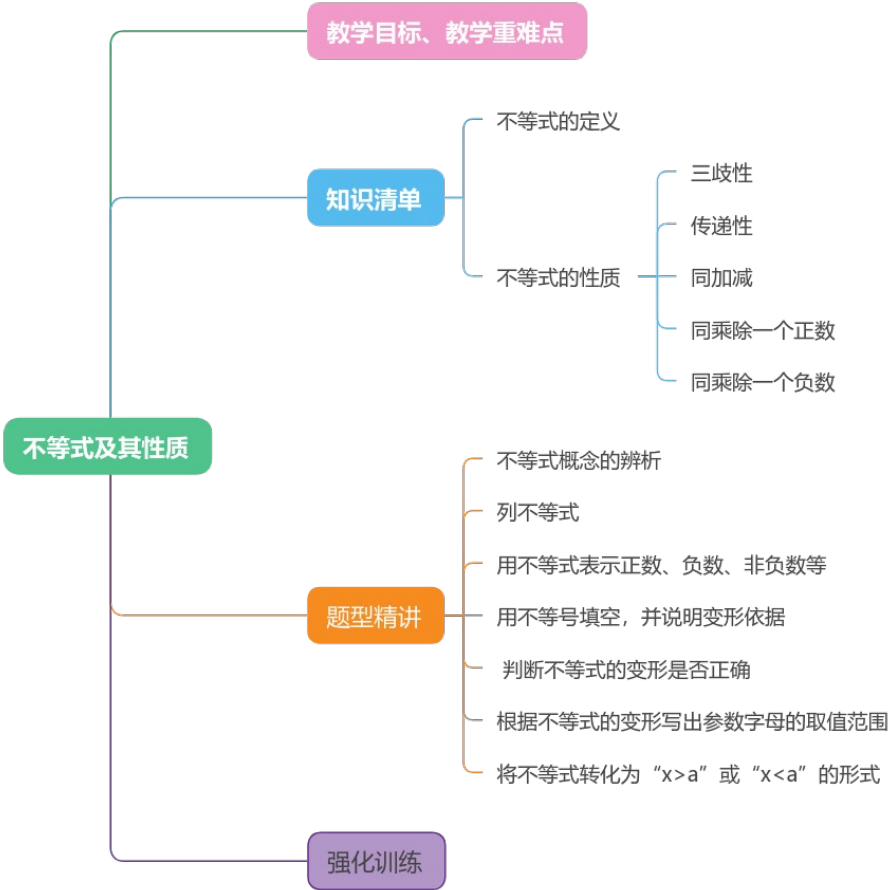


专题 15.1 不等式及其性质

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1.理解不等式的概念，能准确识别并书写含“>”“<”“≥”“≤”“≠”的不等式，区分不等式、等式与代数式，明确不等号的含义及对应文字表述（如“≥”表示“不小于”“大于或等于”）。 2.理解掌握不等式的五条基本性质，能结合实例验证性质的合理性。 3.能运用不等式性质对不等式进行简单变形
教学重难点	1.重点 不等式基本性质的理解与掌握；

2.难点

性质 5 的理解与应用，明确“乘/除同一个负数时不等号方向必须改变”这一核心规则.

知识清单

知识点 01 不等式的定义

用等号“=”连接的式子叫作**等式**，类似地，用不等号“>”“<”“≥”“≤”连接的式子，叫作**不等式**.不等式与等式一样，都是研究**数量关系**的工具.

除“>”和“<”外，不等号还有“≥”和“≤”. $a \geq b$ 表示**或**，读作“a 大于(或)等于 b”.同样地， $a \leq b$ 表示**或**，读作“a 小于(或)等于 b”.

【即学即练】

1. 用不等式表示：

(1) x 的 4 倍与 3 的差是正数：_____.

(2) a 与 b 的积小于 7：_____.

(3) a, b 两数的平方和大于 10：_____.

2. 将“ a 与 b 的差是非正数”用不等式表示为_____.

知识点 02 不等式性质——三歧性和传递性

1. 不等式的性质 1 (**实数的三歧性**)

对于任意给定的两个数 a, b ，在 $a > b$ 、 $a < b$ 、 $a = b$ 三种情形中，有且只有一种情形成立.

2. 不等式的性质 2 (**传递性**)

如果 $a > b, b > c$,那么_____.

拓展：如果 $c < b, b < a$,那么 $c < a$ ；如果 $c \leq b, b \leq a$,那么_____；如果 $c = b, b = a$,那么_____；

3. 三歧性和传递性的重要意义

这两个性质看似简单，实则意义重大，它们是实数排序和比较大小的理论基础，

【即学即练】

1. 设 $a > b > 0$ ，用“ $>$ ”或“ $<$ ”填空，并说明理由.

(1) a _____ -2 ;

(2) $a-2$ _____ $b-5$;

知识点 03 不等式性质——同加减、同乘除

1. 不等式性质 3 不等式的两边同加(或减)一个数，不等号的方向不变.

如果 $a > b$ ，那么 $a+m > b+m$ ， $a-m > b-m$.

不等式性质 3 是解不等式时移项法则的理论依据。

2. 不等式性质 4 不等式的两边同乘(或除以)一个正数，不等号的方向不变.

如果 $a > b$ ， $m > 0$ ，那么 $am > bm$ ， $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$

3. 不等式性质 5 不等式的两边同乘(或除以)一个负数，不等号的方向改变.

如果 $a > b$ ， $m < 0$ ，那么 $am < bm$ ， $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$

不等式性质④、⑤是解不等式时化系数为 1 和去分母法则的理论依据。

【即学即练】

1. 用不等号填空，如果 $a > b$ ，那么 $-2a+1$ _____ $-2b+1$ (填“ $>$ ”或“ $<$ ”)

2. 下列不等式变形中，正确的是 ()

A . 由 $x > y$ 得 $x-2 > y-2$

B . 由 $x > y$ 得 $-x > -y$

C . 由 $x > y$ 得 $2x < 2y$

D . 由 $x > 0$ 得 $x^2 < 0$

题型精讲

题型 01 不等式的辨析

【典例 1】下列式子中，不是不等式的是 ()

A . $5 < 7$

B . $2x > y$

C . $\frac{x-1}{3} > 1$

D . $2a+1=1$

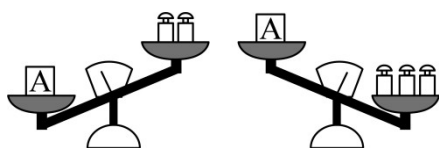
【变式1】下列式子中，是不等式的是 ()

- A. $x+6$ B. $x=1$ C. $2x-1 \leq 5$ D. $9a$

【变式2】2023年5月6日是我国二十四节气中的立夏．据天气预报报道，赫章当天最高气温 25°C ，最低气温 15°C ，则当天赫章的气温 $t(^{\circ}\text{C})$ 的变化范围是 ()

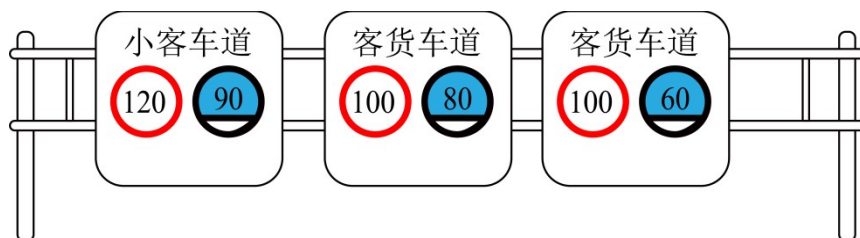
- A. $t \geq 25$ B. $t \leq 15$
C. $t \neq 15$ ，且 $t \neq 25$ D. $15 \leq t \leq 25$

【变式3】如图，天平右盘中每个砝码的重量都是 1g ，如图中显示出某药品 A 重量的范围是 ()



- A. 大于 2g B. 小于 3g
C. 大于 2g 且小于 3g D. 大于 2g 或小于 3g

【变式4】某双向六车道高速公路，分车道与分车型组合限速，其标牌版面如图所示．每个标牌上左侧数字代表该车道车型的最高通行车速（单位： km/h ），右侧数字代表该车道车型的最低通行车速（单位： km/h ）．王师傅驾驶一辆货车在该高速公路上依限行驶，车速为 $v \text{ km/h}$ ，则车速 v 的范围是 ()



- A. $90 \leq v \leq 100$ B. $80 \leq v \leq 100$ C. $60 \leq v \leq 100$ D. $60 \leq v \leq 80$

题型 02 列不等式

【典例1】“ a 大于 b 的 2 倍”用不等式表示为：_____．

【变式1】“ a 与 1 的差小于 b 的 2025 倍”用不等式表示为_____．

【变式2】“ x 减去 y 不大于 -5 ”，用不等式表示为_____．

【变式3】用不等式表示“ a 与 b 的平方和不小于它俩积的两倍”为_____．

【变式4】 一辆40座(不含司机座位)的公交车内载有乘客 x 人,到某一站停车时下车2人,又上车 a 人,车内仍有空余座位.

题型 03 用不等号表示正数、负数、非负数等

【典例1】 用不等式表示:

- (1) a 是负数.
- (2) x 比 -1 大.
- (3) m 与 n 的差不大于2.
- (4) x 与 -5 的差是正数.

【变式1】 用适当的式子表示 a 与 b 的和是负数:_____.

【变式2】 将“ a 与 b 的差是非正数”用不等式表示为_____.

【变式3】 用不等式表示“ $2a$ 与 b 的差是非负数”_____.

【变式4】 用不等式表示“ x 的平方与 a 的平方之差是非负数”为_____.

题型 04 用不等号填空并说明理由

【典例1】 已知 $a < b$,比较下列式子的大小,并说明理由.

- (1) $a+7$ 与 $b+7$;
- (2) $\frac{a}{3}$ 与 $\frac{b}{3}$.

【变式1】 若 $x < y$,比较 $-2x+3$ 与 $-2y+3$ 大小,并说明理由.

【变式2】 (1)无论 m 为何值,是否一定有 $m+1 > m$?试说明理由.

(2)已知 $m < n < 0$,试比较 m^2 与 n^2 的大小,并说明理由.

【变式3】 已知 $p > q$,用“ $>$ ”或“ $<$ ”填空,并说明依据:

- (1) $p + \frac{1}{2}$ _____ $q + \frac{1}{2}$
- (2) $p - 2$ _____ $q - 2$

$$(3) p + 2m \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad q + 2m$$

$$(4) -5p \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad -5q$$

【变式4】 已知 $a > 2b$ ，则

比较大小：① $a - 2 - 2b - 2$ ；② $a - 2b - 0$ ；③ $8b - 4a$ ；④ $-\frac{a}{2} - b$

题型 05 判断不等式变形是否正确

【典例1】 若 $a > b$ ，则下列不等式变形正确的是 ()

A. $a + 3 < b + 5$ B. $\frac{a}{3} + 1 > \frac{b}{3} + 1$ C. $-4a > -4b$ D. $3a - 2 < 3b - 2$

【变式1】 下列说法不一定成立的是 ()

A. 若 $ac^2 > bc^2$ ，则 $a > b$ B. 若 $a > b$ ，则 $ac^2 > bc^2$
C. 若 $a + c > b + c$ ，则 $a > b$ D. 若 $a > b$ ，则 $a + c > b + c$

【变式2】 如果 $a < b$ ，那么下列不等式中一定成立的是 ()

A. $a + 5 > b + 5$ B. $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$ C. $-3a > -3b$ D. $a - b > 0$

【变式3】 先阅读下面的解题过程，然后解题。

已知 $a > b$ ，试比较 $-2026a + 1$ 与 $-2026b + 1$ 的大小。

解： $\because a > b$ ，

$\therefore -2026a > -2026b$. 第一步

故 $-2026a + 1 > -2026b + 1$. 第二步

(1)上述解题过程中，从第_____步开始出现错误，错误的原因是

(2)请写出正确的解题过程。

【变式4】 仿例：已知 $a > 0$ ，试比较 $2a$ 与 a 的大小。

方法一：解： $\because 2 > 1$ ， $a > 0$ ， $\therefore 2a > a$ 。

方法二：解： $2a - a = a$ 。

$$\because a > 0, \therefore 2a - a > 0, \therefore 2a > a.$$

根据仿例，请解答：

(1)方法一所依据的不等式基本性质是_____（请写明基本性质的具体内容）；

(2)已知 $a < 0$ ，试比较 $2a$ 与 a 的大小．要求两种方法解答．

题型 06 根据不等式的变形写出参数字母的取值范围

【典例 1】如果不等式 $(a-4)x < 2(a-4)$ 通过变形能得到 $x > 2$ ，则 a 必须满足的条件是（ ）

- A. $a < 4$ B. $a > 4$ C. $a \neq 4$ D. $a > 0$

【变式 1】由不等式 $ax > a$ 变形能得到 $x > 1$ ，则 a 的取值范围是（ ）

- A. $a > 0$ B. $a \leq 0$ C. $a < 0$ D. $a \leq 0$

【变式 2】若 $x < y < 0$ ，且 $ax > ay$ ，则 a 的值不可能是（ ）

- A. 0 B. -2 C. -1 D. 2

【变式 3】已知 $m < n$ ，是否一定有 $am < an$ ？请说明理由．

【变式 4】无论 x 为何值，是否一定有 $x+5 > x$ ？请说明理由．

题型 07 根据不等式的性质将不等式化成“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式

【典例 1】根据不等式的性质，将下列不等式化成“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式．

(1) $2x - 1 > 5$

(2) $-\frac{1}{3}x > -1$

【变式 1】将下列不等式化成“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式：

(1) $x + 5 < 8$ ；

(2) $-\frac{x}{6} > 2$ ；

(3) $6x \geq 2x - 3$ ．

【变式 2】根据不等式的基本性质，请将下列不等式化为“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式．

(1) $2x - 3 < x - 2$;

(2) $-2x - 4 < 4x + 4$.

【变式3】 根据不等式的基本性质，请将下列不等式化为“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式 .

$2x - 3 < x - 2$;

【变式4】 根据不等式的性质，把下列不等式化成“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”或“ $x \geq a$ ”或“ $x \leq a$ ”的形式 .

(1) $x - 1 < 5$;

(2) $-\frac{1}{2} - x + 1 \geq 4$.

强化训练

一、单选题

1. 如图所示是高速公路的限速标志，表示在此道路上行驶的汽车的最高车速和最低车速 . 如果用 v (单位 : km/h) 表示汽车的速度，则 v 应满足 ()



A . $v \leq 100$

B . $v = 100$

C . $80 \leq v \leq 100$

D . $v \geq 80$

2. 给出下面式子：① $3 > 5$; ② $x + 3 = 0$; ③ $x - 1 \neq 0$; ④ $x + 2 \leq 3$. 其中不等式有 ()

A . 1 个

B . 2 个

C . 3 个

D . 4 个

3. 用不等式可将“ a 与 b 的和非负数”表示为 ()

A . $a^2 + b^2 \geq 0$

B . $(a + b)^2 \geq 0$

C . $a^2 + b^2 > 0$

D . $(a + b)^2 > 0$

4. 如果 $a > b$, 那么下列不等式中正确的是 ()

A. $a-3 < b-3$ B. $\frac{a}{3} < \frac{b}{3}$ C. $ax^2 > bx^2$ D. $-a < -b$

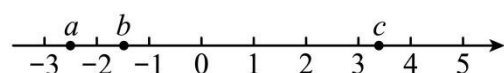
5. 由 $a < b$ 到 $ac < bc$ ，成立的条件是 ()

A. $a > 0$ B. $c < 0$ C. $c > 0$ D. $c = 0$

6. 若 $x < y$ ，且 $(a-3)x < (a-3)y$ ，则 a 的取值范围是 ()

A. $a > 3$ B. $a < 3$ C. $a = 3$ D. $a \leq 3$

7. 实数 a, b, c 在数轴上的位置如图所示，下列结论正确的是 ()



A. $b+c > 3$ B. $a-c < 0$ C. $ac > bc$ D. $-2a < -2b$

8. 若 $a > b$ ，则下列不等式一定成立的是 ()

A. $ac > bc$ B. $ac^2 > bc^2$
C. $a(a+b) > b(a+b)$ D. $a(a-b) > b(a-b)$

二、填空题

9. 用不等式表示：“ $x+3$ 不大于 -5 ”是_____.

10. 语句“ x 与 y 的和是非负数”用不等式表示为：_____.

11. 若 $x > y$ ，则 $-2x+1$ _____ $-2y+1$ (填“ $>$ ”或“ $<$ ”号).

12. 若 $a > b$ ，则 $a+7$ _____ $b+7$. (填“ $>$ ”“ $<$ ”或“ $=$ ”)

13. 将不等式 $3x < -3$ 化为“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式为_____.

14. 如果 $-a > -b$ ，则 $\frac{a}{2}-1$ _____ $\frac{b}{2}-1$. (填“ $>$ ”或“ $<$ ”)

15. 利用不等式的性质，填空. 若 $a < b$ ， $c < 0$ ，则 $ac+c$ _____ $bc+c$.

三、解答题

16. 先阅读下面的解题过程，再解题.

已知 $x > y$ ，试比较 $-2025x+2$ 与 $-2025y+2$ 的大小.

解： $\because x > y$ ，①

$\therefore -2025x > -2025y$. ②

$$\therefore -2025x + 2 > -2025y + 2 \quad \text{③}$$

(1) 上述解题过程中，从步骤_____开始出现错误（填写序号）；

(2) 请写出正确的解题过程。

17. 设 $a < b$ ，用不等号连接下列各题中的两个代数式。

(1) $a - 1$ ， $b - 1$ ；

(2) $a + 2$ ， $b + 2$ ；

(3) $-2a$ ， $-2b$ 。

18. 将下列不等式化成“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式：

(1) $x + 5 < 8$ ；

(2) $-\frac{x}{6} > 2$ ；

(3) $6x - 2x - 3$ 。