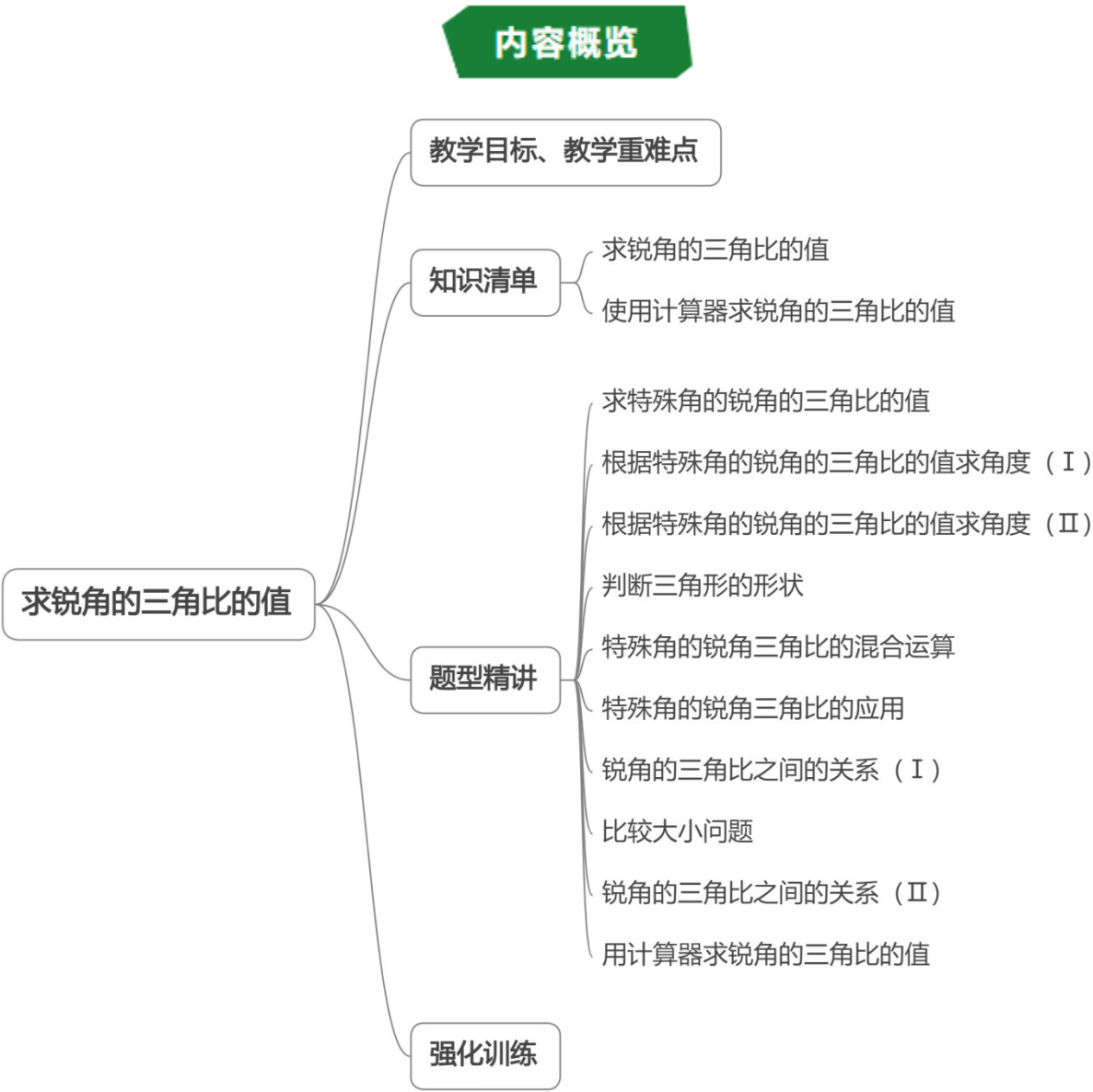


专题 25.2 求锐角的三角比的值



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 会求特殊角的锐角三角比的值； 2. 根据特殊角的锐角三角比的值求特殊角； 3. 掌握用计算器计算特殊角的锐角三角比的值。
教学重难点	1.重点 (1) 求特殊角的锐角三角比的值； (2) 知道锐角的三角比之间的关系；

	(3) 锐角三角比的值的应用。 2. 难点 (1) 锐角的三角比之间关系的应用； (2) 由特殊到一般，探索、总结规律。
--	--

知识清单

知识点1 求锐角的三角比的值

一、特殊角的锐角三角比的值

利用三角比的定义，列出特殊锐角的三角比的值，如下表：

α	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	1	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

要点：

(1) 通过该表可以方便地知道 30° 、 45° 、 60° 角的各三角比值，它的另一个应用就是：如果知道了一个锐角的三角比值，就可以求出这个锐角的度数，例如：若 $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则锐角 $\theta = 45^\circ$ 。

(2) 仔细研究表中数值的规律会发现：

$\sin 30^\circ$ 、 $\sin 45^\circ$ 、 $\sin 60^\circ$ 的值依次为 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，而 $\cos 30^\circ$ 、 $\cos 45^\circ$ 、 $\cos 60^\circ$ 的值的顺序正好相反，

$\tan 30^\circ$ 、 $\tan 45^\circ$ 、 $\tan 60^\circ$ 的值依次增大，其变化规律可以总结为：

- ① 正弦、正切值随锐角度数的增大(或减小)而增大(或减小)
- ② 余弦、余切值随锐角度数的增大(或减小)而减小(或增大)。

二、锐角三角比之间的关系

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ 。

(1) 互余关系： $\sin A = \cos(90^\circ - \angle A) = \cos B$ ， $\cos A = \sin(90^\circ - \angle A) = \sin B$ ；

$$\tan A = \cot(90^\circ - \angle A) = \cot B, \quad \tan B = \cot(90^\circ - \angle B) = \cot A.$$

(2) 平方关系： $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ；

(3) 倒数关系： $\tan A \cdot \tan(90^\circ - \angle A) = 1$ 或 $\tan A = \frac{1}{\tan B}$ ；

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

(4)商的关系：

要点：

锐角三角比之间的关系式可由锐角三角比的意义推导得出，常应用在三角比的计算中，计算时巧用这些关系式可使运算简便。

【即学即练】

1. $\sin 60^\circ$ 的值为_____.
2. 如果 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ，那么锐角 $\alpha =$ _____度.
3. 计算： $\cos^2 30^\circ + \tan 30^\circ \times \sin 60^\circ - \sqrt{2} \cos 45^\circ$
4. 计算： $\tan^2 60^\circ + \frac{\cot 45^\circ - \cos 30^\circ}{2 \sin 30^\circ}$.
5. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\left| \cos A - \frac{1}{2} \right| + (\sqrt{3} - \tan B)^2 = 0$ ， $\angle A$ 、 $\angle B$ 都是锐角，则 $\triangle ABC$ 是_____三角形.
6. 对于锐角 α ，下列等式中成立的是 ()

A. $\sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tan \alpha$	B. $\cos \alpha = \tan \alpha \cdot \cot \alpha$
C. $\tan \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha$	D. $\cot \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
7. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，下列式子不一定成立的是 ()

A. $\tan A = \cot B$	B. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
C. $\sin^2 A + \sin^2 B = 1$	D. $\tan A \cdot \cot B = 1$

知识点 2 使用计算器求锐角的三角比的值

特殊锐角三角比的值，可以通过几何计算求得任意锐角的三角比的值，通常利用计算器求得

只要计算器上有 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ (或 tg) 键，就可以用来求锐角三角比的值. 通常，计算器所显示的这个三角

比的值是它的近似值.

由于我们现在遇到的表示锐角的大小的单位都是“度、分、秒”因此在使用计算器求锐角三角比的值时，首

先必须进入^{DEG}(角度)模式。

如：在计算器面板上，按^{MODE}键，屏幕显示：



然后按¹键，计算器即进入了^{DEG}模式。

注意：

①如果按^{MODE}键一次，屏幕未显出图示的画面，那么反复按^{MODE}键，直到显示出来为止。

②“^{DEG}”表示角度的单位制为“度、分、秒”。

【即学即练】

1. 用计算器求下列各值（精确到^{0.01}）：

(1) $\tan 28^\circ$ ；

(2) $\tan 38^\circ 20'$ 。

2. 用计算器求下列各式的值（精确到^{0.01}）。

(1) $\cos 63^\circ 17'$ ；

(2) $\tan 27.35^\circ$ ；

(3) $\sin 39^\circ 57' 6''$;

(4) $\sqrt{5}\sin 40^\circ$

题型精讲

题型 01 求特殊角的锐角三角比的值

【典例 1】. $\sin 60^\circ$ 的值为_____.

【变式 1】. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$, 下列说法正确的是 ()

A. $\angle A$ 的余切值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\angle A$ 的对边与邻边之比为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\angle B$ 的余弦值 $\frac{1}{2}$ D. $\angle B$ 的正弦值不确定

【变式 2】. 计算: $\cot 30^\circ =$ _____.

【变式 3】. $\tan 45^\circ =$ _____.

题型 02 根据特殊角的锐角的三角比求角度 (I)

【典例 1】. 若 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则锐角 $\alpha =$ _____°.

【变式 1】. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\angle A =$ _____°.

【变式 2】. 若 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则锐角 $\angle A =$ _____°.

【变式 3】. 若 $\angle A$ 为锐角, 且 $\tan^2 A + 2\tan A - 3 = 0$, 则 $\angle A =$ _____度.

题型 03 根据特殊角的锐角的三角比求角度 (II)

【典例 1】. 若 $\sin(\alpha + 15^\circ) = 1$, 则 $\angle \alpha$ 等于_____度.

【变式 1】. 如果 $\sqrt{3}\tan(\alpha + 10^\circ) = 1$ 成立, 那么锐角 α 的度数应是 ()

A. 40° B. 30° C. 20° D. 10°

【变式 2】. 李红同学遇到了这样一道题: $\sqrt{3}\tan(\alpha + 20^\circ) = 1$, 你猜想锐角 α 的度数应是 ()

A. 40° B. 30° C. 20° D. 10°

题型 04 判断三角形的形状

【典例 1】. 如果 $\sqrt{\cos A - \frac{1}{2}} + |\sqrt{3} \tan B - 3| = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状是_____.

【变式 1】. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\left| \cos A - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + (1 - \tan B)^2 = 0$ ， $\angle A$ ， $\angle B$ 都是锐角，则 $\triangle ABC$ 是_____三角形.

【变式 2】. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 都是锐角，且 $|2\sin A - 1| + (\sqrt{3} - \tan B)^2 = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 的形状是_____三角形（填“等腰”、“等边”或“直角”）.

题型 05 特殊角的锐角三角比的混合运算

【典例 1】. 计算： $2\cos 45^\circ - 3\tan 30^\circ \sin 60^\circ + \frac{\cot 45^\circ}{\cos 60^\circ}$.

【变式 1】. 计算： $\cos^2 45^\circ - \frac{\tan 60^\circ}{2\sin 60^\circ + 1} + \cot 30^\circ \cot 45^\circ$.

【变式 2】. 计算： $\cos^2 45^\circ + \sin 60^\circ \cdot \tan 30^\circ - \sqrt{(1 - \cot 30^\circ)^2}$.

【变式 3】. 计算： $\sqrt{\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ} + \left(\frac{\cot 45^\circ - \sin 45^\circ}{\tan 45^\circ} \right)^2$.

题型 06 特殊角的锐角三角比的应用

【典例 1】. 下列各数中是无理数的是 ()

- A. $\cos 60^\circ$ B. 1.3 C. $\sqrt{83}$ D. $\sqrt{27}$

【变式 1】. 先化简，再求值： $\frac{2a}{a^2 - 1} \div \left(1 + \frac{1}{a - 1} \right)$ ，其中 $a = 2\cos 45^\circ - \tan 45^\circ$.

【变式 2】. 点 $M(-\sin 60^\circ, \cos 60^\circ)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是 ()

- A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ B. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ C. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$ D. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

题型 07 锐角的三角比之间的关系 (I)

【典例 1】. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\sin A = \frac{1}{2}$ ，则 $\cos B$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 2 D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【变式 1】 . 如果 $0^\circ < \angle A < 45^\circ$, 那么 $\sin A$ 与 $\cos A$ 的差 ()

- A. 大于 0 B. 小于 0 C. 等于 0 D. 不能确定

【变式 2】 . 以下与 $\tan 30^\circ$ 大小相等的是 ()

- A. $\cos 60^\circ$ B. $\cot 60^\circ$ C. $\cot 30^\circ$ D. $\tan 60^\circ$

题型 08 比较大小问题

【典例 1】 . 令 $a = \sin 60^\circ$, $b = \cos 45^\circ$, $c = \tan 30^\circ$, 则它们之间的大小关系是 ()

- A. $c < b < a$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $a < c < b$

【变式 1】 . 下列不等式, 成立的是 ()

- A. $\sin 60^\circ < \sin 45^\circ < \sin 30^\circ$ B. $\cos 60^\circ > \cos 45^\circ > \cos 30^\circ$
C. $\tan 60^\circ < \tan 45^\circ < \tan 30^\circ$ D. $\cot 30^\circ > \cot 45^\circ > \cot 60^\circ$

【变式 2】 . 比较 $\tan 52^\circ$, $\cos 21^\circ$, $\sin 49^\circ$ 的大小关系是 ()

- A. $\tan 52^\circ < \cos 21^\circ < \sin 49^\circ$ B. $\tan 52^\circ < \sin 49^\circ < \cos 21^\circ$
C. $\sin 49^\circ < \tan 52^\circ < \cos 21^\circ$ D. $\sin 49^\circ < \cos 21^\circ < \tan 52^\circ$

题型 09 锐角的三角比之间的关系 (II)

【典例 1】 . $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 下列关系中正确的是 ()

- A. $\tan A = \tan B$ B. $\tan A \cdot \cot B = 1$ C. $\sin A = \cos B$ D. $\cos A = \cos B$

【变式 1】 . $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 下列关系中正确的是 ()

- A. $\tan A = \frac{1}{\cot A}$ B. $\tan A = \frac{1}{\cot B}$ C. $\tan A \cdot \cot B = 1$ D. $\cot A \cdot \tan B = 1$

【变式 2】 . 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 把 $\angle A$ 的邻边与对边的比叫做 $\angle A$ 的余切, 记作 $\cot A = \frac{b}{a}$. 则下列关

系式中不成立的是 ()

- A. $\tan A \cdot \cot A = 1$ B. $\sin A = \tan A \cdot \cos A$
C. $\cos A = \cot A \cdot \sin A$ D. $\tan^2 A + \cot^2 A = 1$

题型 10 用计算器求锐角的三角比的值

【典例 1】. 用计算器求下列各式的值. (结果精确到 0.0001)

(1) $\sin 47^\circ$;

(2) $\sin 12^\circ 30'$;

(3) $\sin 18^\circ + \cos 55^\circ - \tan 59^\circ$.

【变式 1】. 按科学计算器 MODE MODE1, 使显示器显示 D 后, 求 $\sin 90^\circ$ 的值, 以下按键顺序正确的是 ()

A . $\sin 9 =$

B . $9, \sin =$

C . $\sin , 9, 0 =$

D . $9, 0 =$

【变式 2】. 用计算器求下列各式的值 (精确到 0.0001) :

(1) $\sin 47^\circ$;

(2) $\sin 12^\circ 30'$;

(3) $\cos 25^\circ 18'$;

(4) $\sin 18^\circ + \cos 55^\circ - \tan 59^\circ$.

强化训练

一、单选题

1 . $\frac{1}{2} \sin 45^\circ$ 的值是 ()

A . $\frac{1}{2}$

B . $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C . $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D . $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 . 30° 角的正切值为 ()

A . $\sqrt{3}$

B . $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C . $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D . $\frac{1}{2}$

3 . 若 $\angle A$ 为锐角, 且 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\cos A$ 等于 ()

A . 1

B . $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C . $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D . $\frac{1}{2}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 、 $\angle C$ 都是锐角, 若 $\left| \frac{1}{2} - \sin A \right| + \left(\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 0$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 等腰三角形 D. 等边三角形

5. 已知 α 为锐角, $\cos(\alpha - 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 α 等于 ()

- A. 30° B. 50° C. 60° D. 80°

6. 下列不等式, 成立的是 ()

- A. $\sin 60^\circ < \sin 45^\circ < \sin 30^\circ$ B. $\cos 60^\circ > \cos 45^\circ > \cos 30^\circ$
C. $\tan 60^\circ < \tan 45^\circ < \tan 30^\circ$ D. $\cot 30^\circ > \cot 45^\circ > \cot 60^\circ$

7. 若 $\angle A$ 是锐角, 且 $\sin A = \frac{2}{5}$, 则 ()

- A. $0^\circ < \angle A < 30^\circ$ B. $30^\circ < \angle A < 45^\circ$
C. $45^\circ < \angle A < 60^\circ$ D. $60^\circ < \angle A < 90^\circ$

8. 三角函数 $\sin 70^\circ$, $\cos 70^\circ$, $\tan 70^\circ$ 的大小关系是 ()

- A. $\sin 70^\circ > \cos 70^\circ > \tan 70^\circ$ B. $\tan 70^\circ > \cos 70^\circ > \sin 70^\circ$
C. $\tan 70^\circ > \sin 70^\circ > \cos 70^\circ$ D. $\cos 70^\circ > \tan 70^\circ > \sin 70^\circ$

9. $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 下列关系中正确的是 ()

- A. $\tan A = \tan B$ B. $\tan A \cdot \cot B = 1$ C. $\sin A = \cos B$ D. $\cos A = \cos B$

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 则 $\sin A + \cos A$ 的值 ()

- A. 大于 1 B. 等于 1 C. 小于 1 D. 不确定, 与 $\angle A$ 的值有关

二、填空题

11. $\cos 60^\circ =$ _____.

12. 计算: $\tan 60^\circ + \cos 30^\circ =$ _____.

13. 计算: $\frac{2\sin^2 45^\circ \cdot \tan 60^\circ}{\cos 30^\circ} + 4\cot 45^\circ =$ _____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\left| \cos A - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + (1 - \tan B)^2 = 0$ ， $\angle A$ ， $\angle B$ 都是锐角，则 $\triangle ABC$ 是_____三角形。

15. 若 $\sin \alpha = \cos 40^\circ$ ，则锐角 $\alpha =$ _____。

16. $\sin 37^\circ$ _____ $\cos 52^\circ$ (选填“>”或“<”或“=”)。

17. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\tan A = \frac{1}{2}$ ，那么 $\cot B$ 的值为_____。

18. 已知一个锐角的正切值比余切值大，且两者之和是 $3\frac{1}{3}$ ，则这个锐角的正切值为_____。

三、解答题

19. 计算： $2(1 - \cos 30^\circ) + \frac{2 \sin 60^\circ}{2 \tan 45^\circ - \cot 30^\circ}$ 。

20. 计算： $\frac{\sin 60^\circ}{\tan 60^\circ} - \cot^2 30^\circ + \frac{4 \cos 45^\circ}{2 \sin 45^\circ + \tan 45^\circ}$ 。

21. 计算： $\frac{3 - (2 \cos 45^\circ)^2}{2 \sin^2 60^\circ - \cos 60^\circ - \cot 30^\circ}$ 。

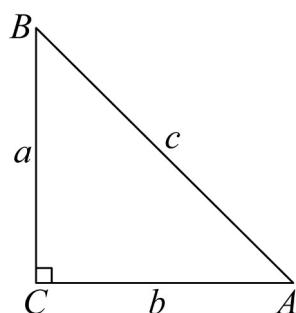
22. 计算： $2 \cos^2 30^\circ + \sin 60^\circ + \frac{\cot 45^\circ - \cos 60^\circ}{2 \sin 45^\circ - \cot 30^\circ}$ 。

23. 计算： $2 \sin 60^\circ + \frac{2}{\tan 45^\circ - \tan 60^\circ} - \sqrt{(\sin 45^\circ - 1)^2}$ 。

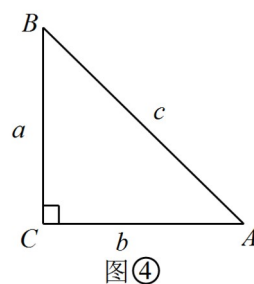
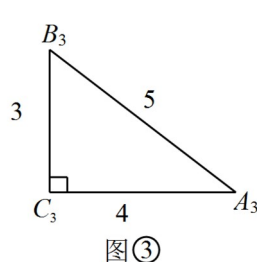
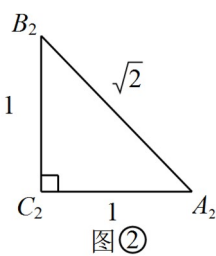
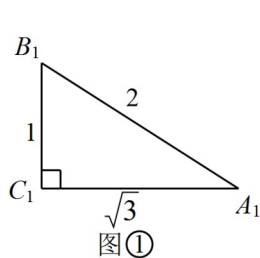
24. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\left| 2 \sin A - 1 \right| + \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos B \right| = 0$ ，求 $\angle C$ 的值。

25. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， BC 、 AC 、 AB 三边的长分别为 a 、 b 、 c ，则 $\sin A = \frac{a}{c}$ ， $\cos A = \frac{b}{c}$ ，

$\tan A = \frac{a}{b}$ 。我们不难发现： $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$ ，... 试探求 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 之间存在的一般关系，并说明理由。



26. 如图，根据图中数据完成填空，再按要求答题．



(1) $\sin^2 A_1 + \cos^2 A_1 = \underline{\quad}$; $\sin^2 A_2 + \cos^2 A_2 = \underline{\quad}$; $\sin^2 A_3 + \cos^2 A_3 = \underline{\quad}$.

(2) 观察上述等式，猜想：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，都有 $\sin^2 A + \cos^2 A = \underline{\quad}$ ；

(3) 如图④，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 的对边分别是 a ， b ， c ，利用三角函数的定义和勾股定理，证明你的猜想；

(4) 若 $0^\circ < \angle A < 90^\circ$ ，且 $\sin A \cdot \cos A = \frac{12}{25}$ ，求 $\sin A + \cos A$ 的值．