得到 $\triangle ADC \cong \triangle EDB$,理由是_____.

A. SAS B. ASA C. AAS D. SSS

(2)求中线AD长的取值范围.

【解决问题】

(3)老师赞赏了他们的探索精神,并鼓励他们运用这个知识来解决问题:如图3, $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 都是等腰直角三角形, $\angle ABC = \angle DBE = 90^\circ$,BF是 $\triangle BEC$ 的中线,若 $BF = 5$,求AD的长.

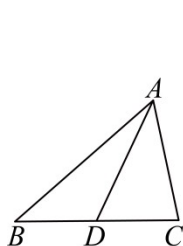


图1

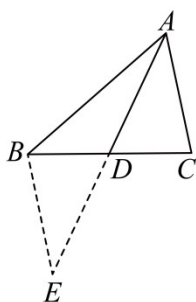


图2

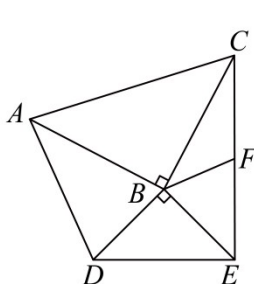


图3

14. 通过对下面数学模型的研究学习，解决下列问题：

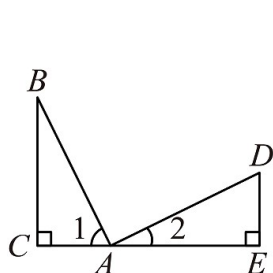


图1

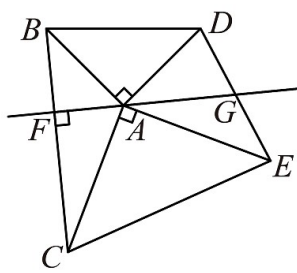


图2

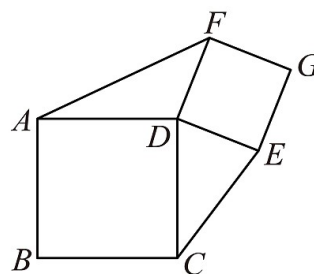


图3

(1)如图1， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ，过点B作 $BC \perp AC$ 于点C，过点D作 $DE \perp AC$ 于点E。由 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle D = 90^\circ$ ，得 $\angle 1 = \angle D$ 。又 $\angle ACB = \angle AED = 90^\circ$ ，可以推理得到 $\triangle ABC \cong$ _____，推理依据是_____。进而得到 $AC =$ _____， $BC =$ _____。我们把这个数学模型称为“K字”模型或“一线三等角”模型；

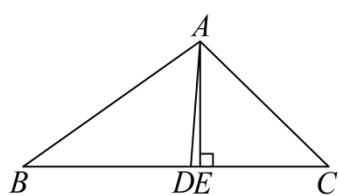
(2)如图2， $\angle BAD = \angle CAE = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， $AC = AE$ ，连接BC，DE，且 $BC \perp AF$ 于点F，DE与直线AF交于点G。求证：点G是DE的中点；

(3)如图3，已知四边形ABCD和DEGF为正方形， $\triangle AFD$ 的面积为 S_1 ， $\triangle DCE$ 的面积为 S_2 ，试猜想 S_1 和 S_2 的数量关系，并说明理由。

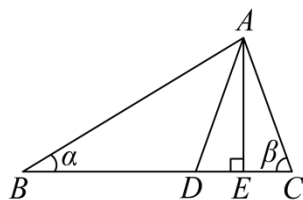
15. 小海在解答练习册P37第4题后进行了拓展探究：

如图1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的平分线AD交边BC于点D， $AE \perp BC$ ，垂足为E。

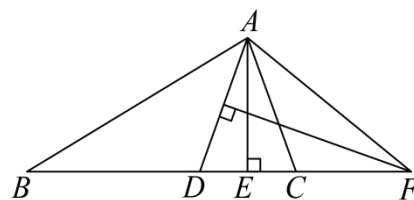
小海猜想：通过 $\angle C$ 的度数可求出 $\angle CAE$ 的度数，再结合 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的度数可求出 $\angle CAD$ 的度数，从而确定 $\angle B$ 、 $\angle C$ 与 $\angle DAE$ 之间存在固定的数量关系。他尝试代入了几组 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的度数后（ $\angle B < \angle C$ ），验证了这一猜想。



(图1)



(图2)



(图3)

(1)请补全下表：

$\angle B$	36°	30°	24°	
$\angle C$	44°	60°	72°	
$\angle DAE$	4°	_____°	_____°	

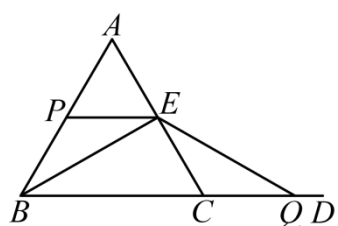
(2)如图2，若 $\angle B = \alpha$ ， $\angle C = \beta (\alpha < \beta)$ ，那么 $\angle DAE =$ _____。（用含 α 、 β 的代数式表示），并加以证明；

明；

(3)在(2)的基础上作 AD 的垂直平分线，交 BC 的延长线于点 F ，连接 AF 。如图3，如果 $\angle ACB = 64^\circ$ ，请直接写出 $\angle BAF =$ _____°。

考点 05 动点问题

16. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形， $BC = 2\text{cm}$ ，点 P 从点 A 出发，沿射线 AB 以 1cm/s 的速度运动，过点 P 作 $PE \parallel BC$ 交射线 AC 于点 E ，同时点 Q 从点 C 出发沿 BC 的延长线以 1cm/s 的速度运动，连接 BE 、 EQ ，设点 P 的运动时间为 $t(\text{s})$ 。



(1)当点 P 在边 AB 上，且不与点 A 、 B 重合时，求证： $\triangle BPE \cong \triangle ECQ$ ；

(2)直接写出 CE 的长（用含 t 的代数式表示）；

(3)在不添加字母和连接其它线段的条件下，当图中等腰三角形的个数大于3时，直接写出 t 的值和对应的等腰三角形的个数。（请写出所有的可能性）

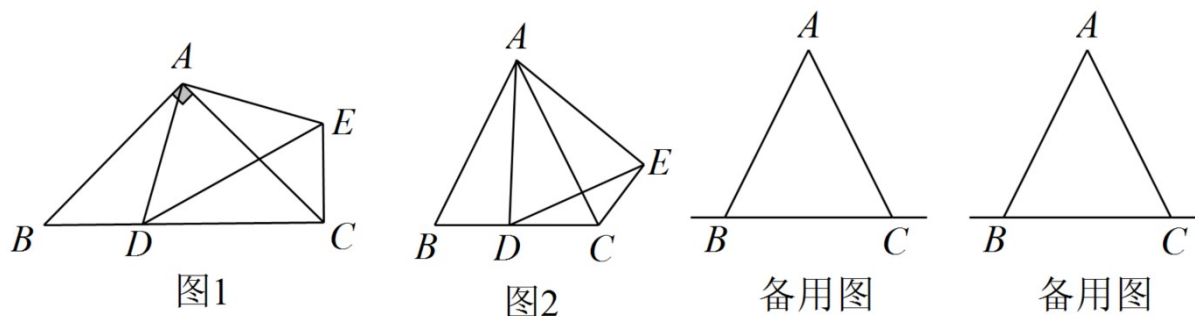
17. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 是直线 BC 上一点（不与 B 、 C 重合），以 AD 为一边在 AD 的右侧作 $\triangle ADE$ ，使 $AD = AE$ ， $\angle DAE = \angle BAC$ ，连接 CE 。

(1) 如图1, 当点 D 在线段 BC 上, 如果 $\angle BAC = 90^\circ$, 则 $\angle BCE =$ 度;

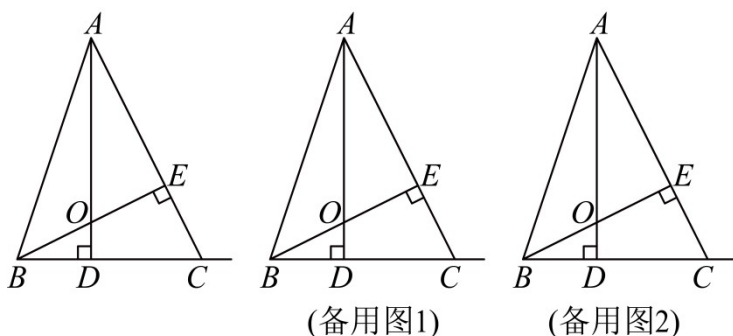
(2) 设 $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCE = \beta$.

①如图2, 当点 D 在线段 BC 上移动, 则 α , β 之间有怎样的数量关系? 请说明理由;

②当点 D 在直线 BC 上移动, 则 α , β 之间有怎样的数量关系? 请直接写出你的结论.



18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 5$, 高 AD 、 BE 相交于点 O , $BD = 2$, 且 $AE = BE$.



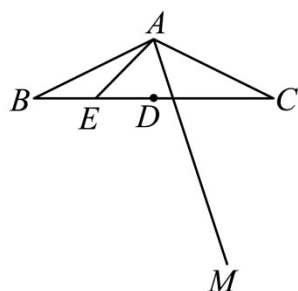
(1) 请说明 $\triangle AOE \cong \triangle BCE$ 的理由;

(2) 动点 P 从点 O 出发, 沿线段 OA 以每秒1个单位长度的速度向终点 A 运动, 动点 Q 从点 B 出发沿射线 BC 以每秒4个单位长度的速度运动, P 、 Q 两点同时出发, 当点 P 到达 A 点时, P 、 Q 两点同时停止运动. 设点 P 的运动时间为 t 秒, 求当 t 为何值时, $\triangle AOQ$ 的面积为3.

(3) 在(2)的条件下, 点 F 是直线 AC 上的一点且 $CF = BO$. 当 t 为何值时, 以点 B 、 O 、 P 为顶点的三角形与以点 F 、 C 、 Q 为顶点的三角形全等? (请直接写出符合条件的 t 值).

考点 06 动态几何 (旋转、翻折等)

19. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 2\alpha$ ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$), D 是 BC 的中点, E 是 BD 的中点, 连接 AE . 将射线 AE 绕点 A 逆时针旋转 α 得到射线 AM , 过点 E 作 $EF \perp AE$ 交射线 AM 于点 F .



(1) ① 依题意补全图形；

② 求证： $\angle B = \angle AFE$ ；

(2) 连接 CF ， DF ，用等式表示线段 CF ， DF 之间的数量关系，并证明。

20. (1) 观察理解：如图 1， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，直线 l 过点 C ，点 A ， B 在直线 l 同侧， $BD \perp l$ ， $AE \perp l$ ，垂足分别为 D ， E ，由此可得： $\angle AEC = \angle CDB = 90^\circ$ ，所以 $\angle CAE + \angle ACE = 90^\circ$ ，又因为 $\angle ACB = 90^\circ$ ，所以 $\angle BCD + \angle ACE = 90^\circ$ ，所以 $\angle CAE = \angle BCD$ ，又因为 $AC = BC$ ，所以 $\triangle AEC \cong \triangle CDB$ _____；(请填写全等判定的方法)

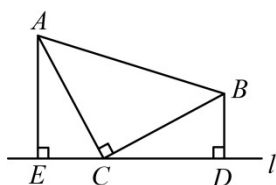


图1

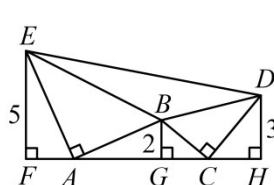


图2

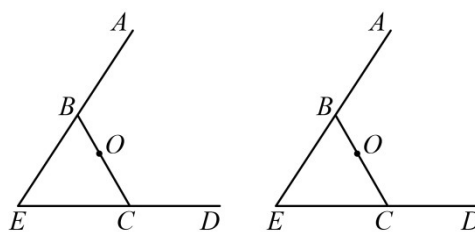


图3

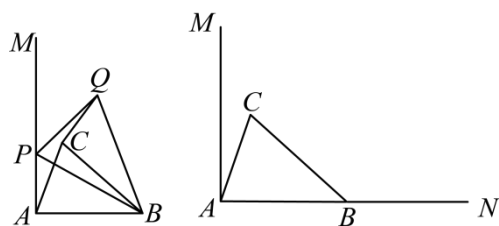
(2) 理解应用：如图 2， $AE \perp AB$ ，且 $AE = AB$ ， $BC \perp CD$ ，且 $BC = CD$ ，利用 (1) 中的结论，请按照图 中所标的数据计算图中 $\triangle ABC$ 的面积是 _____；

(3) 拓展提升：如图 3，等边 $\triangle EBC$ 中， $EC = 8\text{cm}$ ，点 O 在 BC 上，且 $OC = 5\text{cm}$ ，动点 P 在射线 EC 上，连接 OP ，将线段 OP 绕点 O 逆时针旋转 120° 得到线段 OF 。

① 当 $OF \parallel ED$ 时， OP 的长是 _____。

② 当点 F 恰好落在射线 EB 上时，请直接写出 EP 的长。

21. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ， $\angle ABC = \alpha$ ($0 < \alpha < 60^\circ$) 射线 $AM \perp AB$ ，点 P 为射线 AM 上的动点 (点 P 不与点 A 重合)，连接 BP ，将线段 BP 绕点 B 顺时针旋转角度 α 后，得到线段 BQ ，连接 PQ 、 QC 。



(备用图)

(1) $\triangle PAB$ 与 $\triangle QCB$ 全等吗？试说明理由；

(2) 延长 QC 交射线 AM 于点 D ，在点 P 的移动过程中， $\angle QDM$ 的大小是否发生变化？若改变请说明理由，若不改变，请求出 $\angle QDM$ 的大小（用含 α 的代数式表示）；

(3) 当 $BQ \parallel AC$ 时， $AB = m$ ， $AP = n$ 过点 Q 作 QE 垂直射线 AB ，垂足为 E ，那么 $S_{\triangle AEQ} =$ _____（用 m 、 n 的代数式表示）。

22. 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 BC 边的中点，将 $\triangle ABD$ 沿直线 AD 翻折，点 B 落在点 E 处（点 E 在直线 BC 上方），连接 CE 。

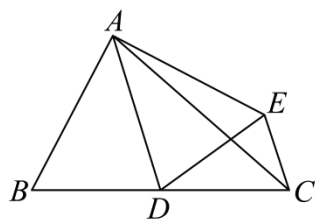


图1

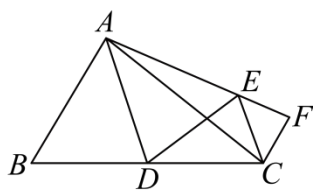
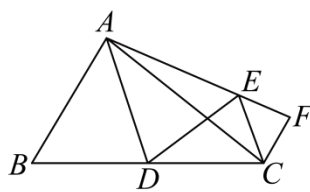


图2



备用图

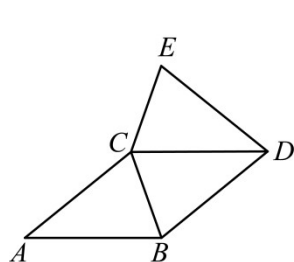
(1) 在不添加辅助线的前提下，请找出图 1 中的一个等腰三角形：_____；

(2) 求证： $CE \parallel AD$ ；

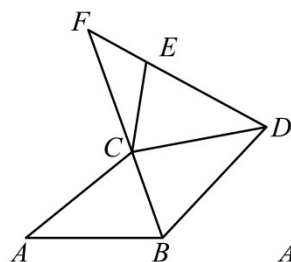
(3) 如图 2，过点 C 作 AB 的平行线，交 AE 的延长线于点 F 。求证： $FE = FC$ ；

(4) 连接 DF ，当 $AD = DF$ 时，如果 $\triangle ABD$ 是等腰三角形，那么 $\angle B$ 的度数为_____。

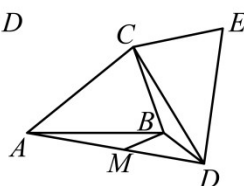
23. 已知：在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $AB > BC$ 。把 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转得到 $\triangle DEC$ ，其中点 D ， E 分别是点 A ， B 的对应点。



(图1)



(图2)



(图3)

- (1)如图1，若 $\angle A = 40^\circ$ ， CB 平分 $\angle ACD$ ，求 $\angle ACE$ 的度数；
- (2)在 $\triangle ABC$ 旋转过程中，若直线 BC ， DE 相交于点 F ，
- ① 如图2，当点 D ， E 在直线 BC 右侧时，若 $\angle CFE = 45^\circ$ ，求 $\angle ACE$ 的度数；
- ② 设 $\angle CFE = \alpha (\alpha \neq 0)$ ，请直接用含 α 的式子表示 $\angle ACE$ ；
- (3)如图3，当 $\angle BAD = \angle BCD = 12^\circ$ 时，在线段 AD 上取一点 M ，连接 BM ，使得 $\triangle BAM \cong \triangle DCB$ ，请求出 $\angle CDB$ 的度数。

考点 07 新定义题

24. 定义：在等腰三角形中，过某底角顶点的一条射线分这个底角所成的两个角中恰好有一个角等于这个等腰三角形的顶角，那么称这条射线为这个等腰三角形的“等角分割线”。

已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 在边 AC 上。

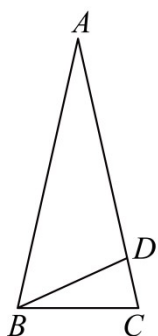


图1

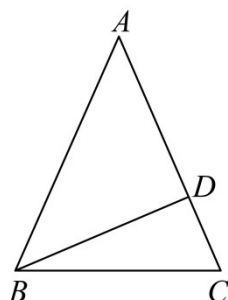
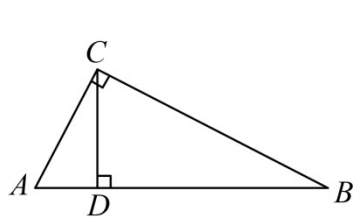


图2

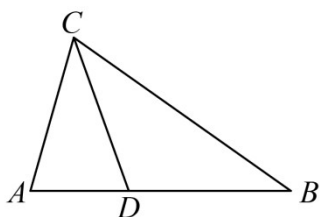
- (1)如图1，如果 $BD = BC$ ，求证： BD 是 $\triangle ABC$ 的“等角分割线”；
- (2)如图2，如果 $BD \perp AC$ ，且 BD 是 $\triangle ABC$ 的“等角分割线”，求 $\angle C$ 的度数；
- (3) BD 是 $\triangle ABC$ 的“等角分割线”， $\angle BAC$ 的平分线交 BD 于点 F 。如果 $DF = DC$ ，那么 $\angle BAC$ 的度数为_____。

25. 【定义1】如果一个三角形的三个角分别等于另一个三角形的三个角，那么称这两个三角形互为“均等三角形”。

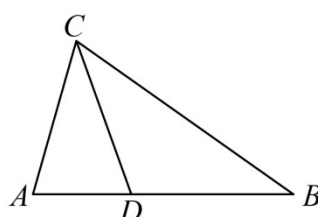
【定义2】从三角形（不是等腰三角形）一个顶点引出一条射线与对边相交，顶点与交点之间的线段把这个三角形分割成两个小三角形，如果分得的两个小三角形中一个为等腰三角形，另一个与原来三角形是“均等三角形”，我们把这条线段叫做这个三角形的“均等分割线”。



(图1)



(图2)



(备用图)

【概念理解】

(1) 如图1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $\triangle BCD$ 和 $\triangle ACD$ _____ 均等三角形 (填“是”或者“不是”).

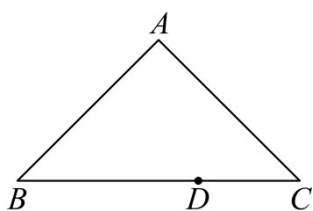
(2) 如图2, 在 $\triangle ABC$ 中, CD 为 $\angle ACB$ 的角平分线, $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 35^\circ$, 试说明 CD 为 $\triangle ABC$ 的均等分割线.

【应用拓展】

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 47^\circ$, CD 是 $\triangle ABC$ 的均等分割线, 若 $\triangle ACD$ 是等腰三角形, 则 $\angle ACB$ 的度数为 _____.

26. 费马是17世纪的法国数学家, 他曾研究过一种特殊的点, 它满足“在一个三角形所在平面上, 到该三角形的三个顶点距离之和最短”, 这样的点被称为“该三角形的费马点”.

(1) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, 点 D 在线段 BC 上且线段 $BD > DC$, 请判断: 点 D 是否为 $\triangle ABC$ 的费马点, 并说明理由.



(2) 现有真命题: 在 $\triangle ABC$ 中, 三个内角都小于 120° , 在其内部存在一点 P , 满足 $\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 120^\circ$, 则点 P 称为 $\triangle ABC$ 的费马点.

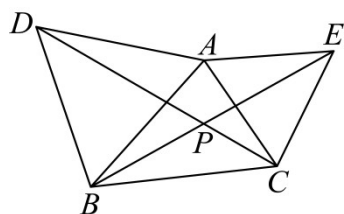
小明利用该真命题, 尝试用尺规作费马点, 他的作法如下:

如图, 对一个所有内角都小于 120° 的 $\triangle ABC$, 分别以线段 AB 、 AC 为边向外侧作等边三角形 ABD 和等边三角形 ACE , 连接 CD 、 BE 交于点 P . 请完成证明:

① 求证: $\angle ADC = \angle ABE$;

② 在线段 DP 上取点 F 使 $PF = BP$, 连接 BF ,

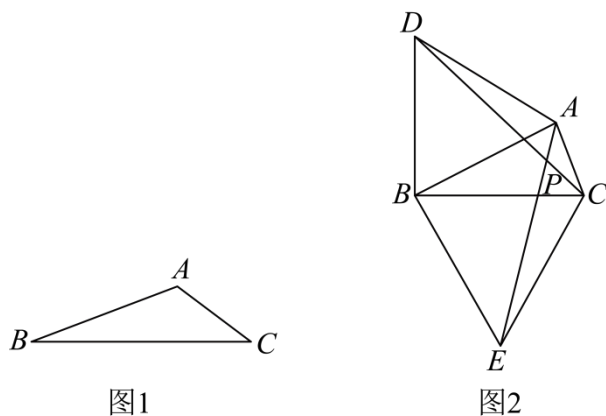
求证：点 P 是 $\triangle ABC$ 的费马点。



27. 设平面上的三个点 A 、 B 、 C ，需确定点 P 的位置，使 $PA + PB + PC$ 最小。

当点 A 、 B 、 C 共线时，点 P 应取三点中居中的点。当点 A 、 B 、 C 不共线时，分成两类： $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 120° 和 $\triangle ABC$ 的三个内角均小于 120° 。约1640年，法国数学家费马 (Pierre de Fermat, 1601—1665) 提出了这个问题，此问题中求得的点 P 也称为费马点，并由意大利数学家托里拆利首次证明。

下面来探究当点 A 、 B 、 C 不共线时的情况：



(1) 如图1，已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 120^\circ$ 时，—— 为所求费马点。

(2) 如图2，已知：在 $\triangle ABC$ 中，最大角 $\angle BAC < 120^\circ$ 时，

我们可以快速找到这类三角形的费马点，作法如下：分别以 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 BC 为边向外作等边三角形 ABD 和等边三角形 BCE ，此时 CD 和 AE 交于一点 P ，点 P 就是所求的费马点。

① 请找出图中与 AE 相等的线段，并说明理由；

② 为了验证作图中找到的点 P 就是费马点，连接 BP 。

求证： $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ 。

考点 08 几何的综合应用

28. 【问题情境】(1) 如图1， A 、 B 两点分别位于一个池塘的两端，小明想用绳子测量 A 、 B 间的距离，但绳子不够长，一个叔叔帮他出了一个主意：先在地上取一个可以直接到达 A 点和 B 点的点 C ，连接 AC 并延长到 D ，使 $CD = CA$ ；连接 BC 并延长到 E ，使 $CE = CB$ ，连接 DE 并测量出它的长度，如果 $DE = 100$

米，那么 AB 间的距离为_____米。

【探索应用】(2) 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=5$ ， $AC=3$ ，求 BC 边上的中线 AD 的取值范围。

解决此问题可以用如下方法：延长 AD 到点 E 使 $DE=AD$ ，再连接 BE （或将 $\triangle ACD$ 绕着点 D 逆时针旋转 180° 得到 $\triangle EBD$ ），把 AB 、 AC 与 AD 集中在 $\triangle ABE$ 中，利用三角形三边的关系即可判断，中线 AD 的取值范围是_____；

【拓展提升】(3) 如图 3，在 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB=90^\circ$ ， $AB=AD$ ， $AC=AE$ ， $\angle BAD=\angle CAE=90^\circ$ ， CA 的延长线交 DE 于点 F ，求证： $DF=EF$ 。

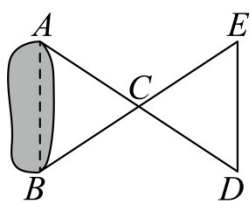


图1

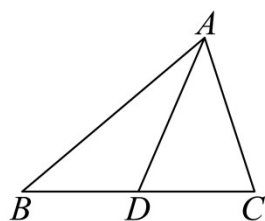


图2

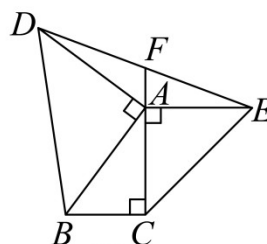


图3

29. 如图 1，四个底面形状、大小都相同且材质相同、均匀的长方体积木对齐叠放，从上至下编号依次为①、②、③、④，积木②、③、④的高度相同，都是积木①高度的 2 倍。设长方形积木的初始边缘所在直线为 l 。

【预备知识】

1. 两个长方体积木组合叠在一起组成一个新的组合，当上方组合的重心在水平方向上超过下方组合的边缘时，就会倒下。
2. 一个长方体积木组合的重心偏移 l 的水平距离，等于组合中各个长方体积木重心偏移 l 的水平距离分别乘其各自的质量，再把它们相加所得的和除以长方体积木组合的总质量所得的结果。
3. 积木的质量比等于它们的高度比。

假设每块积木长为 a ，在不倾倒的前提下按照要求推动积木。

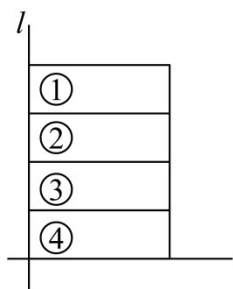


图1

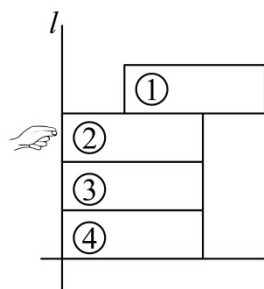


图2

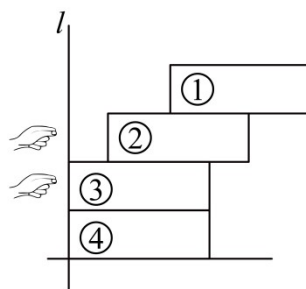


图3

(1)如图 2，推动积木①至最远，

①积木①的最远延伸长度为_____；

②此时积木①②组合的重心偏移 l 的距离为_____。（结果用含 a 的代数表示）（提示：请结合预备知识解决）

(2)在（1）的基础上，保持积木①②组合的相对位置不变，先按图 3 中食指所指的方向推动积木①②组合至最远，再继续推动积木③，求积木①②③组合的最远延伸长度。